Об одной оптимальной квадратурной формуле в смысле Сарда

Хаётов А. Р.
Институт математики и информационных технологий АН РУз, Ташкент, Узбекистан; abdullo_hayotov@mail.ru

Рассмотрим следующую квадратурную формулу

$$\int_0^1 \varphi(x)dx \cong \sum_{\nu=0}^{N} C_\nu \varphi(x_\nu), \tag{1}$$

с функционалом погрешности

$$\ell(x) = \chi_{[0,1]}(x) - \sum_{\nu=0}^{N} C_\nu \delta(x - x_\nu), \tag{2}$$

где C_ν и x_ν ($\in [0,1]$) являются коэффициентами и узлами формулы (1), $\chi_{[0,1]}(x)$ – характеристическая функция интервала $[0,1]$, и $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака.

Полагаем, что функции $\varphi(x)$ принадлежать в гильбертово пространство

$$K_2(P_2) = \Big\{\varphi : [0,1] \to \mathbb{R} \ \Big| \ \varphi' \text{ – абсолютно непрерывно и } \varphi'' \in L_2(0,1)\Big\},$$

снабженной нормой

$$\|\varphi\,|K_2(P_2)\| = \left\{\int_0^1 \left(P_2\left(\frac{d}{dx}\right)\varphi(x)\right)^2 dx\right\}^{1/2}, \tag{3}$$

где

$$P_2\left(\frac{d}{dx}\right) = \frac{d^2}{dx^2} + 1 \qquad \text{и} \qquad \int_0^1 \left(P_2\left(\frac{d}{dx}\right)\varphi(x)\right)^2 dx < \infty.$$

Равенство (3) является полу нормой и $\|\varphi\| = 0$ тогда и только тогда когда $\varphi(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x$.

Следует отметить, что для линейного дифференциального оператора порядка n, $L \equiv P_n(d/dx)$ Алберг, Нильсон и Уолш в книге [1] исследовалы гильбертовы пространства в контексте обобщенных функций.

Соответсвующий погрешность квадратурной формулы (1) может быть выражен в виде

$$R_N(\varphi) = \int_0^1 \varphi(x)dx - \sum_{\nu=0}^{N} C_\nu \varphi(x_\nu) = (\ell, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x)\varphi(x)dx \tag{4}$$

и является линейным функционалом в сопряженном пространстве $K_2^*(P_2)$ к пространству $K_2(P_2)$.

По неравенству Коши Шварца

$$|(\ell, \varphi)| \le \|\varphi\,|K_2(P_2)\| \cdot \|\ell\,|K_2^*(P_2)\|$$

и погрешность (4) может быть оцениватся с нормой функционала погрешности (2), т.е.

$$\|\ell\,|K_2^*(P_2)\| = \sup_{\|\varphi\,|K_2(P_2)\|=1} |(\ell,\varphi)|\,.$$

Таким образом, оценка погрешности квадратурной формулы (1) на пространстве $K_2(P_2)$ может быть приведен к нахождению нормы функционала погрешности $\ell(x)$ в сопряженном пространстве $K_2^*(P_2)$.

Очевидно, норма функционала погрешности $\ell(x)$ зависить от коэффициентов C_ν и узлов x_ν, $\nu = 0, 1, \ldots, N$. Задача нахождения минимума нормы функционала погрешности $\ell(x)$ по коэффициентам C_ν и узлам x_ν называется *задачей Никольского*, и полученная формула называется *оптимальной квадратурной формулой в смысле Никольского.* Эта задача впервые рассмотрена С.М. Никольским [2], и продолжены многими математиками (см., например, [3] и литературу в нем). Минимизация нормы функционала функционала погрешности по коэффициентам C_ν когда узлы фиксированы назыается *Задачей Сарда.* Полученная формула называется *оптимальной квадратурной формулой в смысле Сарда.* Эта задача впервые исследована А. Сардом [4].

Существуеют несколько методов построения оптимальных квадратурных формул в смысле Сарда. В пространстве Соболева $L_2^{(m)}(a,b)$, основываясь на эти методы, задача Сарда исследована многимы авторами (см., например, [5] и литературу в нем). Здесь, $L_2^{(m)}(a,b)$ есть пространство С.Л. Соболева функций, которые m-е обобщенное производное интегрируемы с квадратом.

