УДК 517.54

Дифференциалы Прима на конечной римановой поверхности

Анна Н.Чичкакова*
Виктор В.Чуешев†
Кемеровский государственный университет,
ул. Красная 6, Кемерово, 650043,
Россия

Получена 15.03.2008, окончательный вариант 25.05.2008, принята 25.06.2008

В [1] построена общая теория мультипликативных (многозначных) функций и дифференциалов Прима на компактных римановых поверхностях. В данной работе начато построение теории дифференциалов Прима на конечной римановой поверхности. Построены все виды элементарных дифференциалов Прима для любых характеров. Доказана конечномерность и найдены размерности двух важных видов фактор-пространств. Как следствие находится размерность первой голоморфной группы когомологий де Рама для несущественных характеров. Во всех этих фактор-пространствах построены явные базисы. Кроме того, получены формулы для мультипликативных функций и мультипликативных единиц для любых характеров на конечной римановой поверхности.

Ключевые слова: мультипликативная функция, дифференциал Прима.

1. Предварительные сведения

Пусть $F' = F\backslash\{P_1, ..., P_n\}$ — поверхность типа $(g, n), n \geqslant 1 g \geqslant 2$. Тогда она имеет алгебраическое представление $\mathbf{\Gamma}' \cong \pi_1(F', O) =< a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g, \gamma_1, \ldots, \gamma_n : \prod\limits_{j=1}^{g}[a_j, b_j] \cdot \gamma_1 \cdots \gamma_n = 1 >$, где $\mathbf{\Gamma}'$ — фуксова группа первого рода, инвариантно действующая в U и униформизирующая поверхность F', т.е. $F' = U/\Gamma'$. Характер ρ на $\mathbf{\Gamma}'$ — это любой гомоморфизм из группы $\mathbf{\Gamma}'$ в мультипликативную группу $\mathbf{C}^*$. Тогда группа всех характеров $\mathrm{Hom}\,(\mathbf{\Gamma}', \mathbf{C}^*) \cong [\mathbf{C}^*]^{\mathrm{2g+n-1}}$ и её подгруппа $\mathrm{Hom}\,(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{C}^*) \cong [\mathbf{C}^*]^{\mathrm{2g}}$, где операция задается обычным умножением, а в группе $[\mathbf{C}^*]^{2g}$ задана операция с помощью покоординатного умножения строк и $F = U/\Gamma$.

Определение 1.1. *Мультипликативным дифференциалом ($(\rho, q)-$дифференциалом Прима) ω порядка $q \geqslant 0$ на F' для ρ называется однозначный дифференциал $\omega(t)dt^q$ на U, удовлетворяющий условию $\omega(Tt)T'(t)^q = \rho(T)\omega(t), T \in \mathbf{\Gamma}', t \in U, q \in \mathbf{N} \cup \{\mathbf{0}\}$.*

Теорема (Абеля для характеров, [2,с.134]). *Пусть D — дивизор на отмеченной компактной римановой поверхности $[F, \{a_1, ..., a_g, b_1, \ldots, b_g\}]$ рода $g \geqslant 1$ и ρ — характер на $\pi_1(F)$. Тогда D будет дивизором мультипликативной функции f на F для характера $\rho \Longleftrightarrow \deg D = 0$ и*

$$\varphi(D) = \frac{1}{2\pi i}\left(\sum_{j=1}^{g}\log\rho(b_j)e^{(j)} - \sum_{j=1}^{g}\log\rho(a_j)\pi^{(j)}\right)(\equiv \psi(\rho))$$

*e-mail: vvchueshev@mail.ru
†e-mail: vvchueshev@mail.ru

в $\mathbf{C}^g$ *по модулю целочисленной решетки* $L(F)$, *порожденной столбцами*

$$e^{(1)}, \ldots, e^{(g)}, \pi^{(1)}, \ldots, \pi^{(g)}$$

матрицы a-периодов и b-периодов канонического базиса $\zeta_1, \ldots, \zeta_g$ *для канонического гомологического базиса на* F, *где* φ *— отображение Якоби для* F.

Характер ρ называется несущественным на $\pi_1(F)$, если $\rho(a_k) = \exp c_k$, $\rho(b_k) = \exp(\sum\limits_{j=1}^{g} c_j \pi_{jk}), c_k \in \mathbf{C}, k = 1, \ldots, g$. Множество таких характеров образуют подгруппу L_g в группе $\mathrm{Hom}\,(\Gamma, \mathbf{C}^*)$. Характер называется существенным, если $\rho \in \mathrm{Hom}\,(\Gamma, \mathbf{C}^*) \backslash \mathrm{L_g}$.

Определение 1.2. *Характер* ρ *на* F' *называется существенным, если* $\rho(a_k) = \exp 2\pi i c_k$, $\rho(b_k) = \exp 2\pi i(\sum\limits_{j=1}^{g} c_j \pi_{jk} + d_k), k = 1, \ldots, g, \rho(\gamma_l) = 1, l = 1, \ldots, n$. *При* $d_k \in \mathbf{Z}, k = 1, \ldots, g$, *характер называется несущественным на* F'.

Определение 1.3. *Дифференциал Прима* ω *на* F' *для характера* ρ *называется мультипликативно точным, если существует мультипликативная функция* f *для* ρ *такая, что* $\omega = df$ *на* F'.

Аналогично, как для абелевых дифференциалов, вводятся дифференциалы Прима первого, второго и третьего родов на F'. При аналитическом продолжении этих дифференциалов на F в проколах могут быть либо устранимые точки (у.о.т.), либо полюса, либо существенно особые точки (с.о.т.). Введем два класса дифференциалов Прима на F' для ρ.

Пространство $A_1(\rho)$ состоит из дифференциалов Прима для ρ на F', которые имеют конечное число полюсов на F' и допускают мероморфное продолжение на F.

Пространство $A_2(\rho)$ состоит из дифференциалов для ρ, имеющих конечное число полюсов на F'и в проколах при аналитическом продолжении могут быть изолированные существенно особые точки. Например, к этому классу принадлежит одноточечная функция Бейкера-Ахиезера на F.

2. Элементарные дифференциалы Прима на конечной римановой поверхности

В этом параграфе будет найден общий вид элементарных (ρ, q)-дифференциалов Прима на F' класса $A_1(\rho)$ первого, второго и третьего рода.

Предложение 2.1. *Дивизор* D *степени* $(2g-2)q$ *является дивизором мероморфного* $(\rho, q)-$*дифференциала* ω *на* F *рода* $g \geqslant 2, q \geqslant 1$ *для характера* ρ, *если и только если* $\varphi(D) = -2Kq + \psi(\rho)$, *где вектор констант Римана* K *зависит от отмечания на* F *и от базисной точки* P_0.

Доказательство. Пусть ω_0 — абелев q-дифференциал на F. Тогда $f = \dfrac{\omega}{\omega_0}$ — мультипликативная функция на F для ρ. По теореме Абеля для характеров имеем равенство $\psi(\rho) = \varphi((f)) = \varphi((\omega)) - \varphi((\omega_0)) = \varphi(D) + 2Kq$.

