Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2008, 1(3), 231-235

УДК 517.977

Идентификация модели видообразования методами теории оптимального управления

Анна В.Букина*

Иркутский государственный университет,
ул. Карла Маркса 1, Иркутск, 664003,
Россия

Получена 10.02.2008, окончательный вариант 15.05.2008, принята к печати 10.06.2008

Идентифицируется модель симпатрического видообразования с помощью теории оптимального управления. Для соответствующей интегро-дифференциальной задачи оптимального управления выводится необходимое условие оптимальности в форме линеаризованного принципа максимума. На основе последнего конкретизируется градиентный метод решения задачи управления моделью видообразования.

Ключевые слова: управляемая интегро-дифференциальная система, необходимые условия оптимальности, модель видообразования, метод условного градиента.

Введение

Одна из версий модели симпатрического видообразования построена на основе методов адаптивной динамики [1], [2]. Данное видообразование является процессом морфологической и последующей генетической изоляции субпопуляций при имеющемся перемешивании особей в однородной среде. Причиной такой дифференциации однородной группы является конкуренция за ресурсы среды обитания, при этом возможность потребления конкретной фракции ресурса определяется совокупными характеристиками организма (фенотипом). Конкуренция в итоге приводит к диверсификации организмов по различным ресурсным (экологическим) нишам. Проблема изучения симпатрического видообразования с помощью методов математического моделирования заключается в следующих двух аспектах: 1) осуществление настройки математической модели в соответствии с имеющейся реальной информацией; 2) управление полученной моделью. И в том, и в другом случае содержательная постановка задачи может интерпретироваться в виде соответствующей задачи оптимального управления системой интегро-дифференциальных уравнений.

1. Постановка задачи

В упомянутой версии модели каждая особь характеризуется численным показателем (фенотипом) s, определяющим используемый ресурс, как, к примеру, размер тела или размер клюва определяет спектр доступной пищи. Динамика роста популяции описывается уравнением

$$x_t(s,t) = rx(s,t)\Big(1 - \frac{1}{K(s)}\int\limits_S C(s,\xi)x(\xi,t)d\xi\Big),$$

*e-mail: annabukina@mail.ru

которое в своей основе имеет логистическое уравнение. Здесь $x(s,t)$ — число особей популяции с фенотипом s в момент времени t. Предполагается, что особи рождаются с постоянной интенсивностью r и умирают с интенсивностью, определяемой конкуренцией и емкостью среды.

$$K(s) = \frac{\bar{K}}{\sigma_K\sqrt{2\pi}}\exp\Big(-\frac{(s-\bar{s})^2}{2\sigma_K^2}\Big)$$

— емкость среды (распределение ресурсов), где $\bar{K}$ — общее количество ресурсов, $\bar{s}$ — наиболее распространенный ресурс,

$$C(s,\xi) = \frac{e}{\sigma_C\sqrt{2\pi}}\exp\Big(-\frac{(s-\xi)^2}{2\sigma_C^2}\Big)$$

— функция конкуренции между фенотипами s и ξ, e — количество ресурсов, потребляемое одной особью. Предполагается, что начальное распределение численности особей популяции известно и определено условием $x(s,t_0) = x^0(s)$.

Идентификация модели состоит в определении параметров распределения ресурсов и интенсивности конкуренции $\sigma = (\sigma_K, \sigma_C)$, при которых в фиксированный момент времени t_1 численность особей максимально близка к заданному распределению $\bar{x}(s)$, описывающему видообразование. Поставленная задача может интерпретироваться как задача оптимального управления интегро-дифференциальной динамической системой, в которой одна группа компонент решения подчинена системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Вторая группа компонент искомого решения связана с первой интегралами по части области определения независимых переменных. Такие системы используются в динамических моделях, в которых на процесс влияет общее состояние объекта по дополнительному признаку в каждый момент времени.

Опишем формальную постановку задачи оптимального управления. Требуется минимизировать функционал

$$J(u) = \int\limits_S \varphi(x(s,t_1),s)ds + \iint\limits_\Pi \Phi(x,y,u,s,t)dsdt \to \min, \tag{1}$$

определенный на решениях интегро-дифференциальной системы вида

$$\begin{aligned} x_t &= f(x,y,u,s,t), \\ y(s,t) &= \int\limits_S g(x(\xi,t),u(\xi,t),s,\xi,t)d\xi, \end{aligned} \tag{2}$$

с начальным условием

$$x(s,t_0) = x^0(s) \tag{3}$$

при допустимых управлениях $u = u(s,t)$ из множества

$$V = \{u \in L^r_\infty(\Pi) : u(s,t) \in U\}. \tag{4}$$

Здесь $(s,t) \in \Pi = S \times T = (s_0,s_1) \times (t_0,t_1)$, $x(s,t) \in R^n$, $y(s,t) \in R^m$, $U \subset R^r$.

