Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2008, 1(3) 318-323

УДК 512.45

Группа автоморфизмов кольца $\mathbf{ZD_{12}}$

Ася М.Попова*
Новосибирский государственный технический университет,
пр. Карла Маркса, 20, Новосибирск, 630092,
Россия

Получена 10.03.2008, окончательный вариант 15.05.2008, принята 15.06.2008

Описывается строение группы автоморфизмов целочисленного группового кольца диэдральной группы D_{12} порядка 12.

Ключевые слова: групповое кольцо, единицы, автоморфизмы.

При изучении строения групп единиц целочисленных групповых колец конечных групп удобным оказалось использование теории представлений групп. На этом пути автором с соавторами было описано строение групп единиц следующих целочисленных групповых колец: $ZS_3, ZA_4, ZD_{12}, ZS_4, ZSL_2(3), ZA_5, ZS_5, ZA_6$ ([1]–[5]). Но оказалось, что на этом же пути возможно изучать группы автоморфизмов целочисленных групповых колец. Идея состоит в том, чтобы находить автоморфизмы групповых колец как линейные операторы, заданные на аддитивном базисе группового кольца. Первый результат получен для кольца ZS_3. На основе этого результата в данной работе рассматривается группа $\mathrm{Aut}\,\mathrm{ZD}_{12}$ автоморфизмов группового кольца диэдральной группы D_{12} порядка 12.

Напомним, что мы пользуемся следующим клеточно-диагональным представлением конечной группы G. Пусть $T_1, \ldots, T_s$ — все неприводимые неэквивалентные представления конечной группы G, тогда рассмотрим клеточно-диагональное представление $D(G) = \mathrm{diag}\,(\mathrm{T_1}, \ldots, \mathrm{T_s})$. Так как при этом, очевидно, $ZG \cong ZD(G)$, то все вычисления проводятся с $ZD(G)$. Группа D_{12} имеет 4 одномерных и 2 двумерных представления. Если каждую матрицу представления $D(D_{12})$ "растянуть" в столбец, а затем полученный из таких столбцов аддитивный базис кольца $ZD(D_{12})$ привести к нижнетреугольному виду, то получим следующее удобное представление кольца $ZD(D_{12})$ как целочисленной линейной оболочки следующего набора матриц.

$$e = \begin{pmatrix} 1 &&&&&&& \\ & 1 &&&&&& \\ && 1 &&&&& \\ &&& 1 &&&& \\ &&&& 1 & 0 && \\ &&&& 0 & 1 && \\ &&&&&& 1 & 0 \\ &&&&&& 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 0 &&&&&&& \\ & -2 &&&&&& \\ && 0 &&&&& \\ &&& -2 &&&& \\ &&&& 0 & 0 && \\ &&&& -1 & 1 && \\ &&&&&& 0 & 0 \\ &&&&&& -1 & 1 \end{pmatrix},$$