Обратно, если $\varphi(D) = -2Kq + \psi(\rho), \deg D = (2g-2)q$, то, учитывая равенство $\varphi((\omega_0)) = -2Kq$ на F [2], имеем $\varphi(D) = \varphi((\omega_0)) + \psi(\rho)$. Поэтому $\varphi\left(\dfrac{D}{(\omega_0)}\right) = \psi(\rho)$, и по теореме Абеля существует мультипликативная функция f для ρ на F такая, что $(f) = \dfrac{D}{(\omega_0)}$. Отсюда $\omega = f\omega_0$ будет (ρ, q)-дифференциалом Прима на F с условием $(\omega) = D$. □

Найдем общий вид (ρ, q)-дифференциалов второго рода с единственным полюсом порядка $m \geqslant 2$ на F', где $q \geqslant 1$.

По теореме Римана-Роха для (ρ, q)-дифференциалов на F [1] найдем размерность $i_{\rho,q}\left(\dfrac{1}{Q^m P_1^{k_1}\dots P_n^{k_n}}\right) = \dim_{\mathbf{C}} \Omega_\rho^q\left(\dfrac{1}{Q^m P_1^{k_1}\dots P_n^{k_n}}\right)$, где $k_j \geqslant 0, k_j \in \mathbf{N}, j = 1, \dots, n$. Имеем $i_{\rho,q}(D) = (g-1)(2q-1) - \deg D + r\left(\dfrac{(f)Z^{q-1}}{D}\right)$, где $D = \dfrac{1}{Q^m P_1^{k_1}\dots P_n^{k_n}}, Z^{q-1}$ — канонический класс дивизоров $(q-1)$-дифференциалов на F, f — любая мультипликативная функция для ρ на F. Отсюда $i_{\rho,q}\left(\dfrac{1}{Q^m P_1^{k_1}\dots P_n^{k_n}}\right) = (g-1)(2q-1) + m + k_1 + \dots + k_n \geqslant 3$. Здесь $r\left(\dfrac{(f)Z^{q-1}}{D}\right) = 0$, так как $\deg\left(\dfrac{(f)Z^{q-1}}{D}\right) > 0$ при наших условиях. Действительно, $\deg(f) = 0, \deg Z^{q-1} = (q-1)(2g-2) \geqslant 0$ и $\deg\left(\dfrac{1}{D}\right) \geqslant m > 0$. От противного, если существует функция g для ρ на F с условием $(g) \geqslant Q^m P_1^{k_1}\dots P_n^{k_n}(f)Z^{q-1}$, то $0 = \deg(g) \geqslant \deg(Q^m P_1^{k_1}\dots P_n^{k_n}(f)Z^{q-1}) \geqslant 3$. Противоречие.

Ясно, что $i_{\rho,q}\left(\dfrac{1}{Q^m P_1^{k_1}\dots P_n^{k_n}}\right) = i_{\rho,q}\left(\dfrac{1}{Q^{m-1} P_1^{k_1}\dots P_n^{k_n}}\right) + 1$. Следовательно, существует (ρ, q)-дифференциал $\tau_Q^{(m)}(\rho)$ с полюсом точно порядка m в точке Q на F', т.е. $(\tau_Q^{(m)}(\rho)) = \dfrac{R_1\dots R_N}{Q^m P_1^{k_1}\dots P_n^{k_n}}$ на $F, R_j \neq Q, j = 1, \dots, N$, а значит, $(\tau_Q^{(m)}(\rho)) = \dfrac{R_1\dots R_N}{Q^m}$ на F'.

Такие (ρ, q)-дифференциалы $\omega = \tau_Q^{(m)}(\rho)$ из $A_1(\rho)$ на F' определяются неединственно на F из-за своих нулей и полюсов, т.е. $(\omega) = \dfrac{R_1\dots R_N}{Q^m}\dfrac{1}{P_1^{k_1}\dots P_n^{k_n}}, k_j \geqslant 0, j = 1, \dots, n$. Зафиксируем $k_1, \dots, k_n$, как порядки возможных полюсов в точках $P_1, \dots, P_n$ соответственно. Причем степень $\deg(\omega) = (2g-2)q$ на F. Отсюда следует, что $N = (2g-2)q + m + k_1 + \dots + k_n$.

По предложению 2.1 получаем уравнение

$$\varphi_{P_0}(R_1\dots R_N) - \varphi_{P_0}(Q^m) - \varphi_{P_0}(P_1^{k_1}\dots P_n^{k_n}) = -2Kq + \psi(\rho)$$

в многообразии Якоби $J(F)$. Следовательно,

$$\varphi(R_1\dots R_N) = -2Kq + \varphi(Q^m) + k_1\varphi(P_1) + \dots + k_n\varphi(P_n) + \psi(\rho) = a$$

или

$$\varphi(R_1\dots R_g) = a - \varphi(R_{g+1}\dots R_N).$$

Таким образом, для определения нулей имеем $N - g = m + (2g-2)q - g + k_1 + \dots + k_n \geqslant 2$ свободных параметров, которые можно выбирать произвольно на F'. Решая проблему обращения Якоби, найдем дивизор $R_1\dots R_g$, который будет единственным решением уравнения, если правая сторона не принадлежит W_g^1 [2]. Поэтому дивизор $(\tau_Q^{(m)}(\rho)) = \dfrac{R_1\dots R_g}{Q^m}\dfrac{R_{g+1}\dots R_N}{P_1^{k_1}\dots P_n^{k_n}}$ будет иметь наиболее общий вид дивизоров для (ρ, q)-дифференциалов $\tau_Q^{(m)}(\rho)$ класса $A_1(\rho)$ с единственным полюсом порядка $m \geqslant 2$ на $F' = F\backslash\{P_1, \dots, P_n\}$ для точки $Q \in F'$. Следовательно, доказано

Предложение 2.2. *Для любой точки Q и любого характера ρ на F' типа $(g, n), g \geqslant 2, n \geqslant 1$, и любых $m \geqslant 2, q \geqslant 1$ существует элементарный $(\rho, q)-$дифференциал $\tau_Q^{(m)}(\rho)$ второго* *рода класса $A_1(\rho)$, у которого общий вид дивизора*

$$(\tau_Q^{(m)}(\rho)) = \frac{R_1 \dots R_N}{Q^m} \frac{1}{P_1^{k_1} \dots P_n^{k_n}},$$

где

$$\varphi(R_1 \dots R_g) = -2Kq + \varphi(Q^m) - \varphi(R_{g+1} \dots R_N) + \varphi(P_1^{k_1}) + \dots + \varphi(P_n^{k_n}) + \psi(\rho),$$

$k_j \geqslant 0, j = 1, \dots, n$, *при этом точки* $R_{g+1}, \dots, R_N$ *выбираются произвольно на* F', *и* $N = (2g-2)q + m + k_1 + \dots + k_n$.