В настоящей работе нами получено решение задачи Сарда в пространстве $K_2(P_2)$. Именно, нами найдены коэффициенты $\mathring{C}_\nu$ (и функционал погрешности $\mathring{\ell}$) такой что

$$\big\|\mathring{\ell}\,|K_2^*(P_2)\big\| = \inf_{C_\nu}\big\|\ell\,|K_2^*(P_2)\big\|.$$

Справедливы следующие

Теорема 1. *Коэффициенты оптимальных квадратурных формул в смысле Сарда вида* (1) *в пространстве* $K_2(P_2)$ *имеют вид*

$$C_\nu = \begin{cases} \frac{2\sin h-(h+\sin h)\cos h}{(h+\sin h)\sin h} + \frac{h-\sin h}{(h+\sin h)\sin h(1+\lambda_1^N)}\big(\lambda_1+\lambda_1^{N-1}\big), & \nu = 0, N,\\ \frac{4(1-\cos h)}{h+\sin h} + \frac{2h(h-\sin h)\sin h}{(h+\sin h)(h\cos h-\sin h)(1+\lambda_1^N)}\big(\lambda_1^\nu+\lambda_1^{N-\nu}\big), & \nu = 1,\ldots,N-1, \end{cases}$$

где

$$\lambda_1 = \frac{2h - \sin 2h - 2\sin h\,\sqrt{h^2-\sin^2 h}}{2(h\cos h - \sin h)}$$

и $|\lambda_1| < 1$ $h = 1/N$, $N = 2, 3, \ldots$.

Теорема 2. *Квадрат нормы функционала погрешности* (2) *оптимальной* *квадратурной формулы вида* (1) *на пространстве* $K_2(P_2)$ *имеет вид*

$$
\begin{aligned}
\| \overset{\circ}{\ell} \|^2 \;\; = \;\; & \frac{h(h-\sin h)[\sin h\ (\sin 1 - 1) + h\sin(h-1) + 4\cos h] + [3h^2 + h\sin h + 8(\cos h - 1)]\sin h}{2h(h+\sin h)\sin h} \\
+ \;\; & \frac{h(h-\sin h)}{2(h+\sin h)(1+\lambda_1^N)\sin h}\Bigg(\frac{(h\sin 1 - 4)(\lambda_1+\lambda_1^N)(1-\lambda_1) - 4(1-\lambda_1^{N-1})(\lambda_1^2+1-2\lambda_1\cos h)}{h(1-\lambda_1)} \\
& + \frac{(\lambda_1^2-1)\Big[(2-\cos 1)(\lambda_1^N - 1) - (\lambda_1 - \lambda_1^{N-1})\cos(h-1)\Big]\sin h}{\lambda_1^2+1-2\lambda_1\cos h} \\
& + \frac{(\lambda_1^2\cos h - 2\lambda_1 + \cos h)(\lambda_1 + \lambda_1^{N-1})\sin(h-1)}{\lambda_1^2+1-2\lambda_1\cos h}\Bigg),
\end{aligned}
$$

где λ_1 *дается в теореме 1 и* $|\lambda_1| < 1$.

Теорема 3. *Для нормы функционала погрешности* (2) *оптимальной квадратурной формулы вида* (1) *имеем*

$$
\| \overset{\circ}{\ell} \, |K_2^*(P_2)\|^2 = \frac{1}{720}h^4 + O(h^5) \quad \text{при} \quad N \to \infty.
$$

Следующая теорема об асимптотической оптимальности нашей квадратурной формулы.

Теорема 4. *Оптимальная квадратурная формула вида* (1) *с функционалом погрешности* (2) *в пространстве* $K_2(P_2)$ *является асимптотически оптимальной в пространстве С.Л. Соболева* $L_2^{(2)}(0,1)$, *т.е.*

$$
\lim_{N\to\infty} \frac{\| \overset{\circ}{\ell} \, |K_2^*(P_2)\|^2}{\| \overset{\circ}{\ell} \, |L_2^{(2)*}(0,1)\|^2} = 1.
$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ahlberg J.H., Nilson E.N., Walsh J.L.* The Theory of Splines and Their Applications, Academic Press, New York – London (1967).

2. *Никольский С.М.* К вопросу об оценках приближений квадратурными формулами. // Успехи математических наук. 1950. Т.5, №3, С. 165 -177.

3. *Никольский С.М.* Квадратурные формулы. - М.: Наука, 1988. - 256 с.

4. *Sard A.* Best approximate integration formulas; best approximation formulas. Amer. J. Math. **71**, 80–91 (1949).

5. *Shadimetov Kh.M., Hayotov A.R.* Optimal quadrature formulas with positive coefficients in $L_2^{(m)}(0,1)$ space. J. Comput. Appl. Math. **235**, 1114–1128 (2011)