Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2009, 2(1), 116-121

УДК 512.7

Симметричные формы над полулокальными кольцами

Ольга А.Старикова*
Северо-Восточный государственный университет,
Портовая 13, Магадан, 685000,
Россия

Получена 10.10.2008, окончательный вариант 15.12.2008, принята к печати 10.01.2009

В работе рассматриваются симметричные матрицы, квадрики и квадратичные формы (включая вырожденные) над полулокальными кольцами.

Ключевые слова: полулокальное кольцо, нормальная форма, квадрика, симметричная форма, локальное кольцо коэффициентов, полиномиальные алгебры.

Введение

Рассматриваются симметричные матрицы, квадрики и квадратичные формы (включая вырожденные) над полулокальными кольцами. В основном исследуемом случае локального кольца K коэффициентов с главным максимальным идеалом $J =< \varepsilon >$ ранее была установлена приводимость симметрической матрицы A над K к клеточно-диагональному виду с клетками $A_k \varepsilon^{f_k}$ для невырожденных диагональных матриц A_k, [1]. Теорема 1.2 выявляет, что клетки A_k определены с точностью до конгруэнтности.

Задачи классификации квадратичных форм и квадрик проективных пространств над локальными кольцами исследовались в [1]—[3]. В § 2 перечисляются классы конгруэнтных симметрических матриц над фактор-алгебрами действительных полиномиальных алгебр, а также полиномиальных алгебр над конечными полями.

1. Симметричные формы над полулокальными кольцами

Основная в этом параграфе теорема 1.2 выявляет необходимые и достаточные условия конгруэнтности симметрических матриц над локальным кольцом главных идеалов.

Всюду далее кольцо коэффициентов K является ассоциативно-коммутативным и с единицей. Некоторые инварианты диагонализируемых симметричных матриц выявляет доказанная в [2]

Лемма 1.1. *Если симметричная матрица над локальным кольцом приводится конгруэнтным преобразованием к диагональному виду* $\mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$*, то набор идеалов* $< d_i >$ *не зависит от выбора преобразования.*

*e-mail: star-olga@yandex.ru

Пусть K есть локальное кольцо с главным максимальным идеалом $\langle\varepsilon\rangle$ и M_{K^*} — система представителей смежных классов группы K^* по подгруппе квадратов $K^{*2} = \{a^2 \mid a \in K^*\}$, содержащая единицу кольца K. Матрицу над K назовем канонической, если она имеет вид

$$\mathrm{diag}\ (k_1\varepsilon^{t_1}, k_2\varepsilon^{t_2}, \ldots, k_r\varepsilon^{t_r}, 0, \ldots, 0), \tag{1}$$

$$0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_r, \quad \varepsilon^{t_r} \neq 0, \quad k_i \in M_{K^*},$$

где при $t_{i-1} = t_i$ в случае линейно-упорядоченной системы M_{K^*} предполагаем также $k_{i-1} \leqslant k_i$. С использованием леммы 1.1 в [1] доказана

Теорема 1.1. *Пусть K есть локальное кольцо с главным максимальным идеалом $\langle\varepsilon\rangle$ и обратимым элементом 2. Тогда всякая симметричная матрица A над K конгруэнтна канонической матрице (1) с однозначно определенными показателями $t_1, t_2, \ldots, t_r$.*

Симметричные матрицы A и B и соответствующие им формы над K называем проективно конгруэнтными (или конгруэнтными), если $B = kUAU^T$ (соответственно $B = UAU^T$) для обратимой матрицы U и обратимого элемента $k \in K$.

Для построения нормального вида квадратичных форм над K, в силу теоремы 1.1, требуется исследовать вопрос о конгруэнтности матриц вида (1). Симметрическая матрица A вида (1) имеет клеточно-диагональный вид

$$A = \mathrm{diag}\ (A_1\varepsilon^{f_1}, A_2\varepsilon^{f_2}, \ldots, A_q\varepsilon^{f_q}, O), \quad 0 \leqslant f_1 < f_2 < \ldots < f_q,\ \varepsilon^{f_q} \neq 0 \tag{2}$$

для подходящих обратимых диагональных клеток A_j и нулевой клетки O. Мы исследуем конгруэнтные матрицы A и $D = UAU^T$ вида (1) с подобными клеточными разбиениями матриц $U = \|U_{ij}\|$ и D с диагональными клетками D_j.