Аналогично по теореме Римана-Роха для (ρ, q)-дифференциалов точно с двумя простыми полюсами в Q_1, Q_2 на F имеем $i_{\rho,q}\left(\frac{1}{Q_1 Q_2 P_1^{k_1} \dots P_n^{k_n}}\right) = (g-1)(2q-1) + 2 + k_1 + \dots + k_n \geqslant 3$, так как $\deg((f)Z^{q-1}Q_1Q_2P_1^{k_1} \dots P_n^{k_n}) \geqslant 2 > 0$. Поэтому существуют $(\rho, q)-$дифференциалы τ класса $A_1(\rho)$ с условием $(\tau) \geqslant \frac{1}{Q_1Q_2}$ на F'. Ввиду того, что

$$i_{\rho,q}\left(\frac{1}{Q_2 P_1^{k_1} \dots P_n^{k_n}}\right) = i_{\rho,q}\left(\frac{1}{P_1^{k_1} \dots P_n^{k_n}}\right) + 1$$

и

$$i_{\rho,q}\left(\frac{1}{Q_1 P_1^{k_1} \dots P_n^{k_n}}\right) = i_{\rho,q}\left(\frac{1}{P_1^{k_1} \dots P_n^{k_n}}\right) + 1$$

при $k_1 > 0$, существует (ρ, q)-дифференциал $\tau_{Q_2}(\rho)$ на F' точно с единственным простым полюсом в точке Q_2 и существует (ρ, q)-дифференциал $\tau_{Q_1}(\rho)$ точно с единственным простым полюсом в точке Q_1 на F' соответственно. Наконец, взяв дифференциал $\tau_{Q_1Q_2}(\rho) = c_1\tau_{Q_1}(\rho) + c_2\tau_{Q_2}(\rho), c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$ на F', получим, что существует дифференциал $\tau_{Q_1Q_2}(\rho)$ с простыми полюсами только в точках Q_1, Q_2 на F'.

Найдем общий вид (ρ, q)-дифференциала третьего рода $\omega = \tau_{Q_1Q_2}(\rho)$ точно с двумя простыми полюсами в точках Q_1 и Q_2 для класса $A_1(\rho)$ на $F' : (\omega) = \frac{R_1 \dots R_N}{Q_1Q_2} \frac{1}{P_1^{k_1} \dots P_n^{k_n}}$, где $N = (2g-2)q + k_1 + \dots + k_n + 2$. Следовательно, общий дивизор для ω имеет вид

$$(\omega) = \frac{R_1 \dots R_g}{Q_1Q_2} \frac{R_{g+1} \dots R_N}{P_1^{k_1} \dots P_n^{k_n}},$$

где

$$\varphi(R_1 \dots R_g) = -2Kq + \varphi(Q_1Q_2) - \varphi(R_{g+1} \dots R_N) + k_1\varphi(P_1) + \dots + k_n\varphi(P_n) + \psi(\rho).$$

Дивизор $R_1 \dots R_g$ будет единственным решением уравнения, если правая сторона не принадлежит W_g^1. Таким образом, доказано

Предложение 2.3. *Для любых различных точек Q_1, Q_2 на F' типа $(g, n), g \geqslant 2, n \geqslant 1, q \geqslant 1$ и любого характера ρ на F' существует элементарный (ρ, q)-дифференциал $\tau_{Q_1Q_2}(\rho)$ третьего рода класса $A_1(\rho)$, у которого общий вид дивизора*

$$(\tau_{Q_1Q_2}(\rho)) = \frac{R_1 \dots R_N}{Q_1Q_2} \frac{1}{P_1^{k_1} \dots P_n^{k_n}},$$

где

$$\varphi(R_1 \dots R_g) = -2Kq + \varphi(Q_1Q_2) - \varphi(R_{g+1} \dots R_N) + \varphi(P_1^{k_1}) + \dots + \varphi(P_n^{k_n}) + \psi(\rho),$$

$k_j \geqslant 0$, $j = 1, \dots, n$, *при этом точки* $R_{g+1}, \dots, R_N$ *выбираются произвольно на* F', *и* $N = (2g-2)q + 2 + k_1 + \dots + k_n$.

Замечание 2.1. *При* $q \geqslant 1$ *для описания голоморфных* $(\rho, q)-$*дифференциалов на* F' *класса* $A_1(\rho)$ *необходимо убрать слагаемые* $\varphi(Q)$ *или* $\varphi(Q_1)$ *и* $\varphi(Q_2)$, *которые участвуют в записи уравнений.*

3. Дифференциалы Прима на конечной римановой поверхности

Обозначим через $\Omega^q_\rho(F)$ пространство голоморфных (ρ, q)-дифференциалов на F. Пусть d — размерность $\Omega^q_\rho(F)$. Из [1, с.60] следует, что $d = (2q-1)(g-1)$ при любом характере ρ и $q > 1$; $d = g$ при $q = 1$ и ρ — несущественный; $d = g - 1$ при $q = 1$ и ρ — существенный.

Предложение 3.1. *На* F' *типа* $(g, n), n \geqslant 1, g \geqslant 2$ *образ пространства* $\Omega^q_\rho(F)$ *по отображению вложения* $i : \Omega^q_\rho(F) \longrightarrow \Omega^q_\rho(F')$ *будет* d*-мерным подпространством в бесконечномерном пространстве* $\Omega^q_\rho(F')$.

Доказательство. По теореме Римана-Роха для характеров на компактной поверхности F пространство $\Omega^q_\rho(F)$ будет $d-$мерным комплексным векторным пространством.

Вложение i будет линейным инъективным отображением, а значит, $i(\Omega^q_\rho(F))$ будет d-мерным подпространством. Для доказательства бесконечномерности пространства $\Omega^q_\rho(F')$ применим предложения 2.2 и 2.3 о виде (ρ, q)-дифференциалов из пространства $\Omega^q_\rho(F')$. По замечанию 2.1, оно бесконечномерно даже для голоморфных (ρ, q)-дифференциалов из класса $A_1(\rho)$, так как можно выбирать произвольно натуральные числа $k_1, \dots, k_n$, как порядки полюсов в проколах $P_1, \dots, P_n$. □

Теорема 3.1. *На конечной римановой поверхности* F' *типа* $(g, n), n \geqslant 1, g \geqslant 2$, $\dim \Omega_2(F') \diagup_{\Omega_{2,ex}(F')} = 2g + n - 1$, *где* $\Omega_2(F')$ — *пространство однозначных дифференциалов второго рода с конечным числом полюсов на* F', *которое факторизовано по подпространству всех точных дифференциалов второго рода на* F'.

Доказательство 1. Зададим отображение Φ из пространства $\Omega_2(F') \diagup_{\Omega_{2,ex}(F')}$ на $\mathbf{C}^{2g+n-1}$ по правилу: сопоставим ω его базисные периоды, т.е.

$$\Phi : \omega \longmapsto \left(\int\limits_{a_1} \omega, \dots, \int\limits_{a_g} \omega, \int\limits_{b_1} \omega, \dots, \int\limits_{b_g} \omega, \int\limits_{\gamma_1} \omega, \dots, \int\limits_{\gamma_{n-1}} \omega \right) \in \mathbf{C}^{2g+n-1}.$$

Ядро отображения Φ совпадает с $\Omega_{2,ex}(F')$. Действительно, если все указанные периоды равны нулю, то и

$$\int\limits_{\gamma_n} \omega = 0,$$

а значит, и все остальные периоды тоже равны нулю. Поэтому дифференциал ω будет точным на F' и принадлежит пространству $\Omega_{2,ex}(F')$. Так как отображение Φ взаимно-однозначно и линейно на фактор-пространстве, то $\dim \Omega_2(F') \diagup_{\Omega_{2,ex}(F')} \leqslant 2g + n - 1$.

