УДК 510.643

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ЛИНЕЙНОЙ ЛОГИКИ ЗНАНИЯ И ВРЕМЕНИ LTK

Лукьянчук А.Н.,
Научные руководители: доктор физ.-мат. наук Рыбаков В. В.,
канд. физ.-мат. наук Римацкий В. В.
Институт Математики Сибирского Федерального Университета

В настоящее время быстро развивается изучение модальных и много-модальных логик, описывающих мыслительные процессы в человеческом сознании и их компьютерное моделирование. Они имеют многочисленные продуктивные приложения в информатике и инженерных исследованиях по представлению, хранению и обработке информации.

Одной из таких логик является много-модальная логика знания и времени LTK (Linear Time and Knowledge), которая совмещает в себе модальности по времени и знанию.

Логика определяется семантически как множество формул, истинных на LTK-фреймах, где LTK-фрейм это много-модальный фрейм Крипке, сочетающий в себе линейное и дискретное представление потока времени и S5-модальность, определенную в каждый момент времени и представляющую знание.

Язык $\mathcal{L}^{LTK}$ состоит из счетного множества пропозициональных переменных $P := \{p_1, \dots, p_n, \dots\}$, стандартных булевых операций и множества модальных операторов $\{\sqcup_T, \sqcup_\sim, \sqcup_i\ (i \in I)\}$. Значение модальных операторов: (a) $\sqcup_T A$ означает, что информация A всегда будет истинна, (в) $\sqcup_\sim A$ означает, что A известна всем в рассматриваемый момент времени, (c) $\sqcup_i A\ (i \in I)$ означает, что информация A верна согласно информации записанной во всех базах данных доступных агенту "i".

Определение 1. k *–модальным фреймом Крипке* называется кортеж $\mathcal{F} := \langle W_\mathcal{F}, R_1, \dots, R_k \rangle$, где $W_\mathcal{F}$ – не пустое множество элементов, и каждое R_i это некоторое бинарное отношение, определенное на $W_\mathcal{F}$.

Определение 2. Дан фрейм Крипке $\mathcal{F} := \langle W_\mathcal{F}, R_1, \dots, R_k \rangle$; для любого отношения R_i, R_i *–сгусток* это подмножество C_{R_i} множества $W_\mathcal{F}$ такое, что $\forall w \forall z \in C_{R_i}\ (wR_iz\ \&\ zR_iw)$ и $\forall z \in W_\mathcal{F}, \forall w \in C_{R_i}\ \ ((wR_iz\ \&\ zR_iw) \Longrightarrow \forall z \in C_{R_i})$. Для любого отношения R_i, $C_{R_i}(w)$ это R_i –сгусток такой, что $\forall w \in C_{R_i}(w)$.

Определение 3. *LTK-фреймом* называется много-модальный фрейм $\mathcal{F} := \langle W_\mathcal{F}, R_T, R_\sim, R_1, \dots, R_k \rangle$, где:

(a) $W_\mathcal{F}$ это объединение не пустых множеств C_n, $\forall n \in \mathbb{N}$: $W_\mathcal{F} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$;

(в) бинарное отношение R_T линейно, транзиривно/интранзитивно, рефлексивно/иррефлексивно;

(c) бинарное отношение $R_\sim$ это универсальное S5-отношение внутри сгустка по времени;

(d) $\forall i, R_i$ – некоторое S5-отношение эквивалентности внутри сгустка по времени.

Мы рассматриваем случай логики LTK, где количество агентов "i" может быть любым, а отношение времени T интранзитивно и рефлексивно.

Определение 4. Дан фрейм Крипке $\mathcal{F}$; *моделью* $M_\mathcal{F}$ *на* $\mathcal{F}$ называется кортеж $M_\mathcal{F} = \langle \mathcal{F}, V \rangle$, где V это означивание множества пропозициональных переменных P на $\mathcal{F}$. То есть, $\forall p \in P\ (\ V(p) \subseteq W_\mathcal{F})$.

Определение 5. Если модель $M = \langle \mathcal{F}, V \rangle$ это модель на фрейме $\mathcal{F}$, то говорят, что *формула A истинна на элементе* $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{M}$, если $(\mathcal{F}, \boldsymbol{w}) \Vdash_V A$; формула *A истинна на модели*

M, обозначается $\mathcal{F} \Vdash_{\Gamma'} A$, если $\forall w \in W_{\mathcal{F}}$, $(\mathcal{F}, w) \Vdash_{\Gamma'} A$; формула A *истинна на фрейме* $\mathcal{F}$, обозначается $\mathcal{F} \Vdash A$, если A истинна на $\mathcal{F}$ при любом означивании V.

Первый важный результат, который был получен, это эффективная финитная аппроксимируемость логики LTK.

Определение 6. Логика L *эффективно финитно аппроксимируема*, если для любой формулы $A \notin L$, существует конечная модель $\langle \mathcal{F}, V \rangle$ такая, что $\mathcal{F} \Vdash_{\Gamma'} B$, для любой формулы $B \in L$, и $\mathcal{F} \nVdash_{\Gamma'} A$. Причем $|W_{\mathcal{F}}| \leq f|A|$, где f — исчислимая функция.