Ранее в [2] было установлено, что клетки A_k определены по модулю максимального идеала J с точностью до конгруэнтности. Следующая, основная в этом параграфе, теорема дает более точный результат.

Теорема 1.2. *Пусть K — локальное кольцо с главным максимальным идеалом J и $1+J \subset K^{*2}$. Матрицы A и D конгруэнтны над K тогда и только тогда, когда для всех $j = 1, \ldots, q$ конгруэнтны выбранные выше клетки A_j и D_j.*

Лемма 1.2. *Пусть A и D — невырожденные диагональные матрицы над локальным кольцом K с главным максимальным идеалом J и $1 + J \subset K^{*2}$. Для конгруэнтности матриц A и D достаточно, чтобы они были конгруэнтны по модулю идеала J.*

Доказательство. Предположим, что матрицы A и D конгруэнтны по модулю идеала J. Тогда существует такая симметричная матрица S над J, для которой матрицы A и $D + S$ конгруэнтны. Докажем конгруэнтность матриц $D = \mathrm{diag}\ (d_1, \ldots, d_n)$ и $D + S$. Согласно теореме 1.1 матрица $D + S$ конгруэнтна некоторой диагональной матрице B, причем в силу леммы 1.1 матрица B обратима. Более того, $B = \mathrm{diag}\ (d_1 + j_1, \ldots, d_n + j_n)$, где $j_k \in J$, $k = 1, \ldots, n$, так как для диагонализации матрицы $D + S$ достаточно применять лишь трансвекции. Положим $v_k^2 = 1 + j_k d_k^{-1}$, что корректно в силу условия $1 + J \subset K^{*2}$. Тогда для $V = \mathrm{diag}\ (v_1^{-1}, \ldots, v_n^{-1})$ имеем $VBV^T = D$. Транзитивность отношения конгруэнтности завершает доказательство. □

Нам потребуется также установленная в [1]

Лемма 1.3. *Пусть A_j, D_j и U_{ij} — выбранные выше клетки над произвольным локальным кольцом K с главным максимальным идеалом $J = \langle \varepsilon \rangle$. Тогда клетки U_{tt}, $1 \leqslant t \leqslant q$, обратимы и, кроме того,*

$$U_{tt} A_t U_{tt}^T = D_t \bmod J,\ 1 \leqslant t \leqslant q; \quad U_{tj} = O \bmod K\varepsilon^{f_t - f_j},\ 1 \leqslant j < t \leqslant q.$$

Доказательство теоремы 1.2. Предположим, что в условиях теоремы матрицы $A = \mathrm{diag}\,(A_1\varepsilon^{f_1}, A_2\varepsilon^{f_2}, \dots, A_q\varepsilon^{f_q}, O)$ и $D = \mathrm{diag}\,(D_1\varepsilon^{f_1}, D_2\varepsilon^{f_2}, \dots, D_q\varepsilon^{f_q}, O)$ конгруэнтны. Тогда, согласно лемме1.3, диагональные клетки A_j и D_j $(j = 1, \dots, q)$ конгруэнтны по модулю идеала J. Отсюда, применяя лемму 1.2, получаем конгруэнтность матриц A_j и D_j над кольцом K. Обратное утверждение очевидно. $\square$

Замечание 1.1. *Если в основном кольце с обратимым элементом 2 элемент j лежит в радикале Джекобсона, то при $c_1 = 1 - j/2$ получаем $1 - j = c_1^2[1 - j^2/(2c_1)^2]$. Для элемента в квадратной скобке аналогично найдем c_2. Продолжая индуктивно, находим элементы $c_m \in K^*$, такие что*

$$1 - j = c_m^2 \bmod < j^{2^m} >, \quad c_{m+1} = c_m \bmod < j^{2^m} > \quad (m = 1, 2, 3, \dots).$$

Это показывает, что $1 - j$ есть обратимый квадрат как при условии нильпотентности элемента j, так и в случае, когда основным является кольцо целых p-адических чисел либо кольцо формальных степенных рядов от одной или нескольких переменных над полем.