*e-mail: algebra@nstu.ru

$$b = \begin{pmatrix} 0 &&&&&&& \\ & 0 &&&&&& \\ && 2 &&&&& \\ &&& 2 &&&& \\ &&&& 0 & 0 && \\ &&&& 0 & 0 && \\ &&&&&& 2 & 0 \\ &&&&&& 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 &&&&&&& \\ & 0 &&&&&& \\ && 0 &&&&& \\ &&& -4 &&&& \\ &&&& 0 & 0 && \\ &&&& 0 & 0 && \\ &&&&&& 0 & 0 \\ &&&&&& -2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 &&&&&&& \\ & 0 &&&&&& \\ && 0 &&&&& \\ &&& 0 &&&& \\ &&&& -1 & 1 && \\ &&&& -1 & 1 && \\ &&&&&& -1 & 1 \\ &&&&&& -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 &&&&&&& \\ & 0 &&&&&& \\ && 0 &&&&& \\ &&& 0 &&&& \\ &&&& 0 & -3 && \\ &&&& 0 & 0 && \\ &&&&&& 0 & -3 \\ &&&&&& 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$e_1e_2 = \begin{pmatrix} 0 &&&&&&& \\ & 0 &&&&&& \\ && 0 &&&&& \\ &&& 0 &&&& \\ &&&& 0 & 3 && \\ &&&& 0 & 3 && \\ &&&&&& 0 & 3 \\ &&&&&& 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad e_2e_1 = \begin{pmatrix} 0 &&&&&&& \\ & 0 &&&&&& \\ && 0 &&&&& \\ &&& 0 &&&& \\ &&&& 3 & -3 && \\ &&&& 0 & 0 && \\ &&&&&& 3 & -3 \\ &&&&&& 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 0 &&&&&&& \\ & 0 &&&&&& \\ && 0 &&&&& \\ &&& 0 &&&& \\ &&&& 0 & 0 && \\ &&&& 0 & 0 && \\ &&&&&& -2 & 2 \\ &&&&&& -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 0 &&&&&&& \\ & 0 &&&&&& \\ && 0 &&&&& \\ &&& 0 &&&& \\ &&&& 0 & 0 && \\ &&&& 0 & 0 && \\ &&&&&& 0 & -6 \\ &&&&&& 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{2}f_1f_2 = \begin{pmatrix} 0 &&&&&&& \\ & 0 &&&&&& \\ && 0 &&&&& \\ &&& 0 &&&& \\ &&&& 0 & 0 && \\ &&&& 0 & 0 && \\ &&&&&& 0 & 6 \\ &&&&&& 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2}f_2f_1 = \begin{pmatrix} 0 &&&&&&& \\ & 0 &&&&&& \\ && 0 &&&&& \\ &&& 0 &&&& \\ &&&& 0 & 0 && \\ &&&& 0 & 0 && \\ &&&&&& 6 & -6 \\ &&&&&& 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку строение группы $\mathrm{Aut}\,\mathrm{ZD}(\mathrm{D}_{12})$ целиком опирается на строение группы $\mathrm{Aut}\,\mathrm{ZD}(\mathrm{S}_3)$, приведем представление кольца $ZD(S_3)$, обозначив сходные элементы теми же буквами со значком $\sim$:

$$ZD(S_3) = \left\{ \widetilde{e} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \widetilde{a} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & -2 & & \\ & & 0 & 0 \\ & & -1 & 1 \end{pmatrix}, \ \widetilde{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & -1 & 1 \\ & & -1 & 1 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. \widetilde{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & -3 \\ & & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \widetilde{e}_1\widetilde{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & 3 \\ & & 0 & 3 \end{pmatrix}, \ \widetilde{e}_2\widetilde{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 3 & -3 \\ & & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}_Z .$$

В кольце $ZD(D_{12})$ рассмотрим подкольцо $K = \{e, a, e_1, e_2, e_1e_2, e_2e_1\}_Z \cong ZD(S_3)$. K является характеристическим подкольцом кольца $ZD(D_{12})$, так как выдерживает все автоморфизмы этого кольца. Действительно, пусть $\varphi \in \mathrm{Aut\,ZD(D_{12})}$. На одномерных клетках матриц $e, a, e_1, e_2, e_1e_2, e_2e_1$ φ является тождественным, а это означает, что $\varphi(a) = a + x$, где x не содержит в качестве слагаемых ни b, ни c, аналогично $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_1e_2), \varphi(e_2e_1)$ тоже не содержат в качестве слагаемых ни b, ни c. Так как φ является автоморфизмом, т.е. не может ненулевой элемент перевести в нулевой, то $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_2e_1)$ не могут содержать в качестве слагаемых $f_1, f_2, \frac{1}{2}f_1f_2, \frac{1}{2}f_2f_1$. Поэтому любой автоморфизм кольца $ZD(D_{12})$ задает автоморфизм на K и $\mathrm{Aut\,K} \cong \mathrm{Aut\,Z(S_3)}$. Отсюда следует, что любой автоморфизм φ кольца $ZD(D_{12})$ на элементах $e, a, e_1, e_2, e_1e_2, e_2e_1$ действует только как автоморфизм из $\mathrm{Aut\,ZD(S_3)}$.

