

ГАМИЛЬТОНОВА МОДЕЛЬ КОЛЕБАНИЯ МАГНИТНОЙ СТРУНЫ

Лопатина А. А.

научный руководитель д-р физ.-мат. наук Еркаев Н. В.

Сибирский федеральный университет

Равновесные конфигурации магнитного поля в электропроводящей среде характеризуются балансом сил Лоренца и градиента давления. В двумерном случае известны точные аналитические решения, описывающие распределения равновесных компонент магнитного поля и давления среды. На рис. 1 показаны распределения магнитных силовых линий, соответствующих одному из наиболее известных равновесных решений такого рода, полученному Каном.

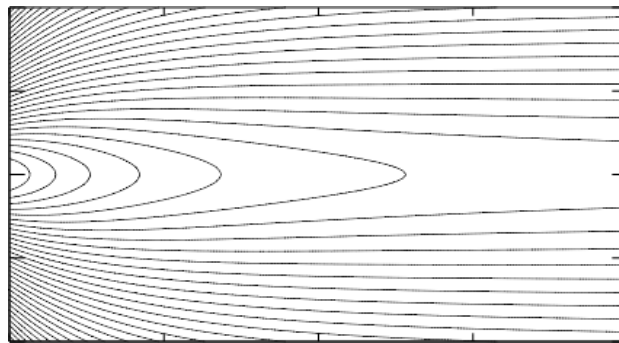


Рисунок 1 – Равновесное состояние силовых линий магнитного поля

Это решение, в частности, применяют для моделирования магнитного поля в хвосте магнитосферы Земли. В случае достаточно высокой электропроводности магнитные силовые линии непосредственно связаны с частицами среды, смещения которых приводят к деформациям силовых линий. Показано, что перемещения тонкого пучка магнитных силовых линий, называемого магнитной трубкой или магнитным филаментом, могут описываться уравнениями магнитной струны:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\rho \partial z}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial \Pi}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\rho \partial x}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial \Pi}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

Уравнения (1) можно записать в форме Гамильтона:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = - \frac{\delta H}{\delta \vec{r}}, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \vec{r}}, \quad (2)$$

где функция Гамильтона выражается интегралом вдоль магнитной силовой линии:

$$H = \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \left(\left(\frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} + \rho \cdot \left(\frac{\partial r}{\partial \alpha} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{K \rho^{(k-1)}}{k-1} + \Pi / \rho \right) d\alpha. \quad (3)$$

здесь α – переменная Лагранжа, меняющая вдоль струны, ρ – плотность вещества, $\frac{\partial r}{\partial t}$ – скорость, K – постоянная, зависящая от температуры, k – адиабатическая постоянная адиабаты, Π – полное фоновое давление, определяемое по известному равновесному состоянию, $r(\alpha)$ – вектор функция, определяющая пространственную конфигурацию магнитной силовой линии.

Перемещения вдоль оси x и z представим в виде суммы:

$$x = x_0(\alpha, t) + x_1(\alpha, t), \quad z = z_0(\alpha, t) + z_1(\alpha, t),$$

где $x_0(\alpha, t)$ и $z_0(\alpha, t)$ начальные невозмущенные координаты, а $x_1(\alpha, t)$ и $z_1(\alpha, t)$ - возмущения, которые находим с помощью разложения в ряды Фурье:

$$z_1(\alpha, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \left[\frac{\pi \cdot (2(k-1) + 1) \cdot \alpha}{2 \cdot \alpha_0} \right],$$

$$x_1(\alpha, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos \left[\frac{\pi \cdot (2(k-1) + 1) \cdot \alpha}{2 \cdot \alpha_0} \right],$$

здесь α_0 - заданный параметр, связанный с длиной рассматриваемого отрезка магнитной силовой линии. Рассматривая режим достаточно медленных колебаний, пренебрегаем изменениями плотности и полагаем $\rho = 1$ в безразмерных переменных.

Для коэффициентов Фурье получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{da_k}{dt} - (2k + 1)^2 \frac{\pi^2}{4 \cdot \alpha_0^2} a_k + \int_{-1}^1 [f_1(x_1, z_1, \alpha) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \alpha \cdot [2k + 1]\right)] d\alpha = 0, \quad (4)$$

$$\frac{db_k}{dt} - (2k + 1)^2 \frac{\pi^2}{4 \cdot \alpha_0^2} b_k + \int_{-1}^1 [f_2(x_1, z_1, \alpha) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \alpha \cdot [2k + 1]\right)] d\alpha = 0, \quad (5)$$

где

$$f_1(x_1, z_1, \alpha) = \frac{\partial \Pi(x_0 + x_1, z_0 + z_1)}{\partial z} - \frac{\partial \Pi(x_0, z_0)}{\partial z_0},$$

$$f_2(x_1, z_1, \alpha) = \frac{\partial \Pi(x_0 + x_1, z_0 + z_1)}{\partial x} - \frac{\partial \Pi(x_0, z_0)}{\partial x_0}.$$

Система уравнений (4, 5) интегрировалась численно с использованием пакета MATHECAD для $N = 10$ при начальных условиях:

$$z_1(\alpha, 0) = A \cdot \cos\left(\alpha \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad a_k = \int_{-1}^1 z_1(\alpha, 0) \cdot \cos\left[\frac{\pi \cdot (2k + 1) \cdot \alpha}{2}\right] d\alpha, \quad b_k = 0. \quad (6)$$

Результаты расчетов представлены на рис. 2, 3.