Из теоремы 1.2 непосредственно вытекает

Следствие 1.1. *Если $K^{*2} = K^*$ и максимальный идеал нильпотентен ступени s, то число классов конгруэнтных симметричных $(n \times n)$-матриц равно $\binom{n+s}{n}$.*

Пусть $K = \sum\limits_{i=1}^{m} K_i$ — прямая сумма локальных колец K_i главных идеалов, и A — произвольная симметрическая $(n \times n)$-матрица над кольцом K. Тогда матрица A представима в виде суммы матриц $A = \sum\limits_{i=1}^{m} A_i$, где A_i — симметрическая $(n \times n)$-матрица над кольцом K_i. Согласно теореме 1.1 для всякого слагаемого A_i существует обратимая матрица $U_i \in GL(n, K_i)$, такая что симметрическая матрица $U_i A_i U_i^T$ имеет канонический вид (1). Тогда для $U = \sum\limits_{i=1}^{m} U_i \in GL(n, K)$ матрица UAU^T есть сумма канонических матриц. Если над локальными кольцами K_i симметрические матрицы A_i приведены к (единственному) нормальному виду, то будем говорить, что матрица A имеет нормальный вид.

2. Перечисление классов конгруэнтных симметрических матриц над полиномиальными алгебрами

Классы конгруэнтных симметрических матриц над фактор-алгебрами действительных полиномиальных алгебр и полиномиальных алгебр над конечными полями перечисляют теоремы 2.2 и 2.4.

Для произвольного поля F обозначим через $F(\varepsilon^{k-1})$ фактор-алгебру $F[x]/ < x^k >$. Пусть R и C — поля действительных и комплексных чисел, $r(x) \in R[x]$, $\deg(r(x)) \geqslant 1$.

Тогда $R[x]/ < r(x) > \cong \sum\limits_{\alpha=1}^{s}(R(\varepsilon^{l_\alpha - 1}))^{k_\alpha} \oplus \sum\limits_{\beta=1}^{t}(C(\varepsilon^{j_\beta - 1}))^{m_\beta}$ для натуральных s, t, l_α, j_β и $k_\alpha, m_\beta \geqslant 0$, причем $\deg(r(x)) = \sum\limits_{\alpha=1}^{s} l_\alpha k_\alpha + \sum\limits_{\beta=1}^{t} 2j_\beta m_\beta$ [4].

Отметим, что алгебра $R(\varepsilon^{l-1})$ отвечает условиям следующей теоремы [1], распространяющей закон инерции вещественных квадратичных форм и выявляющей "нормальный" вид:

$$f_{s_1,r_1}^{(0)}\varepsilon^{i_1} + f_{s_2,r_2}^{(r_1)}\varepsilon^{i_2} + \ldots + f_{s_q,r_q}^{(r_1+\ldots+r_{q-1})}\varepsilon^{i_q} \ (0 \leqslant i_1 < \ldots < i_q,\ \varepsilon^{i_q} \neq 0), \tag{3}$$

где для целых чисел $0 \leqslant s \leqslant r,\ 0 \leqslant k < k + r \leqslant n$ полагаем

$$f_{s,r}^{(k)} = -(x_{k+1}^2 + x_{k+2}^2 + \ldots + x_{k+s}^2) + (x_{k+s+1}^2 + \ldots + x_{k+r}^2).$$

Теорема 2.1. *Пусть K есть локальное кольцо с главным максимальным идеалом $J = \langle\varepsilon\rangle$, причем $|K^* : K^{*2}| = 2,\ 1 + J \subset K^{*2}$ и $1 + K^{*2} \subset K^{*2}$. Тогда всякая ненулевая квадратичная форма над K приводится обратимым $K-$ линейным преобразованием неизвестных к диагональному виду (3), причем показатели $i_1, \ldots, i_q$ и целые числа $r_1, \ldots, r_q,\ s_1, \ldots,\ s_q$ не зависят от способа приведения.*

Обозначим через $N(A, n)$ число классов конгруэнтных симметрических $(n \times n)$-матриц над алгеброй A.