Докажем обратное неравенство $\dim \Omega_2(F')\big/_{\Omega_{2,ex}(F')} \geqslant 2g+n-1$ и построим базис этого пространства.

Возьмем мероморфные дифференциалы следующего вида:

$$\zeta_1, \ldots, \zeta_g, \tau^{(n_1+1)}_{\widetilde{P}_1}, \ldots, \tau^{(n_g+1)}_{\widetilde{P}_1}, \tau_{P_2P_1}, \ldots, \tau_{P_nP_1}$$

на поверхности F, где числа $n_1, n_2, \ldots, n_g$ — пробелы Вейерштрасса в точке $\widetilde{P}_1$ на F и $\widetilde{P}_1 \in F'$.

Покажем, что классы смежности с такими дифференциалами будут линейно-независимыми над $\mathbf{C}$ на F'. От противного. Предположим, что существует линейная комбинация с ненулевыми комплексными коэффициентами, равная нулевому классу, тогда верно равенство $c_1\zeta_1 + \ldots + c_g\zeta_g + \widetilde{c}_1\tau^{(n_1+1)}_{\widetilde{P}_1} + \ldots + \widetilde{c}_g\tau^{(n_g+1)}_{\widetilde{P}_1} + \widetilde{\widetilde{c}}_1\tau_{P_2P_1} + \ldots + \widetilde{\widetilde{c}}_{n-1}\tau_{P_nP_1} = df$, где df — точный дифференциал второго рода на F' и при аналитическом продолжении с F' на F в проколах он может иметь либо у.о.т., либо полюса, либо с.о.т.

Пусть $\widetilde{\widetilde{c}}_1 \neq 0$, обойдем точку P_2 по малой петле, но тогда выражение слева будет иметь период $\widetilde{\widetilde{c}}_1$, а для правой стороны этот период равен нулю. По-другому, сразу считаем периоды по малым петлям, обходящим отдельно вокруг точек $P_2, \ldots, P_n$, и получаем, что они равны $\widetilde{\widetilde{c}}_1, \ldots, \widetilde{\widetilde{c}}_{n-1}$ соответственно, но для правой части эти периоды равны нулю. Таким образом, $\widetilde{\widetilde{c}}_1 = \ldots = \widetilde{\widetilde{c}}_{n-1} = 0$.

Рассмотрим коэффициент $\widetilde{c}_g$. Если у функции f в точке $\widetilde{P}_1$ при продолжении на F будет единственный полюс порядка n_g на F, то это невозможно из-за пробелов Вейерштрасса в точке $\widetilde{P}_1$, и $\widetilde{c}_g = 0$.

Если df при продолжении с F' на F имеет в одном проколе полюс или с.о.т., например, в проколе P_1, то в P_1 слева и справа различные особые точки и получаем противоречие. Таким образом доказали, что $\widetilde{c}_1 = \ldots = \widetilde{c}_g = 0$.

Теперь рассмотрим коэффициенты $c_1, \ldots, c_g$. Если при аналитическом продолжении df в проколах имеем полюса или с.о.т., то их нет у комбинации $\sum\limits_{j=1}^{g} c_j\zeta_j$ на F. Поэтому f будет голоморфна на F и, значит, f будет константой, $df = 0$. Получили противоречие с линейной независимостью $\zeta_1, \ldots, \zeta_g$ на F. Отсюда $c_1 = \ldots = c_g = 0$. Таким образом доказали, что дифференциалы $\zeta_1, \ldots, \zeta_g, \tau^{(n_1+1)}_{\widetilde{P}_1}, \ldots, \tau^{(n_g+1)}_{\widetilde{P}_1}, \tau_{P_2P_1}, \ldots, \tau_{P_nP_1}$ представляют линейно независимые классы смежности над $\mathbf{C}$ нашего фактор-пространства на F', и его размерность $\geqslant 2g+n-1$.

Следовательно, размерность нашего пространства равна $2g+n-1$ и построен явный базис в фактор-пространстве. □

Доказательство 2. Обозначим через $P_1, \ldots, P_n$ проколы; они фиксированы. Выберем точки $\widetilde{P}_1, \ldots, \widetilde{P}_g$ с условием $i(\widetilde{P}_1 \ldots \widetilde{P}_g) = 0$ или это равносильно тому, что не существует мероморфной функции f на F с такими простыми полюсами. По сравнению с первым доказательством нам нужно только установить нижнюю оценку, т.е. $\dim \Omega_2(F')/_{\Omega_{2,ex}(F')} \geqslant 2g+n-1$. Рассмотрим набор классов смежности дифференциалов $[\zeta_1], \ldots, [\zeta_g], [\tau^{(2)}_{\widetilde{P}_1}], \ldots, [\tau^{(2)}_{\widetilde{P}_g}], [\tau_{P_2P_1}], \ldots, [\tau_{P_nP_1}]$, для которого надо показать линейную независимость над $\mathbf{C}$. Возможно, что точки $\widetilde{P}_1, \ldots, \widetilde{P}_g$ попадут на проколы $P_1, \ldots, P_n$. Тогда придется из списка $\tau^{(2)}_{\widetilde{P}_1}, \ldots, \tau^{(2)}_{\widetilde{P}_g}$ удалить часть этих дифференциалов и, значит, не наберется нужное для нашей оценки число линейно независимых классов.

Применим технику шевеления дивизоров степени g, сделаем так, чтобы эти точки $\widetilde{P}_1, \ldots, \widetilde{P}_g$ ушли с проколов, но при этом по-прежнему составляли неспециальный дивизор.

Известно, что в пространстве F_g (всех целых дивизоров степени g на F) множество всех специальных дивизоров образуют замкнутое подмногообразие положительной комплексной коразмерности. В частности, множество всех неспециальных дивизоров будет открыто и плотно в F_g [2].

Пусть все $\widetilde{P}_1, \ldots, \widetilde{P}_g$ попали в проколы, обозначим их $\widetilde{P}_1 = P_1, \ldots, \widetilde{P}_g = P_g$. Рассмотрим малые фиксированные диски, содержащие эти точки и не пересекающиеся друг с другом, а также не содержащие остальные проколы. Возьмем в этих окрестностях близкие точки $\widetilde{\widetilde{P}}_1, \ldots, \widetilde{\widetilde{P}}_g$, отличные от $\widetilde{P}_1, \ldots, \widetilde{P}_g$ соответственно. Если оказалось, что $i(\widetilde{\widetilde{P}}_1 \ldots \widetilde{\widetilde{P}}_g) \neq 0$, то возьмем фиксированные окрестности этих точек, не содержащие точки $\widetilde{P}_1, \ldots, \widetilde{P}_g$ и лежащие в тех же окрестностях. Тогда, учитывая открытость множества неспециальных дивизоров F_g, возьмем точки $P'_1, \ldots, P'_g$ близкие к $\widetilde{\widetilde{P}}_1, \ldots, \widetilde{\widetilde{P}}_g$ соответственно, для которых уже $i(P'_1 \ldots P'_g) = 0$.

