

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОТОКА ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ПРОЦЕССАМ ЭЛЕКТРОЛИЗА

Митин К.В.

научный руководитель д-р техн. наук Ченцов С. В.

Сибирский федеральный университет

Введение

Изучение процессов управления многими системами связано с моделированием потоков заряженных частиц, электрических и электромагнитных полей. Особенно большое практическое значение такие исследования имеют для оптимального управления электроприводами, электростатическими устройствами очистки газов, агрегатами для покраски крупных объектов, металлургическими процессами (в частности, электролизом алюминия и других металлов), что позволяет эффективно использовать энергию электрического тока.

Моделирование электрических и электромагнитных полей позволяет изучать электрические и магнитные потоки, а также потоки нерелятивистских заряженных частиц (пыли, газов), что актуально как для разработки новых датчиков, так и для проектирования промышленных фильтров. Кроме того моделирование электрических полей, возникающих в процессе электролиза между поверхностью электродов, помогает исследовать природу взаимодействия катода с анодом. Это позволяет оптимизировать управление процессом.

Целью данной работы является моделирование движения заряженных частиц в электрическом поле электродов применительно к задачам электролиза меди.

Моделирование движения ионов меди в процессе электролитического рафинирования

В основу математической модели движения заряженной частицы положены законы движения электрона под действием электрической силы. Предполагается, что частицы распределены равномерно на катоде. Для каждого участка траектории строятся отдельные уравнения движения, с помощью которых находят координаты и скорость частицы в любой момент времени t . Поскольку вдоль оси z перемещений нет, мы будем рассматривать движение в плоскости xOy (рис. 1). Реальная траектория движения частицы является случайной, поскольку скорость и ускорение заряженной частицы в каждой точке ее траектории зависят от случайных столкновений с другой заряженной частицей или стенкой ёмкости, являющейся диэлектриком. Поэтому в каждой точке рассчитывается свой вектор ускорения, который определяется напряженностью электрического поля и используется для расчета скорости в этой точке.

Напряженность электростатического поля определяется как отрицательный градиент потенциала поля f (см. [1], Часть 2)

$$\mathbf{E} = -\text{grad } f.$$

Согласно уравнениям Максвелла

$$-\text{div}\mathbf{E} = \text{div grad } f \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0. \quad (1)$$

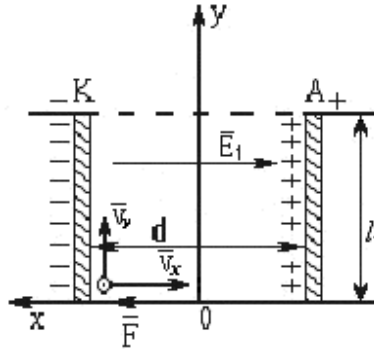


Рис. 1. Движение частицы: l_1 – длина пластин электродов; d – расстояние между пластинами; \bar{v}_x, \bar{v}_y – проекции вектора скорости по осям X и Y ; К – катод; А – анод.

Таким образом, потенциал f удовлетворяет уравнению Лапласа в области $x \in (-d/2, d/2)$, $y \in (0, l_1)$ (рис. 1) и граничным условиям

$$f(-d/2, y) = q, \quad f(d/2, y) = q_A, \quad f(x, 0) = f(x, l_1) = 0,$$

где q_A – заряд на аноде.

Пусть частица достигает второго электрода за время T , то есть t изменяется в промежутке от 0 до T . Уравнения движения частицы имеют вид:

$$mx'' = qE_x \quad (2)$$

$$my'' = qE_y \quad (3)$$

Для однозначного определения закона движения необходимо задать начальные условия:

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = v_{0x}, \quad (4)$$

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = v_{0y}. \quad (5)$$

Напряженность электростатического поля зависит от координат точки между электродами, в которой находится частица в момент времени t , то есть от координат x, y и, следовательно, от t . Поэтому решение задачи Коши (2) – (5) построим приближенно с помощью сплайнов.

Рассмотрим промежуток времени Δt настолько малый, чтобы на участке траектории движения частицы от точки $(x(t), y(t))$ до точки $(x(t+\Delta t), y(t+\Delta t))$ напряженность $\bar{E} = (E_x, E_y)$ можно было приближенно считать постоянной. Как известно (см. [2] гл. 1), при однородном заряде q и постоянной напряженности \bar{E} система кинематических уравнений плоского движения частицы в электрическом поле имеет вид:

$$x = \frac{q \cdot E_x}{m} \cdot \frac{t^2}{2} + v_{0x}t + x_0, \quad (6)$$

$$y = \frac{q \cdot E_y}{m} \cdot \frac{t^2}{2} + v_{0y}t + y_0. \quad (7)$$

Тогда приближенная модель закона движения заряженной частицы представляет собой вектор-функцию $\bar{S}(t) = (S_x(t), S_y(t))$, где $S_x(t)$ и $S_y(t)$ – это квадратичные сплайны, построенные на сетке $\omega: t_i = i\Delta t, i = 1, \dots, n, n = T/\Delta t$. На каждом промежутке $[t_i, t_{i+1}]$ вектор-функция $\bar{S}(t)$ задается функциями $S_x^i(t_i)$ и $S_y^i(t_i)$, которые являются решением задачи Коши (2) – (3) с начальными данными:

