Упругое полупространство со свободной границей под случайной нормальной нагрузкой: точные решения и алгоритмы моделирования упругих смещений и напряжений

Шалимова И.А., Сабельфельд К.К.
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск; ias@osmf.sscc.ru

Введение. Работа посвящена исследованию структуры решения задачи о реакции упругого полупространства в ответ на случайные нормальные нагрузки на границе. При этом граница остается свободной от горизонтальных напряжений. Математически, эта проблема формулируется как задача статической теории упругости для изотропного упругого полупространства в стохастической постановке, когда краевые условия задаются в виде случайных полей, в данном случае - случайного поля нормальных напряжений. Для некоррелированных напряжений - гауссовского белого шума - получены аналитические представления корреляционного тензора напряжений и среднего значения энергии деформаций. Это позволило построить простые моделирующие формулы для поля смещений в виде спектральных разложений. Разработанные моделирующие формулы позволяют вычислять произвольные статистические характеристики поля решений, в частности, структурные функции в виде экспоненциальных моментов, которые используются при рентгеновском анализе различных дефектов в кристаллах, например, краевых и винтовых дислокаций [2].

Следует отметить, что решения краевых задач с граничными условиями, содержащими белый шум, представляют собой обобщенные случайные поля, и поэтому вызывают значительные трудности при численном решении. Более подробный анализ можно прочитать в работе [3], где нами была решена подобная задача, но на границе были предписаны случайные возмущения смещений.

1. Постановка задачи. Пусть имеется изотропное упругое полупространство, с границей $\Gamma = \{(x, y, z) : z = 0\}$. Рассматривается вторая краевая задача для системы уравнений Ламе [1]:

$$\mu\Delta\mathbf{u}(\mathbf{x}) + (\lambda + \mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in D^+, \tag{1}$$

с граничными условиями

$$\sigma_{13}\Big|_{z=0} = \mu\Big(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x}\Big)\Big|_{z=0} = 0, \qquad \sigma_{23}\Big|_{z=0} = \mu\Big(\frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial y}\Big)\Big|_{z=0} = 0, \tag{2}$$

$$\sigma_{33}(\mathbf{x}')\Big|_{z=0} = \lambda\mathrm{div}\,\mathbf{u} + 2\mu\frac{\partial u_3}{\partial z}\Big|_{z=0} = g_3(\mathbf{x}'), \quad \mathbf{x}' \in \Gamma = \partial D^+, \tag{3}$$

где $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = (u_1(x, y, z), \dots, u_3(x, y, z))^T$ – вектор-столбец смещений и σ_{ij} – компоненты тензора напряжений. Заметим, что в данной постановке ненулевой является только третья компонента $g_3(\mathbf{x}') = g_3(x', y')$. Коэффициенты λ и μ – упругие константы среды.

Известно [1], что решение системы уравнений Ламе (1) в произвольной точке $\mathbf{x}$ внутри полупространства связывается со значениями напряжений $g_3(\mathbf{x}')$ на границе интегральной формулой Пуассона

$$\mathbf{u}(x,y,z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x-x',y-y',z)g_3(x',y')\,d\,x'\,d\,y' \ , \qquad (4)$$

где ядро K – вектор-столбец с элементами K_i, $i=1,2,3$

$$K(x-x',y-y',z) = \frac{1}{4\pi\mu}\left(\begin{array}{c} -\frac{(x-x')z}{r^3} + \frac{(x-x')}{\alpha r(r+z)} \\ -\frac{(y-y')z}{r^3} + \frac{(y-y')}{\alpha r(r+z)} \\ -\frac{\alpha+1}{\alpha}\frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^3} \end{array}\right) \ ,$$

и $r = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+z^2}$, $\alpha = (\lambda+\mu)/\mu$. Для напряжений аналогичное соотношение имеет вид [1]

$$\mathbf{Tu}(x,y,z) = (\sigma_{13},\sigma_{23},\sigma_{33})^T = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} K_T(x-x',y-y',z)g_3(x',y')\,d\,x'\,d\,y' \ , \qquad (5)$$

с ядром K_T, $K_T(x-x',y-y',z) = \frac{3}{2\pi r^5}\Big((x-x')z^2,(y-y')z^2,z^3\Big)^T$.