Теперь рассмотрим идеалы I_1 и I_2, порожденные в кольце $ZD(D_{12})$ элементами b и $(2e - b)$:

$$I_1 = (b) = b \cdot K = \{b, ba = c, be_1 = f_1, be_2 = f_2, be_1e_2 = \frac{1}{2}f_1f_2, be_2e_1 = \frac{1}{2}f_2f_1\}_Z,$$

$$I_2 = (2e - b) = (2e - b)K = \{2e - b, (2e - b)e_1, ..., (2e - b)e_2e_1\}_Z.$$

Понятно, что $I_1 \cap I_2 = \{0\}, I = I_1 \oplus I_2$ является характеристическим.

Рассмотрим действие $\chi \in \mathrm{Aut\,ZD(D_{12})}$ на этих идеалах. Пусть $x = b\widetilde{x} \in I_1, y = (2e-b)\widetilde{y} \in I_2$, где $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in K$. Тогда $\chi(x) = \chi(b\widetilde{x}) = \chi(b)\chi(\widetilde{x}) = b\chi(\widetilde{x}), \chi(y) = \chi((2e-b)\widetilde{y}) = \chi(2e-b)\chi(\widetilde{y}) = (2e - b)\chi(\widetilde{y})$. Но на $\widetilde{x}$ и $\widetilde{y}$ действие χ совпадает с действием автоморфизма из $\mathrm{Aut\,ZD(S_3)}$, поэтому на $I = I_1 \oplus I_2$ действует только прямое произведение $\mathrm{Aut\,ZD(S_3)} \times \mathrm{Aut\,ZD(S_3)}$, задаваемое равенством

$$\langle \varphi, \psi \rangle (x + y) = \varphi(x) + \psi(y).$$

Таким образом, для нахождения автоморфизмов кольца $ZD(D_{12})$ нужно понять, какие пары $\langle \varphi, \psi \rangle$ продолжаются до автоморфизма всего кольца. Достаточно понять это на элементах $a, e_1, e_2, e_1e_2, e_2e_1$, так как остальные элементы аддитивного базиса лежат в I.

Представим a следующим образом:

$$a = \frac{1}{2}ba + \frac{1}{2}(2e - b)a.$$

Тогда $\langle \varphi, \psi \rangle (a) = \frac{1}{2}\varphi(ba) + \frac{1}{2}\psi((2e-b)a) = \frac{1}{2}b\varphi(a) + \psi(a) - \frac{1}{2}b\psi(a) = \psi(a) + \frac{1}{2}b(\varphi(a) - \psi(a))$. Так как $\frac{1}{2}b \notin ZD(D_{12})$, то для того, чтобы $\langle \varphi, \psi \rangle (a) \in ZD(D_{12})$, необходимо и достаточно, чтобы слагаемое $\frac{1}{2}(\varphi(a)-\psi(a))$ разлагалось по аддитивному базису $ZD(D_{12})$ с целыми коэффициентами. То есть, если $\varphi(a)=a+\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\alpha_3e_1e_2+\alpha_4e_2e_1, \psi(a)=a+\beta_1e_1+\beta_2e_2+\beta_3e_1e_2+\beta_4e_2e_1$ (см. [6]), то отсюда следует, что $\alpha_i\equiv\beta_i(\mathrm{mod}\,2), \mathrm{i}=1,...,4$, и, следовательно, $\varphi(a)\equiv\psi(a)(\mathrm{mod}\,2\mathrm{ZD}(\mathrm{S}_3))$. Аналогично для остальных элементов e_1, e_2, e_1e_2, e_2e_1. Из этих рассуждений вытекает

Лемма 1. *Автоморфизм идеала I, задаваемый парой $\langle\varphi,\psi\rangle$, продолжается до автоморфизма всего кольца $ZD(D_{12})$ тогда и только тогда, когда $\varphi(x)\equiv\psi(x)(\mathrm{mod}\,2\mathrm{K})$ для любого $x\in K$.*