$$S_x^i(t_i) = S_x^{i-1}(t_i),$$

$$S_y^i(t_i) = S_y^{i-1}(t_i),$$

и

$$E_x = E_{xi} \equiv E_x(S_x^{i-1}(t_i), S_y^{i-1}(t_i)), \quad (8)$$

$$E_y = E_{yi} \equiv E_y(S_x^{i-1}(t_i), S_y^{i-1}(t_i)). \quad (9)$$

Если происходит столкновение двух частиц в момент $t^* \in [t_i, t_{i+1}]$, летящих со скоростями $\bar{v}_1(t^*)$ и $\bar{v}_2(t^*)$ (рис. 2), то траектория первой частицы меняется по следующему закону:

$$S_{1x}(t) = \begin{cases} \frac{qE_x(t_i)}{m_1} \frac{(t-t_i)^2}{2} + v_{1x}^i(t-t_i) + x_1(t_i), & t_i \leq t < t^*, \\ \frac{qE_x(t_i)}{m_1} \frac{(t-t^*)^2}{2} + v_{1x}^i(t-t^*) + \frac{qE_x(t_i)}{m_1} \frac{(t-t_i)^2}{2} + \\ + v_{1x}^i(t-t_i) + x_1(t_i), & t^* \leq t < t_{i+1}; \end{cases} \quad (10)$$

$$S_{1y}(t) = \begin{cases} \frac{qE_y(t_i)}{m_1} \frac{(t-t_i)^2}{2} + v_{1y}^i(t-t_i) + y_1(t_i), & t_i \leq t < t^*, \\ \frac{qE_y(t_i)}{m_1} \frac{(t-t^*)^2}{2} + v_{1y}^i(t-t^*) + \frac{qE_y(t_i)}{m_1} \frac{(t-t_i)^2}{2} + \\ + v_{1y}^i(t-t_i) + y_1(t_i), & t^* \leq t < t_{i+1}. \end{cases} \quad (11)$$

Аналогичным образом изменяется траектория второй частицы:

$$S_{2x}(t) = \begin{cases} \frac{qE_x(t_i)}{m_2} \frac{(t-t_i)^2}{2} + v_{2x}^i(t-t_i) + x_2(t_i), & t_i \leq t < t^*, \\ \frac{qE_x(t_i)}{m_2} \frac{(t-t^*)^2}{2} + v_{2x}^i(t-t^*) + \frac{qE_x(t_i)}{m_2} \frac{(t-t_i)^2}{2} + \\ + v_{2x}^i(t-t_i) + x_2(t_i), & t^* \leq t < t_{i+1}; \end{cases} \quad (12)$$

$$S_{2y}(t) = \begin{cases} \frac{qE_y(t_i)}{m_2} \frac{(t-t_i)^2}{2} + v_{2y}^i(t-t_i) + y_2(t_i), & t_i \leq t < t^*, \\ \frac{qE_y(t_i)}{m_2} \frac{(t-t^*)^2}{2} + v_{2y}^i(t-t^*) + \frac{qE_y(t_i)}{m_2} \frac{(t-t_i)^2}{2} + \\ + v_{2y}^i(t-t_i) + y_2(t_i), & t^* \leq t < t_{i+1}. \end{cases} \quad (13)$$

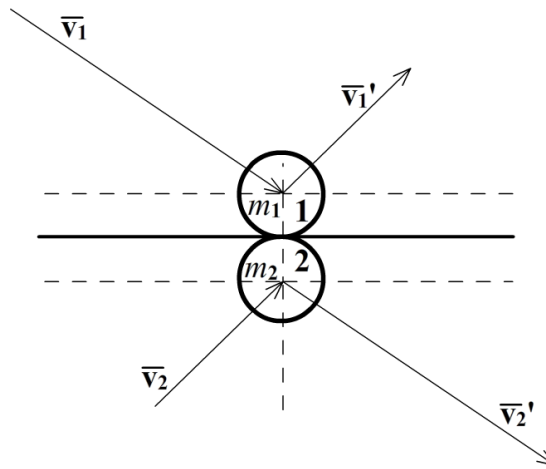


Рис. 2. Столкновение двух частиц: m_1, m_2 – массы частиц; \bar{v}_1, \bar{v}_2 – скорости движения частиц до столкновения; v_1', v_2' – скорости движения частиц после столкновения.

При ударе частицы о стенку емкости угол падения частицы на стенку будет равен углу отражения от нее (рис. 3). В этом случае траектория движения частицы моделируется

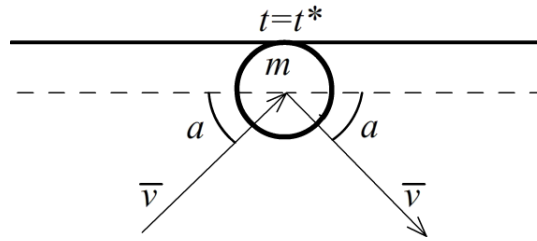


Рис. 3. Изменение направления движения частицы при ударе о стенку: m – масса частицы; \bar{v} – скорость движения частицы; a – угол падения частицы.