2. Корреляционный тензор поля напряжений. В работе рассмотрен случай, когда граничная функция g_3 является однородным гауссовским случайным процессом, а именно – белым шумом. Без ограничения общности будем считать, что $\langle \mathbf{g} \rangle = 0$. Тогда $\mathbf{u}(x,y,z)$, $\mathbf{Tu}(x,y,z)$ также являются гауссовскими случайными полями с $\langle \mathbf{u} \rangle = 0$, $\langle \mathbf{Tu} \rangle = 0$, и, следовательно, определяются единственным образом своими корреляционными тензорами. Обозначим корреляционный тензор граничных напряжений через B_g. Для белого шума

$$B_g(\mathbf{x}'_1;\mathbf{x}'_2) = \langle g_3(x'_1,y'_1)g_3(x'_2,y'_2)\rangle = \delta(x'_1-x'_2)\delta(y'_1-y'_2) \ ,$$

где $\delta(\cdot)$ – δ - функция Дирака. Корреляционный тензор $B_T(\mathbf{x}_1;\mathbf{x}_2)$ случайного поля напряжений $\mathbf{Tu}$ внутри полупространства можно вычислить, воспользовавшись интегральной формулой Пуассона (5)

$$\begin{aligned} &B_T(\mathbf{x}_1;\mathbf{x}_2) = \langle \mathbf{Tu}(x_1,y_1,z_1)\otimes\mathbf{Tu}(x_2,y_2,z_2)\rangle = \qquad (6) \\ &\int\limits_{R^4} K_T(x_1-x'_1,y_1-y'_1,z_1)\otimes K_T(x_2-x'_2,y_2-y'_2,z_2)B_g(\mathbf{x}'_1;\mathbf{x}'_2)\,d\mathbf{x}'_1\,d\mathbf{x}'_2 \ . \end{aligned}$$

Здесь $\otimes$ обозначает прямое произведение векторов. В следующей теореме получено аналитическое представление для тензора $B_T(\mathbf{x}_1;\mathbf{x}_2)$.

Теорема 1. *Корреляционный тензор случайного поля напряжений* $\mathbf{Tu}(x,y,z)$ *в случае белого шума на границе имеет вид*

$$B_T = \frac{3z_1z_2}{2\pi r^7}\left(\begin{array}{ccc} \overline{z}(r^2-5\tau_x^2) & -5\overline{z}\tau_x\tau_y & \tau_x(4\overline{z}^2-R_\tau^2) \\ -5\overline{z}\tau_x\tau_y & \overline{z}(r^2-5\tau_y^2) & \tau_y(4\overline{z}^2-R_\tau^2) \\ \tau_x(R_\tau^2-4\overline{z}^2) & \tau_y(R_\tau^2-4\overline{z}^2) & \overline{z}(2\overline{z}^2-3R_\tau^2) \end{array}\right) + \frac{3\overline{z}}{2\pi r^5}\left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & \tau_x z_1 \\ 0 & 0 & \tau_y z_1 \\ -\tau_x z_2 & -\tau_y z_2 & \overline{z}^2 \end{array}\right) ,$$

где $\overline{z} = z_1+z_2$, $r = \sqrt{\tau_x^2+\tau_y^2+\overline{z}^2}$, $\tau_x = x_1-x_2$, $\tau_y = y_1-y_2$, $R_\tau = \sqrt{\tau_x^2+\tau_y^2}$.

В ходе доказательства теоремы 1 было получено также представление для спектрального тензора напряжений. По определению, спектральный тензор есть

$$S_T(\xi_x,\xi_y,z_1,z_2)=F^{-1}[B_T(\tau_x,\tau_y,z_1,z_2)]=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\mathrm{i}(\xi_x\tau_x+\xi_y\tau_y)}\,B_T(\tau_x,\tau_y,z_1,z_2)\,d\tau_x\,d\tau_y\,,$$

и в данном случае

$$S_T(\xi_x,\xi_y,z_1,z_2)=\frac{1}{2\pi}e^{-\sqrt{\xi_x^2+\xi_y^2}\,(z_1+z_2)}S'_T\,,\quad S'_T=G_T(\xi_x,\xi_y,z_1)\otimes G^*_T(\xi_x,\xi_y,z_2)\,,\qquad(7)$$

где $G_T(\xi_x,\xi_y,z)=\Big(-\imath\xi_x z,-\imath\xi_y z,1+z\sqrt{\xi_x^2+\xi_y^2}\Big)^T$. Последнее представление позволяет численно моделировать случайное поле напряжений $\mathbf{Tu}$ на основе спектральной модели. Для поля смещений $\mathbf{u}(x,y,z)$ также получено представление для спектрального тензора.