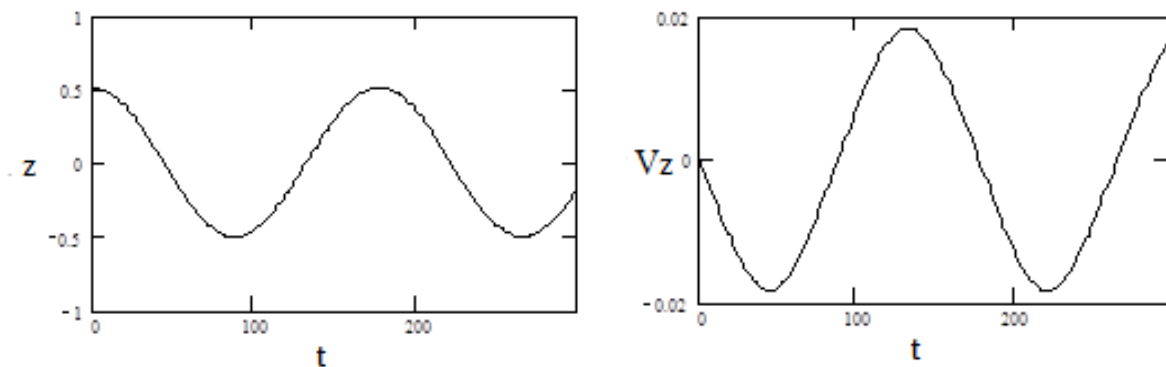


Рисунок 2 – Зависимость координаты (z) и вертикальной скорости (V_z) от времени

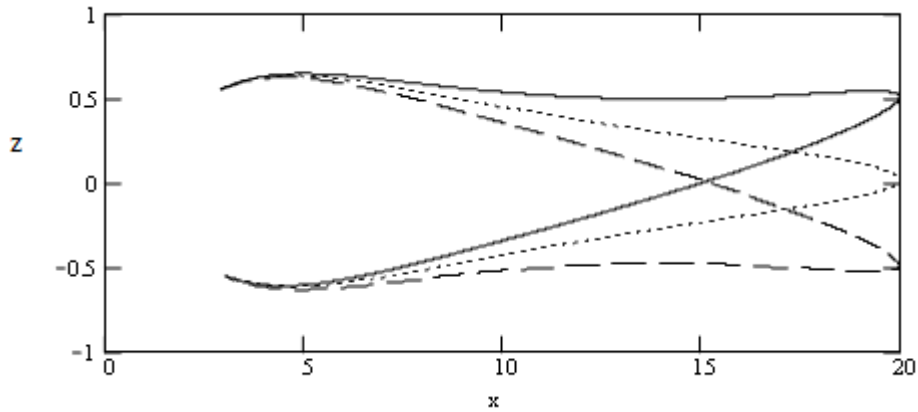


Рисунок 3 – Конфигурации магнитной струны в различных фазах колебаний
 1– при максимальном смещении вверх, 2 – в среднем положении,
 3- при максимальном смещении вниз

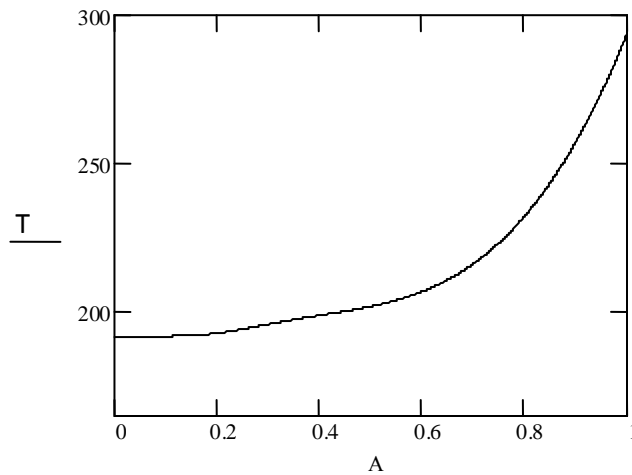


Рисунок 4 – Зависимость периода колебаний T от амплитуды A.

Минимальное значение периода зависит от второй производной полного давления при $z = 0$ и хорошо аппроксимируется простой аналитической формулой:

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2}} = 174 \quad (7)$$

Найденное по графику (рис. 4) значение периода при амплитуде 0,5 равно 177, что довольно близко значению, определяемому формулой (7).

Выводы. На основе Фурье аппроксимации исследованы колебания магнитной струны конечной амплитуды. Построены конфигурации магнитной струны для различных фаз колебаний. Найдена зависимость периода колебаний от амплитуды. Результаты расчетов показывают, что колебания изохронны до амплитуд 0.2. Предложена аналитическая формула для оценки минимального периода. При больших амплитудах начинается заметный рост периода колебаний. Объектом приложения разработанной модели являются так называемые флэппинг колебания, наблюдаемые в хвосте магнитосферы Земли. Модель позволяет интерпретировать имеющиеся наблюдения и дает адекватную оценку периода флэппинг колебаний.