Рассмотрим снова наш список, уже с условием, что $\widetilde{P}_1, \ldots, \widetilde{P}_g$ не попадают ни в один из проколов. Предположим, что линейная комбинация классов смежности $c_1[\zeta_1] + \ldots + c_g[\zeta_g] + \widetilde{c}_1[\tau^{(2)}_{\widetilde{P}_1}] + \ldots + \widetilde{c}_g[\tau^{(2)}_{\widetilde{P}_g}] + \widetilde{\widetilde{c}}_1[\tau_{P_2P_1}] + \ldots + \widetilde{\widetilde{c}}_{n-1}[\tau_{P_nP_1}] = [0] = [df]$, где не все коэффициенты равны нулю. Тогда аналогично, как в первом доказательстве, получим, что $\widetilde{\widetilde{c}}_j = 0, j = 1, \ldots, n-1$.

Теперь рассмотрим коэффициенты $\widetilde{c}_j, j = 1, \ldots, g$. Напомним, что точки $\widetilde{P}_1, \ldots, \widetilde{P}_g$ лежат внутри F'. Если df имеет у.о.т. во всех проколах, то из этого равенства на F следует, что существует мероморфная функция с простыми полюсами в $\widetilde{P}_1, \ldots, \widetilde{P}_g$, но по выбору точек это невозможно.

Если df при продолжении на F имеет хотя бы один полюс или с.о.т., то для комбинации слева эта точка (прокол) не будет особой, а для df она особая. Противоречие. Таким образом, $\widetilde{c}_j = 0, j = 1, \ldots, g$. Аналогично, как в первом доказательстве, получается, что все $c_j = 0, j = 1, \ldots, g$. Таким образом, доказали оценку снизу. $\square$

Пространство $H^1_{hol}(F')$, равное {пространству голоморфных 1−дифференциалов на F'}/{ по подпространству голоморфных точных дифференциалов на F'}, называется первой голоморфной группой когомологий де Рама на F'.

Следствие 3.1 [2]. *На F' типа $(g,n), n \geqslant 1, g \geqslant 2$ размерность $\dim H^1_{hol}(F') = 2g + n - 1$, и существует явный базис классов смежности дифференциалов из этого пространства.*

Обозначим через $\Omega_{2,\rho}(F')$ пространство мероморфных дифференциалов второго рода для характера ρ на F', а через $\Omega_{e,\rho}(F')$ — подпространство всех мультипликативно точных дифференциалов Прима для ρ на F'.

Теорема 3.2. *Пусть F' — конечная риманова поверхность типа*

$$(g,n), n \geqslant 1, g \geqslant 2$$

и ρ — несущественный характер на $F', \rho(\gamma_j) = 1, j = 1, \ldots, n$. Тогда

$$\dim \Omega_{2,\rho}(F') \big/ _{\Omega_{e,\rho}(F')} = 2g + n - 1.$$

Причем существуют базисы дифференциалов Прима для ρ :

$$f_0\zeta_1, \ldots, f_0\zeta_g, f_0\tau^{(n_1+1)}_{\widetilde{P}_1}, \ldots, f_0\tau^{(n_g+1)}_{\widetilde{P}_1}, f_0\tau_{P_2P_1}, \ldots, f_0\tau_{P_nP_1},$$

или

$$f_0\zeta_1, \ldots, f_0\zeta_g, f_0\tau^{(2)}_{\widetilde{P}_1}, \ldots, f_0\tau^{(2)}_{\widetilde{P}_g}, f_0\tau_{P_2P_1}, \ldots, f_0\tau_{P_nP_1},$$

где f_0 — мультипликативная единица для ρ, а числа $n_1, \ldots, n_g$ — пробелы Вейерштрасса в точке $\widetilde{P}_1$ на F и $i(\widetilde{P}_1 \ldots \widetilde{P}_g) = 0$ на F.

Доказательство. Пусть ρ — несущественный характер, тогда существует мультипликативная функция f_0 без нулей и полюсов (мультипликативная единица) для этого характера ρ на F.

Зададим отображение Φ из $\Omega_{2,p}(F')$ в $H^1(\Gamma', \rho)$, сопоставляя дифференциалу ω его класс периодов $[\omega]$. При $\rho \neq 1$ $\dim_{\mathbf{C}} H^1(\Gamma', \rho) = 2g - 2 + n$[1]. Дифференциал ω имеет класс периодов $[\omega] = 0$ в $H^1(\Gamma', \rho)$, если и только если $\omega \in \Omega_{l,p}(F')$. Следовательно, это отображение корректно определено на фактор-пространстве и Φ взаимно-однозначно и линейно. Отсюда $\dim_{\mathbf{C}} H^1(\Gamma', \rho)/\Omega_{l,p}(F') \leqslant 2g - 2 + n$.

Явный базис пространства $\Omega_{2,\rho}(F')\big/_{\Omega_{e,\rho}(F')}$ имеет следующий вид. Дифференциалы $f_0\zeta_1, \ldots, f_0\zeta_g, f_0\tau^{(2)}_{\widetilde{P}_1}, \ldots, f_0\tau^{(2)}_{\widetilde{P}_g}, f_0\tau_{P_2P_1}, \ldots, f_0\tau_{P_nP_1}$ представляют линейно независимые над $\mathbf{C}$ классы смежности в нашем фактор-пространстве. Здесь $\tau^{(2)}_{\widetilde{P}_j}$ — абелев дифференциал второго рода на F точно с единственным полюсом второго порядка в точке $\widetilde{P}_j, j = 1, \ldots, g$, с нулевыми a-периодами. Точки $\widetilde{P}_1, \ldots, \widetilde{P}_g$ выбираются из условия $i(\widetilde{P}_1 \ldots \widetilde{P}_g) = 0$ или $r\left(\dfrac{1}{\widetilde{P}_1 \ldots \widetilde{P}_g}\right) = 1$.

Другой базис в нашем фактор-пространстве для несущественного характера ρ можно выбрать следующим способом в виде

$$f_0\zeta_1, \ldots, f_0\zeta_g, f_0\tau^{(n_1+1)}_{\widetilde{P}_1}, \ldots, f_0\tau^{(n_g+1)}_{\widetilde{P}_1}, f_0\tau_{P_2P_1}, \ldots, f_0\tau_{P_nP_1},$$

где $n_1, \ldots, n_g$ — пробелы Вейерштрасса на F в точке $\widetilde{P}_1$. □

Теорема 3.3. *Пусть*

$$Q_1, Q_2, \ldots, Q_s, s \geqslant 1,$$

попарно различные точки на поверхности F' типа $(g, n), g \geqslant 2, n \geqslant 1$ и ρ — несущественный характер. Тогда

$$\dim_{\mathbf{C}} \Omega_\rho\left(\frac{1}{Q_1 \ldots Q_s}; F'\right) / \Omega_{e,\rho}(1; F') = 2g + n - 1 + s,$$

причем существует базис классов смежности дифференциалов

$$f_0\zeta_1, \ldots, f_0\zeta_g, f_0\tau^{(n_1+1)}_{P_1}, \ldots, f_0\tau^{(n_g+1)}_{P_1}, f_0\tau_{P_2P_1}, \ldots, f_0\tau_{P_nP_1}, f_0\tau_{Q_1P_1}, \ldots, f_0\tau_{Q_sP_1}$$

этого фактор-пространства, где числа $n_1, \ldots, n_g$ — пробелы Вейерштрасса в точке P_1 на F.