Теорема 2. *Спектральный тензор случайного поля* $\mathbf{u}(x,y,z)$ *имеет вид*

$$S_u=\frac{1}{8\pi\mu^2}\frac{e^{-(z_1+z_2)\sqrt{\xi_x^2+\xi_y^2}}}{\xi_x^2+\xi_y^2}S'_T,\quad S'_T=G_u(\xi_x,\xi_y,z_1)\otimes G^*_u(\xi_x,\xi_y,z_2)\,,$$

и $G_u(\xi_x,\xi_y,z)=\Big(\imath\xi_x z-\frac{\imath\xi_x}{\alpha\sqrt{\xi_x^2+\xi_y^2}},\imath\xi_y z-\frac{\imath\xi_y}{\alpha\sqrt{\xi_x^2+\xi_y^2}},-\frac{\alpha+1}{\alpha}-z\sqrt{\xi_x^2+\xi_y^2}\Big)^T$.

3. Средняя энергия деформации. Средняя энергия деформации $\langle E(x_1,x_2,x_3)\rangle$ по определению есть

$$\langle E(x_1,x_2,x_3)\rangle=\Big\langle\,\frac{\lambda}{2}\Big(\sum_i\varepsilon_{ii}\Big)^2+\mu\sum_{i,j}\varepsilon_{ij}^2\,\Big\rangle\qquad i,j=1,2,3,$$

где $\varepsilon_{ij}(\mathbf{x})$ – компоненты тензора деформаций, $\varepsilon_{ij}(\mathbf{x})=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j(\mathbf{x})}{\partial x_i}\Big)$.

Дифференцируя формулу Пуассона для смещений (4), можно получить аналогичное интегральное представление для деформаций $\varepsilon_{ij}(\mathbf{x})$. Составляя затем необходимые произведения ε_{ij} и усредняя, точно так же как это было сделано ранее для корреляций, получим

$$\langle E(\mathbf{x})\rangle\;=\;\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big(\frac{\lambda}{2}\Big(\sum_i\frac{\partial K_i(\mathbf{x})}{\partial x_i}\Big)^2+\frac{\mu}{4}\sum_{i,j}\Big(\frac{\partial K_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}+\frac{\partial K_j(\mathbf{x})}{\partial x_i}\Big)^2\Big)\,d\,x'_1\,d\,x'_2\,.$$

Опуская преобразования, приведем точный результат $\langle E(x_3)\rangle=\frac{1}{32\pi}\Big(\frac{2\lambda+\mu}{(\lambda+\mu)^2}+\frac{9}{\mu}\Big)\frac{1}{x_3^2}$.

4. Спектральное представление для частично однородного случайного поля. Из представления для корреляционного тензора случайного поля $\mathbf{Tu}(x,y,z)$ в теореме 1 видно, что оно однородно относительно переменных x,y и неоднородно по координате z. Случайные поля с такими свойствами называются частично однородными и их можно моделировать по схеме, описанной нами в [3]. В этом случае моделирующая формула для случайного векторного поля напряжений имеет вид

$$\mathbf{Tu}(x,y,z)\approx\frac{1}{2\sqrt{R_1R_2}}\sum_{\substack{k,\,m\,=\,-\infty\\(k,\,m)\,\neq\,(0,\,0)}}^{\infty}e^{-\pi z\sqrt{(k/R_1)^2+(m/R_2)^2}}\times$$

$$\Big\{\zeta_{k,m}\cos\pi\Big(\frac{k\,x}{R_1}+\frac{m\,y}{R_2}\Big)+\beta_{k,m}\sin\pi\Big(\frac{k\,x}{R_1}+\frac{m\,y}{R_2}\Big)\Big\},$$

где $\zeta_{k,m}$ и $\beta_{k,m}$ – случайные вектора

$$\zeta_{k,m} = \Big(-\frac{\pi\, k}{R_1}\eta'_{km}, -\frac{\pi\, m}{R_2}\eta'_{km}, \Big[1 + z\pi\sqrt{(k/R_1)^2 + (m/R_2)^2}\Big]\zeta'_{km}\Big)^T,$$

$$\beta_{k,m} = \Big(-\frac{\pi\, k}{R_1}\zeta'_{km}, -\frac{\pi\, m}{R_2}\zeta'_{km}, \Big[1 + z\pi\sqrt{(k/R_1)^2 + (m/R_2)^2}\Big]\eta'_{km}\Big)^T$$

здесь ζ'_{km} и η'_{km} – два семейства независимых стандартных гауссовских случайных величин.