Обозначим через $H\subset\mathrm{Aut}\,\mathrm{ZD}(\mathrm{S}_3)$ подгруппу таких автоморфизмов σ, что $\sigma(x)\equiv x(\mathrm{mod}\,2\mathrm{ZD}(\mathrm{S}_3))$. Тогда по лемме 1 пара $\langle\varphi,\psi\rangle$ продолжается до автоморфизма всего кольца $ZD(D_{12})$ тогда и только тогда, когда $\psi=\varphi\sigma$, где $\sigma\in H$. Из разложения x по аддитивному базису кольца $ZD(D_{12})$ очевидно, что $x=x'+x_1$, где $x'\in K, x_1\in I_1$. Поэтому действие $\sigma\in H$ можно определить на x следующим образом: $\sigma(x)=\sigma(x')+\sigma(x_1)=x'+x''+\sigma(x_1)=x'+x_1-x_1+x''+\sigma(x_1)=x+bx_1^\sigma+(2e-b)x_2^\sigma$, где $x_1^\sigma, x_2^\sigma\in K$. Определим действие пары $\langle\varphi,\varphi\sigma\rangle$ на x по формуле:

$$\langle\varphi,\varphi\sigma\rangle(x)=\varphi(x)+(2e-b)\varphi(x_2^\sigma). \tag{1}$$

Здесь $(2e-b)x_2^\sigma=\frac{1}{2}(2e-b)(\sigma(x)-x)$. Непосредственными вычислениями нетрудно проверить, что (1) задает автоморфизм на $ZD(D_{12})$, при этом пары перемножаются обычным образом: $\langle\varphi,\varphi\sigma\rangle\cdot\langle\psi,\psi\tau\rangle=\langle\varphi\psi,\varphi\psi\sigma'\tau\rangle$, где $\sigma\psi=\psi\sigma'$ в силу нормальности H. Так что $\langle\varphi,\varphi\sigma\rangle=\langle\varphi,\varphi\rangle\cdot\langle 1,\sigma\rangle$.

Рассмотрим две подгруппы прямого произведения $\mathrm{Aut}\,\mathrm{ZD}(\mathrm{S}_3)\times\mathrm{Aut}\,\mathrm{ZD}(\mathrm{S}_3)$:

$A=\{\langle\varphi,\varphi\rangle,\varphi\in\mathrm{Aut}\,\mathrm{ZD}(\mathrm{S}_3)\}$,

$B=\{\langle 1,\sigma\rangle,\sigma\in H\}$.

Понятно, что B — нормальная подгруппа и $A\cap B=\{\langle 1,1\rangle\}$. Нами получена

Теорема 1. $\mathrm{Aut}\,\mathrm{ZD}(\mathrm{D}_{12})\cong\mathrm{B}\leftthreetimes\mathrm{A}$, *где $A\cong\mathrm{Aut}\,\mathrm{ZD}(\mathrm{S}_3)$, B изоморфна подгруппе автоморфизмов из* $\mathrm{Aut}\,\mathrm{ZD}(\mathrm{S}_3)$*, тождественных по модулю $2ZD(S_3)$.*

В [6] показано, что $\mathrm{Aut}\,\mathrm{ZS}_3=\mathrm{Inn}\,\mathrm{ZS}_3$. Интересно сравнить аналогичные группы и для кольца ZD_{12}. Для этого удобно рассмотреть представления обеих групп матрицами одинаковой размерности над одним и тем же кольцом. У нас это будут матрицы порядка 2 над кольцом целых чисел. Для понимания дальнейшего напомним определение гомоморфизма Минковского:

$$\varphi_m: GL_n(Z)\longrightarrow GL_n(Z_m), \tag{2}$$

где Z_m — кольцо вычетов по модулю m.

Из [1] следует, что $V(ZD(D_{12}))=H\leftthreetimes D(D_{12})$, где $H\subset GL_2(Z)\times GL_2(Z)$ и $|H/\mathrm{Ker}\,\varphi_6\times\mathrm{Ker}\,\varphi_6|=18$. Группа внутренних автоморфизмов изоморфна фактор-группе по центру. Центр $V(ZD(D_{12}))$ совпадает с центром D_{12} и изоморфен циклической группе второго порядка, а фактор-группа D_{12} по центру изоморфна S_3. Отсюда получаем, что $\mathrm{Inn}\,\mathrm{ZD}(\mathrm{D}_{12})\cong\mathrm{H}\leftthreetimes\mathrm{D}(\mathrm{S}_3)$.