Теорема 2.2. *Для R-алгебры $A = \sum\limits_{\alpha=1}^{s}(R(\varepsilon^{l_\alpha-1}))^{k_\alpha} \oplus \sum\limits_{\beta=1}^{t}(C(\varepsilon^{j_\beta-1}))^{m_\beta}$ имеем*

$$N(A, n) = \prod_{\alpha=1}^{s}\binom{n+2l_\alpha}{n}^{k_\alpha} \cdot \prod_{\beta=1}^{t}\binom{n+j_\beta}{n}^{m_\beta}.$$

Доказательство. Достаточно показать, что для алгебр плюральных чисел $R(\varepsilon^{l-1})$ и $C(\varepsilon^{l-1})$ над полями действительных и комплексных чисел количество классов конгруэнтных симметрических $(n \times n)$-матриц равно $\binom{n+2l}{n}$ и $\binom{n+j}{n}$ соответственно. Для алгебры $R(\varepsilon^{l-1})$ в силу теоремы 2.1 требуемое число классов находим как число неупорядоченных наборов $[t_1, \ldots, t_n]$ с условием $t_i \in \{-1, 1, -\varepsilon, \varepsilon, \ldots, -\varepsilon^{l-1}, \varepsilon^{l-1}, 0\},\ i = 1, \ldots, n$, тем самым $N(R(\varepsilon^{l-1}), n) = \binom{n+2l}{n}$. Равенство $N(C(\varepsilon^{j-1}), n) = \binom{n+j}{n}$, вытекающее из следствия 1.1, завершает доказательство. $\square$

Для произвольного поля F алгебры циклических и ациклических чисел могут быть определены как фактор-алгебры $F(e^{k-1}) \cong F[x]/ < x^k - 1 >$ и $F(i^{k-1}) \cong F[x]/ < x^k + 1 >$ соответственно.

Следствие 2.1. *Известные [4] разложения*

$$R(e^{k-1}) \cong \begin{cases} R^2 \oplus C^{\frac{k-2}{2}}, & k \text{ – четно;} \\ R \oplus C^{\frac{k-1}{2}}, & k \text{ – нечетно;} \end{cases} \qquad R(i^{k-1}) \cong \begin{cases} C^{\frac{k}{2}}, & k \text{ – четно;} \\ R \oplus C^{\frac{k-1}{2}}, & k \text{ – нечетно} \end{cases}$$

позволяют найти число классов конгруэнтных симметрических $n \times n$-матриц над действительными алгебрами циклических и ациклических чисел. Именно для четных значений k получаем

$$N(R(e^{k-1}), n) = (n+1)^{(k+2)/2}(n+2)^2/4, \qquad N(R(i^{k-1}), n) = (n+1)^{k/2},$$

а в случае нечетного ранга k

$$N(R(e^{k-1}),n) = N(R(i^{k-1}),n) = (n+1)^{(k+1)/2}(n+2)/2.$$

Пусть F_p - простое поле Галуа нечетной характеристики, $r(x) \in F_p[x]$, $\deg(r(x)) \geqslant 1$. Тогда $F_p/ < r(x) > \cong \sum\limits_{\alpha=1}^{s}(F_{p^{h_\alpha}}(\varepsilon^{j_\alpha-1}))^{k_\alpha}$ для натуральных h_α, j_α и k_α, причем $\deg(r(x)) = \sum\limits_{\alpha=1}^{s} h_\alpha j_\alpha k_\alpha$. Кольца $F_{p^{h_\alpha}}(\varepsilon^{j_\alpha-1})$ удовлетворяют условиям следующей теоремы, выявляющей нормальный вид симметрических матриц [1].

Теорема 2.3. *Пусть K есть локальное кольцо с обратимым элементом 2 и главным максимальным идеалом $J = \langle\varepsilon\rangle$, причем $|K^* : K^{*2}| = 2,\ \ 1+J \subset K^{*2}$ и $1+K^{*2}$ содержит обратимый неквадрат k. Тогда всякая симметричная матрица над K конгруэнтна единственной диагональной матрице вида*

$$\operatorname{diag}\,(\delta_i\varepsilon^i, \varepsilon^i, \ldots, \varepsilon^i\ , \ldots, \delta_m\varepsilon^m, \varepsilon^m, \ldots, \varepsilon^m\ , 0, \ldots, 0), \tag{4}$$

$$\delta_i, \ldots, \delta_m \in \{1, k\}, \quad 0 \leqslant i < \ldots < m,\ \varepsilon^m \neq 0.$$