Вид корреляционного тензора B_T выписан в теореме 1, а также может быть вычислен приближенно, на основе (7), и в этом случае

$$B_T(\tau_x, \tau_y, z_1, z_2) \approx \frac{1}{4R_1R_2} \sum_{\substack{k,\, m\, =\, -\infty \\ (k,\, m)\, \neq\, (0,0)}}^{\infty} e^{-\pi(z_1+z_2)\sqrt{(k/R_1)^2+(m/R_2)^2}} \times$$
$$\Big[\Re S'_T \cos\pi(\frac{k\,\tau_x}{R_1} + \frac{m\,\tau_y}{R_2}) - \Im S'_T \sin\pi(\frac{k\,\tau_x}{R_1} + \frac{m\,\tau_y}{R_2})\Big]\ , \qquad (8)$$

где $\Re$ и $\Im$ есть действительная и мнимая части матрицы S'_T в (7). Используя результаты теоремы 2, для поля смещений можно также выписать моделирующие формулы:

$$\mathbf{u}(x,y,z) \approx \frac{1}{4\mu\sqrt{R_1R_2}} \sum_{\substack{k,\, m\, =\, -\infty \\ (k,\, m)\, \neq\, (0,0)}}^{\infty} \frac{e^{-\pi z\rho_{km}}}{\rho_{km}} \Big\{\zeta_{k,m}\cos\pi(\frac{k\,x}{R_1} + \frac{m\,y}{R_2}) + \beta_{k,m}\sin\pi(\frac{k\,x}{R_1} + \frac{m\,y}{R_2})\Big\}$$

где $\zeta_{k,m} = \Big(\Big[\frac{kz}{R_1} - \frac{1}{\alpha}\frac{k}{\pi\,\rho_{km}R_1}\Big]\eta'_{km}, \Big[\frac{mz}{R_2} - \frac{1}{\alpha}\frac{m}{\pi\,\rho_{km}R_2}\Big]\eta'_{km}, -\Big[\frac{\alpha+1}{\alpha\pi} + z\rho_{km}\Big]\zeta'_{km}\Big)^T,$

$$\beta_{k,m} = \Big(-\Big[\frac{kz}{R_1} - \frac{1}{\alpha}\frac{k}{\pi\,\rho_{km}R_1}\Big]\zeta'_{km}, -\Big[\frac{mz}{R_2} - \frac{1}{\alpha}\frac{m}{\pi\,\rho_{km}R_2}\Big]\zeta'_{km}, -\Big[\frac{\alpha+1}{\alpha\pi} + z\rho_{km}\Big]\eta'_{km}\Big)^T$$

ζ'_{km} и η'_{km} – два семейства независимых стандартных гауссовских случайных величин, $\rho_{km} = \sqrt{(k/R_1)^2 + (m/R_2)^2}$. Для корреляционного тензора смещений B_u имеем

$$B_u(\tau_x, \tau_y, z_1, z_2) \approx \frac{1}{8\mu^2R_1R_2} \sum_{\substack{k,\, m\, =\, -\infty \\ (k,\, m)\, \neq\, (0,0)}}^{\infty} \frac{e^{-\pi(z_1+z_2)\rho_{km}}}{\rho^2_{km}} \times$$
$$\Big[\Re S'_u \cos\pi(\frac{k\,\tau_x}{R_1} + \frac{m\,\tau_y}{R_2}) - \Im S'_u \sin\pi(\frac{k\,\tau_x}{R_1} + \frac{m\,\tau_y}{R_2})\Big]\ ,$$

матрица S'_u определена в теореме 2.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 09–01–00639, 10–01–00040, 10–01–00152).

Литература

1. *Купрадзе, В.Д., Гегелиа, Т.Г., Башелейшвили, М.О., и др.* Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. Наука, М., 1976.

2. *V.M. Kaganer* and *K. K. Sabelfeld.* X-ray diffraction peaks from correlated dislocations: Monte Carlo study of the dislocation screening. Acta Crystallographica, A66, 2010, 703-716.

3. *I. A. Shalimova* and *K.K. Sabelfeld.* Elastic 3D half-space with correlated defects on the boundary. Physica A, 2010, vol. 389, N 21, 4436-4449.