следующим образом:

$$S_x(t) = \begin{cases} \frac{qE_x}{m} \frac{t^2}{2} + v_x t + x_0, & t < t^*, \\ \frac{qE_x}{m} \frac{(t-t^*)^2}{2} - v_x(t-t^*) + qE_x \frac{(t^*)^2}{2} + v_x t^* + x_0, & t^* \leq t < t_{i+1}; \end{cases} \quad (14)$$

$$S_y(t) = \begin{cases} \frac{qE_y}{m} \frac{t^2}{2} + v_y t + y_0, & t < t^*, \\ \frac{qE_y}{m} \frac{(t-t^*)^2}{2} + v_y(t-t^*) + qE_y \frac{(t^*)^2}{2} + v_y t^* + y_0, & t^* \leq t < t_{i+1}. \end{cases} \quad (15)$$

После удара частицы о вертикальную стенку меняется знак проекции v_y на противоположный, и траектория движения определяется по закону:

$$S_x(t) = \begin{cases} \frac{qE_x}{m} \frac{t^2}{2} + v_x t + x_0, & t < t^*, \\ \frac{qE_x}{m} \frac{(t-t^*)^2}{2} + v_x(t-t^*) + qE_x \frac{(t^*)^2}{2} + v_x t^* + x_0, & t^* \leq t < t_{i+1}; \end{cases} \quad (16)$$

$$S_y(t) = \begin{cases} \frac{qE_y}{m} \frac{t^2}{2} + v_y t + y_0, & t < t^*, \\ \frac{qE_y}{m} \frac{(t-t^*)^2}{2} - v_y(t-t^*) + qE_y \frac{(t^*)^2}{2} + v_y t^* + y_0, & t^* \leq t < t_{i+1}. \end{cases} \quad (17)$$

В любом из описанных случаев координата z остается постоянной, то есть $z = z_0$.

Моделирование движения ионов меди в процессе электролитического рафинирования

Ионы меди являются заряженными частицами одного и того же типа и имеют одинаковую массу. Для таких частиц масса не учитывается, и берется равной единице для всех частиц. В начальный момент времени заряженная частица находится в точке $(0, y_0, z_0)$. В случае соударения частиц или удара частицы о стенку емкости траектории движения частиц формируются по законам (8)-(17) с $m=1$.

В электролизной ванне электроды расположены параллельно друг другу. При таком расположении электродов $v_{0x} = 0$. Начальные координаты y_0, z_0 заряженной частицы моделируются случайным образом по равномерному закону распределения. В силу кинематических уравнений (6), (7) плоского движения частицы при постоянной напряженности электростатического поля первый участок сплайна рассчитывается по формулам (8), (9) при $i = 0$.

Далее моделируются координаты частицы (x_1, y_1, z_0) в момент $t = t_1$ и средняя скорость перемещения частицы в точку с этими координатами с помощью (8)-(17). Процесс

продолжается до тех пор, пока частица не достигнет границы области моделирования. Когда частица достигает границы, не являющейся анодом, моделируется ее столкновение со стенкой емкости. Если в какой-то момент времени координаты двух различных частиц совпадают, то моделируется столкновение частиц. В случае совпадения координат частицы с координатами точки на аноде происходит осаждение.

Область моделирования представляет собой пространство между катодом и анодом, окруженное стенками, являющимися диэлектриками, она имеет геометрическую форму параллелепипеда. Построение области моделирования начинается с задания фона, затем строятся стенки и сами электроды.

Заряд на электродах предполагается распределенным равномерно с одинаковой плотностью. Потенциалы электродов моделируются в плоскости координат x и y , потому что они не зависят от ширины электродов z [3], [4]. Для расчета потенциала используется пятиточечная разностная схема для уравнения (1), построенная на сетке с одинаковым шагом h по x и y [5].

Для моделирования потока ионов меди между катодом и анодом в электролизной ванне был разработан эмулятор в интегрированной среде разработки приложений Delphi. Для построения графики использовалась библиотека для работы с 3D графикой OpenGL (Open Graphics Library) [6].

Список литературы

1. Шимони К. Теоретическая электротехника. М.: Мир, 1964. 775 с.
2. Тлмм И.Е. Основы теории электричества. М.: Наука, 1989. - 504 с.
3. ЛЮБАНОВА А.Ш., Митин К.В. 3D моделирование электрически х и электромагнитных полей // Наука и технологии. Труды XXVIII Российской школы: Сб. науч.тр. / М.:РАН, 2008. Т. 2. С. 105-112.
4. Митин К. В. Моделирование электростатических и электромагнитных полей // Вине- ровские чтения. Труды IV Всероссийской конференции. Часть I: Об. науч.тр. / Иркутск: ИрГТУ, 2011. С. 187-194.
5. САМАРСКИЙ А. А. Теория разностных схем. М.:Наука, 1977. 656 с.
6. OpenGL: Электрон. Журн. 2011. Режим доступа: <http://opengl.org>.