Число классов конгруэнтных симметрических $(n \times n)$-матриц над F_p-алгеброй определяет

Теорема 2.4. *Для F_p-алгебры $A = \sum\limits_{\alpha=1}^{s}(F_{p^{h_\alpha}}(\varepsilon^{j_\alpha-1}))^{k_\alpha}$ имеем*

$$N(A,n) = \prod_{\alpha=1}^{s}\{\sum_{t=1}^{\min\{n,j_\alpha+1\}} \tbinom{n-1}{t-1}[\tbinom{j_\alpha}{t}2^t + \tbinom{j_\alpha}{t-1}2^{t-1}]\}^{k_\alpha}.$$

Доказательство. Найдем число классов конгруэнтных симметрических $(n \times n)$-матриц над локальным кольцом $F_{p^{h_\alpha}}(\varepsilon^{j_\alpha-1})$. По теореме 2.3 представителями таких классов служат различные $(n \times n)$-матрицы вида (4). Всякая такая матрица однозначно определяется набором идеалов, порождаемых элементами главной диагонали и, кроме того, набором значений $\delta_i, \cdots, \delta_m$. Обозначая через t количество попарно различных идеалов, порождаемых элементами главной диагонали, получаем, что число рассматриваемых матриц в зависимости от того, содержит или не содержит главная диагональ нулевые элементы, равно $\binom{n-1}{t-1}\binom{j_\alpha}{t-1}2^{t-1}$ и $\binom{n-1}{t-1}\binom{j_\alpha}{t}2^t$ соответственно. Теорема доказана. □

Замечание 2.1. *Число классов $N(A,n)$ конгруэнтных симметрических $(n \times n)$-матриц над F_p-алгеброй может быть найдено индуктивно. Положим*

$$f_n(j_\beta) = f_{n,n}(j_\beta) + f_{n,n-1}(j_\beta) + \ldots + f_{n,1}(j_\beta) + f_{n,0}(j_\beta) + f'_{n,\ 0}(j_\beta),$$
$$f_{1,1}(j_\beta) = 2,\ f_{1,0}(j_\beta) = 2j_\beta - 2,\ f'_{1,0}(j_\beta) = 1,$$
$$\forall v = \overline{2,n}\ \ f_{n,v}(j_\beta) = f_{n-1,v-1}(j_\beta), \qquad f_{n,1}(j_\beta) = 2(f_{n-1,0}(j_\beta) + f'_{n-1,0}(j_\beta)),$$
$$f_{n,0}(j_\beta) = \sum_{\gamma=0}^{j-2} f_{n-1,0}(j_\beta - \gamma) + \sum_{\delta=1}^{j-2} f_{n-1,0}(j_\beta - \delta), \quad f'_{n,0}(j_\beta) = f_{n-1,0}(j_\beta) + f'_{n-1,0}(j_\beta).$$

Тогда

$$N(A,n) = \prod_{\alpha=1}^{s}(2n+1)^{k_\alpha} \cdot \prod_{\beta=1}^{t}(f_n(j_\beta))^{m_\beta}.$$

Список литературы

[1] В.М.Левчук, О.А.Старикова, Квадратичные формы проективных пространств над кольцами, *Мат. сб.* **197**(2006), №6, 97-110.

[2] V.M.Levchuk, O.A.Starikova, A normal form and schemes of quadratic forms, *Journal of Mathematical Sciences*, **152**(2008),№4, 558-570.

[3] G.P.Egorychev, E.V.Zima, Simple Formulae for the Number of Quadrics and Symmetric Forms of Modules Over Local Rings, *Communications in Algebra,* **36**(2008), №4, 1426-1436.

[4] В.В.Вишневский, А.П.Широков, В.В.Шурыгин, Пространства над алгебрами, Казань, Казанский ун-т, 1985.

Symmetric Forms over Semilocal Rings

Ol'ga A.Starikova

The necessary and sufficient conditions for congruence of quadratic forms over a local ring with a principal maximal ideal are considered. Up to this congruence, symmetric matrices over polynomial algebras are enumerated.

Keywords: symmetric forms, projective congruence, normal form, local ring of coefficients, polynomial algebras.