В [6] показано, что $\mathrm{Aut}\,\mathrm{ZD}(\mathrm{S}_3)\cong$

$$\cong \text{гр}\left(r = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, s = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \operatorname{Ker}\varphi_3 \leftthreetimes \mathrm{D(S_3)}.$$

Тогда из теоремы 1 следует, что

$$\operatorname{Aut}\mathrm{ZD(D_{12})} \cong (\{\langle\varphi,\varphi\rangle,$$
$$\varphi \in \operatorname{Ker}\varphi_3\} \leftthreetimes \{\langle 1,\sigma\rangle, \sigma \in \operatorname{Aut}\mathrm{ZD(S_3)} \cap \operatorname{Ker}\varphi_2\}) \leftthreetimes \mathrm{D(S_3)} = \mathrm{N} \leftthreetimes \mathrm{D(S_3)}$$

Для сравнения с $\operatorname{Inn}\mathrm{ZD(D_{12})}$ найдем $|N \diagup \operatorname{Ker}\varphi_6 \times \operatorname{Ker}\varphi_6|$.

Легко показать, что $\operatorname{Ker}\varphi_3 = \text{гр}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right)$, откуда вычисляется, что $\operatorname{Ker}\varphi_3 \diagup \operatorname{Ker}\varphi_6 \cong \mathrm{S_3}$ и $|\operatorname{Ker}\varphi_3 \diagup \operatorname{Ker}\varphi_6| = 6$. Также нетрудно посчитать, что

$$(\operatorname{Ker}\varphi_3 \leftthreetimes \mathrm{D(S_3)}) \cap \operatorname{Ker}\varphi_2 = \text{гр}\left(\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}, \operatorname{Ker}\varphi_6 \right)$$

и $|(\operatorname{Ker}\varphi_3 \leftthreetimes \mathrm{D(S_3)} \cap \operatorname{Ker}\varphi_2 \diagup \operatorname{Ker}\varphi_6| = 6$.

Таким образом, $|N \diagup \operatorname{Ker}\varphi_6 \times \operatorname{Ker}\varphi_6| = 36$. Из сравнения порядков $|H \diagup \operatorname{Ker}\varphi_6 \times \operatorname{Ker}\varphi_6|$ и $|H \diagup \operatorname{Ker}\varphi_6 \times \operatorname{Ker}\varphi_6|$ заключаем, что группа автоморфизмов кольца ZD_{12} не совпадает с группой его внутренних автоморфизмов.

Более точно, справедлива

Теорема 2. $\operatorname{Aut}\mathrm{ZD_{12}} \diagup \operatorname{Inn}\mathrm{ZD_{12}} \cong \mathrm{C_2}$.

Автор использовал поддержку гранта Новосибирского государственного технического университета, 2007.

Список литературы

[1] А.М.Попова, С.В.Журков, Обратимые элементы целочисленных групповых колец, Международная алгебраическая конференция, Тезисы докладов, Екатеринбург, 2005, 69-70.

[2] А.М.Попова, С.В.Журков, Группа единиц целочисленного группового кольца группы, *Algebra and model Theory 5*, Новосибирск, 2005, 170-181.

[3] Е.В.Грачев, А.М.Попова, Единицы целочисленного группового кольца группы A_5, *Вестник КГУ. Физико-математические науки*, 2006, №4, 54-59.

[4] Е.В.Грачев, А.М.Попова, Группа единиц целочисленного группового кольца группы S_5, Абелевы группы, Материалы Всероссийского симпозиума, Бийск, 2006, №13.

[5] Е.В.Грачев, А.М.Попова, Мультипликативная группа кольца ZA_6 , Международная конференция "Алгебра и ее приложения Тезисы докладов, Красноярск, 2007, 38-39.

[6] А.М.Попова, Группа автоморфизмов кольца ZS_3, *Algebra and model Theory 6*, Новосибирск, 2007, 84-90.

The Group of Automorphism of the Ring ZD_{12}

Asya M.Popova

We describe the groups of automorphism of integral group rings of finite groups. We investigate the structure of the group $\mathrm{Aut}\,(\mathrm{ZD}_{12})$*, where* D_{12} *is the dihedral group of order 12.*

Keywords: group rings, units, automorphisms.