Доказательство. Если ρ — несущественный характер на F', то существует мультипликативная единица f_0 для ρ на F'. Тогда имеются изоморфизмы

$$\Omega_\rho\left(\frac{1}{Q_1, \ldots, Q_s}; F'\right) \cong \Omega\left(\frac{1}{Q_1, \ldots, Q_s}; F'\right)$$

и $\Omega_{e,\rho}(1; F') \cong \Omega_e(1; F')$ По [3] получаем, что размерность этого фактор-пространства будет равна $2g + n - 1 + s$.

Явный базис нашего фактор-пространства имеет следующий вид:

$$f_0\zeta_1, \ldots, f_0\zeta_g, f_0\tau^{(n_1+1)}_{P_1}, \ldots, f_0\tau^{(n_g+1)}_{P_1}, f_0\tau_{P_2P_1}, \ldots, f_0\tau_{P_nP_1}, f_0\tau_{Q_1P_1}, \ldots, f_0\tau_{Q_sP_1},$$

где числа $n_1, \dots, n_g$ — пробелы Вейерштрасса в точке P_1 на F. Аналогично, как в теореме 3.1, доказывается, что этот набор представляет линейно независимые классы смежности в нашем фактор-пространстве. □

Обозначим через $H^1_{hol,\rho}(F')$ фактор-пространство пространства голоморфных дифференциалов Прима для ρ на F', факторизованное по подпространству мультипликативно точных голоморфных дифференциалов Прима для ρ на F'. Это есть первая голоморфная группа когомологий де Рама на F' для характера ρ.

Следствие 3.1. *Для F' типа $(g,n), n \geqslant 1, g \geqslant 2$, и несущественного характера ρ верно, что* $\dim_{\mathbf{C}} H^1_{hol,\rho}(F') = 2g+n-1$.

Зададим отображение χ из пространства $\Omega(1;F')$ на $\mathbf{C}^{2g+n-1}$ по правилу:

$$\chi : \omega \to \left(\int_{a_1} \omega, \dots, \int_{a_g} \omega, \int_{b_1} \omega, \dots, \int_{b_g} \omega, \int_{\gamma_1} \omega, \dots, \int_{\gamma_{n-1}} \omega \right).$$

Следствие 3.2 [3]. *На поверхности F' типа $(g,n), g \geqslant 2, n \geqslant 1$, для несущественного характера ρ пространство $\Omega_\rho(1;F') = f_0 \ker \chi \bigoplus f_0 \mathrm{Im}\, \chi$, где ядро $\ker \chi$ — бесконечномерно, а $\mathrm{Im}\, \chi \cong \mathrm{H}^1_{\mathrm{hol}}(\mathrm{F}')$ будет $(2g+n-1)$-мерным подпространством, и $\ker \chi = \Omega_e(1;F')$.*

4. Мультипликативные функции и единицы на конечной римановой поверхности F'

На конечной римановой поверхности F' типа (g,n), $g \geqslant 2, n \geqslant 1$ рассмотрим последовательность

$$Q_1, Q_2, \dots, Q_m, \dots \tag{1}$$

и соответствующую ей последовательность дивизоров $D_0 = 1, D_{j+1} = D_j Q_{j+1}, j = 0, 1, \dots$. Пусть ρ - такой, что $\rho(\gamma_j) = 1, j = 1, .., n$. Поставим последовательность задач.

Задача "j"$(j = 1, 2, \dots)$: существует ли мероморфная функция f для ρ на F', удовлетворяющая условиям $(f) \geqslant \dfrac{1}{D_j}$ и $(f) \not\geqslant \dfrac{1}{D_{j-1}}$? Эквивалентная постановка для задачи "j" : существует ли непостоянная мероморфная функция $f \in L_\rho\left(\dfrac{1}{D_j}\right) \backslash L_\rho\left(\dfrac{1}{D_{j-1}}\right)$, где D — дивизор и $L_\rho(D)$ состоит из всех мероморфных функций для ρ на F, которые кратны D.

На компактной римановой поверхности F рода $g \geqslant 1$ рассмотрим последовательность вида

$$P_1, P_1, \dots, P_1, Q_1, Q_2, \dots, Q_m, \dots. \tag{2}$$

Для неё можно поставить задачу Нётера о мультипликативных пробелах на F.

Теорема 4.1. *На поверхности F' типа (g,n), $g \geqslant 2, n \geqslant 1$ зададим любую фиксированную последовательность* (1). *Тогда для любого натурального числа $s \geqslant 1$ и любого характера ρ на F' существует мероморфная функция $\widetilde{f}$ для ρ на F', такая что $(\widetilde{f}) \geqslant \dfrac{1}{Q_1 \dots Q_s}$ и $(\widetilde{f}) \not\geqslant \dfrac{1}{Q_1 \dots Q_{s-1}}$, т. е. s будет мультипликативным непробелом Нётера для последовательности* (1) *на F' для ρ.*

Доказательство. В последовательности (2) можно взять k_1 точек P_1, где $k_1 \leqslant 2g$. В частности, k_1 можно взять равным n_g (для несущественного характера) и n_{g-1} (для существенного характера), которое является последним мультипликативным пробелом Нётера для последовательности (2) на F. Следовательно, любое число $s \geqslant 1$ будет непробелом Нётера для последовательности (1) на F', так как существует мероморфная функция f для ρ, такая что $(f) \geqslant \dfrac{1}{Q_1 \dots Q_s P_1^{k_1}}$ и $(f) \ngeqslant \dfrac{1}{Q_1 \dots Q_{s-1} P_1^{k_1}}$ на F. Поэтому существует мероморфная функция $\widetilde{f}$ для ρ, такая что $(\widetilde{f}) \geqslant \dfrac{1}{Q_1 \dots Q_s}$ и $(\widetilde{f}) \ngeqslant \dfrac{1}{Q_1 \dots Q_{s-1}}$ на F'. □

Отсюда следует, что теорема Нётера о мультипликативных пробелах неверна для F'.

Следствие 4.1. *На поверхности F' типа (g, n), $g \geqslant 2, n \geqslant 1$, для любой фиксированной точки Q на F', для любого характера ρ и для любого натурального числа $l \geqslant 1$ существует голоморфная функция f для ρ на $F' \backslash Q$, такая что $(f) \geqslant \dfrac{1}{Q^l}$, но $(f) \ngeqslant \dfrac{1}{Q^{l-1}}$ на F'.*

Таким образом, теорема Вейерштрасса о мультипликативных пробелах не имеет места для римановой поверхности с проколами.