Определение 7. Пусть A — формула в языке логики LTK. *Временная модальная степень* $td(A)$ *формулы* A определяется следующим образом: $td(p) = td(T) = td(\bot) = 0$; $td(\neg\alpha) = td(\alpha)$; $td(\alpha \to \beta) = td(\alpha \wedge \beta) = td(\alpha \vee \beta) = \max\big(td(\alpha), td(\beta)\big)$; $td(\Box_T \alpha) = td(\alpha) + 1$.

Возьмем формулу A такую, что $td(A) = n$ и $A \notin$ LTK. Тогда существует LTK—фрейм $\mathcal{F} \coloneqq \langle W_{\mathcal{F}}, R_T, R_\sim, R_1, \dots, R_k \rangle$, означивание V и элемент $x \in W_{\mathcal{F}}$ такие, что $\langle \mathcal{F}, x \rangle \nVdash_{\Gamma'} A$.

Сократим размер фрейма $\mathcal{F}$, применив к нему стандартный метод фильтрации. Обозначим множество $Sub(A)$ как множество всех подформул формулы A. Определим отношение эквивалентности $\approx$ следующим образом:

$$\forall w \forall z \in W_{\mathcal{F}}\big((w \approx z \Leftrightarrow wR_\sim z \,\&\, zR_\sim w) \,\&\, \forall B \in Sub(A)\ (\mathcal{F}, w) \Vdash_{\Gamma'} B \Leftrightarrow (\mathcal{F}, z) \Vdash_{\Gamma'} B\big).$$

Далее определим классы эквивалентности: $\forall w \in W_{\mathcal{F}}\ ([w] \coloneqq \{z \mid w \approx z\})$ и $\forall n \in \mathbb{N}\ ([C_n] \coloneqq \{[w] \mid w \in C_n\})$. Обозначим $\mathcal{F}_1 \coloneqq \langle W_{\mathcal{F}_1}, R_T^1, R_\sim^1, R_1^1, \dots, R_k^1 \rangle$ как фрейм, в котором:

(а) $W_{\mathcal{F}_1} \coloneqq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [C_n]$;

(б) $[w] R_T^1 [z] \Leftrightarrow wR_T z$;

(в) $[w] R_\sim^1 [z] \Leftrightarrow wR_\sim z$;

(г) $[w] R_i^1 [z] \Leftrightarrow ([w] \in [C_n] \,\&\, [z] \in [C_n] \,\&\, \forall B \in Sub(A)((\mathcal{F}, w) \Vdash_{\Gamma'} \Box_i B \Leftrightarrow (\mathcal{F}, z) \Vdash_{\Gamma'} \Box_i B))$, где $1 \leq i \leq k$.

Обозначим $M_1 \coloneqq \langle \mathcal{F}_1, V_1 \rangle$ как модель на $\mathcal{F}_1$, где V_1 определено следующим образом:

$\forall p \in Sub(A) \qquad V_1(p) \coloneqq \{[w] \mid w \in V(p)\}$.

Описанная модель M_1 является результатом стандартной процедуры фильтрации.

Определим модель $N(C(x), n)$ следующим образом:

$$N(C(x), n) = \langle W_{N(C(x),n)}, R_T, R_\sim, R_1, \dots, R_k, V' \rangle,$$

где $W_{N(C(x),n)} = \{\bigcup_{0 \leq j \leq n} C_j' \colon C_j \in \mathcal{F}_1;\ \forall j\ C_{j-1}' R_T C_j';\ C_j' \cong C_j$ как модели$\}$.

Причем $|N(C(x), n)| \leq (n+1) 2^{|Sub(A)|}$, так как модель $N(C(x), n)$ представляет собой цепь из $n + 1$ R_T —сгустков таких, что $\forall C_j' \in N(C(x), n)$: $|C_j'| \leq 2^{|Sub(A)|}$.

Доказано, что формула A опровергается на конечной модели $N(C(x), n)$. То есть справедлива теорема:

Теорема 1. Логика LTK эффективно финитно аппроксимируема.

Из эффективной финитной аппроксимируемости логики следует ее разрешимость.

Определение 8. Логика L является *разрешимой,* если существует алгоритм, позволяющий распознать, принадлежит ли произвольная формула A логике или нет.

Приведем такой алгоритм для логики LTK:

1. Для любой произвольной формулы A определяем ее временную модальную степень $td(A) = n$.
2. Строим конечные LTK- фреймы $N(C(x), n) = \langle W_{N(C(x),n)}, R_T, R_\sim, R_1, \dots, R_k \rangle$.
3. На этих фреймах рассматриваем все возможные означивания пропозициональных переменных $p_1, \dots, p_m$, входящих в формулу A, чтобы полученные

модели не были попарно изоморфны. Если A истинна на всех таких моделях, то A принадлежит логике LTK. Если существует хотя бы одна модель, на которой A не истинна, то A не принадлежит LTK.

Таким образом, справедлива лемма:

Лемма . Логика LTK разрешима.

Для логики LTK с интранзитивным и иррефлексивным отношением времени T получены аналогичные результаты.