Для частного случая $\rho \equiv 1$ эти теоремы являются аналогами теорем Миттаг-Леффлера и Вейерштрасса для открытой поверхности F'. Эти теоремы доказываются с помощью когомологической техники (см., например, [4]) довольно трудно. С помощью нашей техники работы с дивизорами эти теоремы доказываются просто и даже элементарно.

Пусть на F' типа (g, n) задана мультипликативная функция f для любого характера ρ класса $A_1(\rho)$. Тогда она имеет мероморфное продолжение $\widetilde{f}$ для ρ на F с дивизором $(\widetilde{f}) = D = \dfrac{R_1^{\alpha_1} \dots R_m^{\alpha_m}}{Q_1^{\beta_1} \dots Q_s^{\beta_s}} \cdot P_1^{k_1} \dots P_n^{k_n}, k_j \in \mathbf{Z}, j = 1, \dots, n$ на F, где $R_j, Q_k \in F', j = 1, \dots, m, k = 1, \dots, s$, и $0 = \deg D = \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j + \sum\limits_{j=1}^{n} k_j - \sum\limits_{j=1}^{s} \beta_j$.

Рассмотрим однозначный абелев дифференциал

$$\omega(z)dz = \frac{\widetilde{f}'(z)}{\widetilde{f}(z)} dz$$

третьего рода на F с простыми полюсами $R_1, \dots, R_m, Q_1, \dots, Q_s, P_1, \dots, P_n$ и вычетами $\alpha_1, \dots, \alpha_m, -\beta_1, \dots, -\beta_s, k_1, \dots, k_n$ соответственно. Тогда

$$\omega(z)dz = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \tau_{R_j P_0} - \sum_{j=1}^{s} \beta_j \tau_{Q_j P_0} + \sum_{j=1}^{n} k_j \tau_{P_j P_0} + \sum_{j=1}^{g} 2\pi i c_j \zeta_j, \qquad (3)$$

где $c_j \in \mathbf{C}, j = 1, \dots, g, P_0$ не принадлежит $\operatorname{supp} \mathrm{D}$ [1;2]. Отсюда

$$\widetilde{f}(P) = \exp \int\limits_{P_0}^{P} \omega(z)dz$$

на F.

Пусть мультипликативная функция $f \in A_2(\rho)$ на F' типа $(g, n), n \geqslant 1$, т.е. она имеет аналитическое продолжение $\widetilde{f}$ на F, у которого в проколах $P_1, \dots, P_l, 1 \leqslant l \leqslant n$, будут с.о.т., и предположим, что в окрестности $U(P_j)$ функция $f(P) \sim e^{q_j(k_j)(P)}, k_j(P_j) = \infty, q_j$ - некоторые многочлены, $j = 1, \dots, l$, а в проколах $P_{l+1}, \dots, P_n$ возможны либо полюса, либо нули порядков $r_{l+1}, \dots, r_n$ соответственно. Положим $g(P) = \dfrac{f(P)}{\chi_{P_1, \dots, P_l}(P)}$ на F', где $\chi_{P_1, \dots, P_l}(P)$ будет $l-$точечная функция Бейкера-Ахиезера на F с теми же асимптотиками в точках $P_1, \dots, P_l$, как у функции f [5]. Она будет мультипликативной функцией класса $A_1(\rho)$, и её мероморфное продолжение $\widetilde{g}$ имеет дивизор $(\widetilde{g}) = D = \dfrac{R_1^{\alpha_1} \dots R_m^{\alpha_m}}{Q_1^{\beta_1} \dots Q_s^{\beta_s}} \cdot P_{l+1}^{r_{l+1}} \dots P_n^{r_n}, r_j \in$

$\mathbf{Z}, j = l+1,\ldots,n$ на F. Тогда $0 = \deg D = \sum\limits_{j=1}^{m}\alpha_j - \sum\limits_{j=1}^{s}\beta_j + \sum\limits_{j=l+1}^{n} r_j$. Дифференциал $\omega(z)dz = \dfrac{\widetilde{g}'(z)}{\widetilde{g}(z)}dz$ будет абелевым дифференциалом третьего рода с простыми полюсами $R_1,\ldots,R_m,Q_1,\ldots,Q_s,P_{l+1},\ldots,P_n$, и

$$\omega(z)dz = \sum_{j=1}^{m}\alpha_j\tau_{R_jP_0} - \sum_{j=1}^{s}\beta_j\tau_{Q_jP_0} + \sum_{j=l+1}^{n} r_j\tau_{P_jP_0} + \sum_{j=1}^{g}2\pi i c_j\zeta_j, \tag{4}$$

где $c_j \in \mathbf{C}, j = 1,\ldots,g$. Таким образом, доказано утверждение.

Теорема 4.2. *Мультипликативная функция f на F' типа $(g,n), g \geqslant 2, n \geqslant 1$ для любого характера $\rho, \rho(\gamma_j) = 1, j = 1,\ldots,n$, имеет представление:*

1) $\widetilde{f}(P) = \exp\int\limits_{P_0}^{P}\omega(z)dz$, где $\omega(z)dz$ задана формулой (3) для f из класса $A_1(\rho)$ на F';

2) $\widetilde{f}(P) = \chi_{P_1,\ldots,P_l}(P)\exp\int\limits_{P_0}^{P}\omega(z)dz$, где $\omega(z)dz$ задается формулой (4) для f из класса $A_2(\rho)$ на F', где $1 \leqslant l \leqslant n$, которая имеет асимптотики вида $e^{q_j(k_j)(P)}$ в $U(P_j), j = 1,\ldots,l$. Здесь $\widetilde{f}$ — мероморфное продолжение f с F' на F и $\chi_{P_1,\ldots,P_l}(P)$ — l-точечная функция Бейкера-Ахиезера на F.

Построим мультипликативные единицы на F' типа $(g,n), n \geqslant 2$ для $\rho \in \mathrm{Hom}\,(\Gamma', \mathbf{C}^*)$. Для искомой мультипликативной единицы f с некоторым характером ρ на F' можно проколы $P_1,\ldots,P_s$ объявить «нулями», а остальные проколы $P_{s+1},\ldots,P_n$ «полюсами» при $n \geqslant s \geqslant 2$. Например, для $n = 2$, наряду с дивизором $\dfrac{P_1}{P_2}$, связанным с проколами, можно брать дивизоры $\dfrac{P_1^m}{P_2^m}$, $m \geqslant 2$.

Возьмем общий дивизор $D = \dfrac{P_1^{m_1}\ldots P_s^{m_s}}{P_{s+1}^{m_{s+1}}\ldots P_n^{m_n}}, m_j \in \mathbf{N}, j = 1,\ldots,n$, с условием $\sum\limits_{k=1}^{s} m_k = \sum\limits_{k=s+1}^{n} m_k$, т.е. $\deg D = 0$, и построим мультипликативную функцию f на F вида

$$f = \exp\int_{P_0}^{P}\left(\sum_{j=1}^{s} m_j\tau_{P_jP_0} - \sum_{j=s+1}^{n} m_j\tau_{P_jP_0} + \sum_{j=1}^{g}2\pi i c_j\zeta_j\right)$$

для некоторого характера и $(f) = D$ на F, где P_0 не принадлежит supp D.

После выкалывания проколов $P_1,\ldots,P_n$ мультипликативная функция на F' будет мультипликативной единицей, где характер определяется по формуле

$$\rho_f(a_k) = \exp 2\pi i c_k, \rho_f(b_k) = \exp\left[2\pi i\sum_{j=1}^{g} c_j\pi_{jk} + 2\pi i\left(\sum_{j=1}^{s} m_j\int_{P_0}^{P_j}\zeta_k - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \sum_{j=s+1}^{n} m_j\int_{P_0}^{P_j}\zeta_k\right)\right],\ k = 1,\ldots,g,\ \rho_f(\gamma_l) = \exp(\pm 2\pi i m_l) = 1, l = 1,\ldots,n, \tag{5}$$

т.е. $\rho = \rho_f \in \mathrm{Hom}\,(\Gamma, \mathrm{C}^*)$. По теореме Абеля для характеров $\psi(\rho_f) = \varphi_{P_0}(D)$ в $J(F)$.

Рассмотрим два случая: а) $\psi(\rho) = \varphi_{P_0}(D) \equiv 0$ в $J(F)$; б) $\psi(\rho) \equiv \varphi_{P_0}(D) \neq 0$ в $J(F)$ для F.

а) Если $\psi(\rho) \equiv 0 \equiv \varphi_{P_0}(D)$ в $J(F)$, то $\rho = \rho_f$ - несущественный характер на F', определенный по формуле (5). Это означает, что $\varphi(D) \equiv \sum\limits_{j=1}^{s} m_j\varphi(P_j) - \sum\limits_{j=s+1}^{n} m_j\varphi(P_j) = \{(\sum\limits_{j=1}^{s} m_j \int\limits_{P_0}^{P_j} \zeta_k - \sum\limits_{j=s+1}^{n} m_j \int\limits_{P_0}^{P_j} \zeta_k) : k = 1, \ldots, g\} \in \mathbf{Z}^g$ и числа $m_1, \ldots, m_n \in \mathbf{N}$ уже выбраны с условием $\deg D = 0$. По теореме Абеля эти два условия равносильны тому, что D — дивизор некоторой однозначной мероморфной функции f_0 на F, т.е. $(f_0) = D$. Функция $\widetilde{f_0} = \dfrac{f}{f_0}$ будет иметь несущественный характер ρ на F, так как $(\widetilde{f_0}) = \dfrac{(f)}{(f_0)} = 1$. Поэтому $\widetilde{f_0}$ — мультипликативная единица на F для несущественного ρ. Таким образом, доказано утверждение.

Предложение 4.1. *На $F' = F\backslash\{P_1, \ldots, P_n\}$ типа $(g, n), n \geqslant s \geqslant 2$ для любого дивизора $D = \dfrac{P_1^{m_1} \ldots P_s^{m_s}}{P_{s+1}^{m_{s+1}} \ldots P_n^{m_n}}$ (ассоциированного с проколами) такого, что $\deg D = 0, \varphi_{P_0}(D) = 0$ существует мультипликативная единица f для несущественного характера ρ на $F', \psi(\rho) = \varphi_{P_0}(D) = 0$ в $J(F)$, которая представляется в виде $f = f_0 \cdot \widetilde{f_0}$, где $\widetilde{f_0}$ — мультипликативная единица для ρ на F, и f_0 — однозначная мероморфная функция с дивизором $(f_0) = D$ на F.*

б) Если $\varphi(D) = \sum\limits_{j=1}^{s} m_j\varphi(P_j) - \sum\limits_{k=s+1}^{n} m_j\varphi(P_k)$ не принадлежит $\mathbf{Z}^g$ для натуральных чисел $m_1, \ldots, m_n$ с условием $m_1 + \ldots + m_s - m_{s+1} - \ldots - m_n = 0$, то характер ρ, удовлетворяющий (5), будет существенным на F.

По теореме Абеля для характеров из $0 \neq \varphi_{P_0}(D) \equiv \psi(\rho)$ следует, что существует f_0 — мультипликативная функция для существенного характера ρ на F с $(f_0) = D$. Поэтому существует мультипликативная единица f_0 на F' для ρ. Если f — другая такая мультипликативная единица на F', то $\widetilde{f_0} = \dfrac{f}{f_0}$ будет однозначной голоморфной функцией на F. Поэтому $f = cf_0$ на $F', c \neq 0$. Таким образом, доказано утверждение.

Предложение 4.2. *На $F' = F\backslash\{P_1, \ldots, P_n\}$ типа $(g, n), n \geqslant 2$ для любого дивизора $D = \dfrac{P_1^{m_1} \ldots P_s^{m_s}}{P_{s+1}^{m_{s+1}} \ldots P_n^{m_n}}$ такого, что $\deg D = 0, \varphi_{P_0}(D) \neq 0$, существует мультипликативная единица f_0 на F' с существенным характером $\rho, 0 \neq \varphi_{P_0}(D) = \psi(\rho)$ в $J(F)$, и $(f_0) = D$ на F, которая определяется с точностью до умножения на ненулевую константу.*

Замечание 4.1. *Мультипликативные функции f_m с дивизорами $D = \dfrac{P_1^m}{P_2^m}$ при различных m имеют разные порядки полюсов в точке P_2. Следовательно, получаем бесконечное семейство мультипликативных единиц f_m, линейно независимых над $\mathbf{C}$, но, возможно, имеющих различные характеры на F'.*

Первый автор был поддержан грантом РФФИ, проект 07-01-90810-моб.ст.; второй автор был поддержан грантом СФУ по НМ проект №45.2007

Список литературы

[1] В.В.Чуешев, Мультипликативные функции и дифференциалы Прима на переменной компактной римановой поверхности, Часть 2, Кемерово, КемГУ, 2003.

[2] H.M.Farkas, I.Kra, Riemann Surfaces. *Graduate Texts in Mathematics*, **71**(1992), Springer-Verlag.

[3] А.Н.Чичкакова, В.В.Чуешев, Мероморфные дифференциалы и функции на конечной римановой поверхности, Международная конференция «Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения», Новосибирск, НГУ, 2007, 11.

[4] О.Форстер, Римановы поверхности, М., Мир, 1980.

[5] Б.А.Дубровин, Римановы поверхности и нелинейные уравнения, Москва-Ижевск, РХД, 2001.

Prym Differentials on a Finite Riemann Surface

Anna N.Chichkakova
Viktor V.Chueshev

V.V.Chueshev has constructed a general theory of multiplicative (multi-valued) functions and Prym differentials on a compact Riemann surface. In this article we begin to construct the theory of Prym differentials on a finite Riemann surface. Explicit forms of all elementary Prym differentials for every characters are given. We find the dimensions of two important factor spaces of Prym differentials and the dimension of the first holomorphic de Rham cohomology group of Prym differentials for unessential characters. Moreover we give explicit bases in these factor spaces. We also give formulae for multiplicative functions and multiplicative units for every characters on finite Riemann surfaces.

Keywords: multiplicative function, Prym differential