На параметры задачи (1)-(4) наложим следующие ограничения: функции $\varphi = \varphi(x,s)$, $\Phi = \Phi(x,y,u,s,t)$, вектор-функции $f = f(x,y,u,s,t)$, $g = g(x,u,s,\xi,t)$ непрерывны по совокупности своих аргументов и имеют непрерывные производные по переменным x и y, $x^0(s)$-измеримая существенно ограниченная в S вектор-функция. Также будем считать, что вектор-функции f и g удовлетворяют условию Липшица по переменным x, y и x в областях $R^n \times R^m$ и R^n соответственно.

2. Необходимые условия оптимальности

Система уравнений (2) представима в интегральной форме. Действуя классическим методом последовательных приближений, например, по схеме работы [3], для нее можно доказать существование и единственность решения в пространстве $L_\infty(\Pi)$, а также получить оценки скорости роста решений:

$$\|x(s,t)\| \leq M\Bigg(\|x^0(s)\| + \int\limits_{t_0}^{t}\Big(\|f(0,0,u,s,\tau)\| + \int\limits_S \|g(0,u,s,\xi,\tau)\|d\xi\Big)d\tau +$$
$$+\int\limits_S\Big[\|x^0(s')\| + \int\limits_{t_0}^{t}\Big(\|f(0,0,u,s',\tau)\| + \int\limits_S \|g(0,u,s',\xi,\tau)\|d\xi\Big)d\tau\Big]ds'\Bigg),$$
$$\|y(s,t)\| \leq M\int\limits_S\Big(\|g(0,u,s,\xi,t)\| + x(\xi,t)\Big)d\xi, \tag{5}$$

где константа $M > 0$ не зависит от входных данных x^0, g и f задачи (1)-(4).

Рассмотрим два допустимых процесса (u,x,y) и $(\tilde{u} = u+\Delta u, \tilde{x} = x+\Delta x, \tilde{y} = y+\Delta y)$. Действуя методом приращений, применяемым, например, в [4] для задач с дифференциальными фазовыми системами, получим следующую формулу приращения целевого функционала

$$\Delta J(u) = -\iint\limits_\Pi \Delta_{\tilde{u}} H(\psi,\theta,x,y,u,s,t)dsdt + \eta(\tilde{u},u), \tag{6}$$

где $H(\psi,\theta,x,y,u,s,t)$ — функция Понтрягина в следующей форме

$$H(\psi,\theta,x,y,u,s,t) =< \psi(s,t), f(x,y,u,s,t) > +$$
$$+\int\limits_S < \theta(\xi,t), g(x,u,\xi,s,t) > d\xi - \Phi(x,y,u,s,t),$$

(ψ,θ) — решения сопряженной системы

$$\begin{gathered}\psi_t = -H_x(\psi,\theta,x,y,u,s,t),\ (s,t)\in\Pi,\\ \psi(s,t_1) = -\varphi_x(x(s,t_1),s),\ s\in S,\\ \theta(s,t) = H_y(\psi,\theta,x,y,u,s,t),\ (s,t)\in\Pi,\end{gathered} \tag{7}$$

$\eta(\tilde{u},u)$ — остаток формулы приращения вида

$$\eta(\tilde{u},u) = \int\limits_S o_\varphi(\|\Delta x(s,t_1)\|)ds + \iint\limits_\Pi\Big(o_H(\|\Delta x(s,t)\|) + o_H(\|\Delta y(s,t)\|) +$$
$$+ < \Delta_{\tilde{u}} H_x, \Delta x(s,t) > + < \Delta_{\tilde{u}} H_y, \Delta y(s,t) >\Big)dsdt.$$

В случае, когда управление является функцией от переменных s и t, при его игольчатом варьировании, на основе оценок (5), формула (6) служит основой для необходимого условия оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина.

Пусть процесс (u^*,x^*,y^*) оптимален, (ψ^*,θ^*) — соответствующее ему решение сопряженной задачи, тогда почти для всех $(s,t)\in\Pi$ выполняется условие

$$H(\psi^*,\theta^*,x^*,y^*,u^*,s,t) = \max_{v\in U} H(\psi^*,\theta^*,x^*,y^*,v,p,s,t).$$

Если функции f, g, Φ дифференцируемы по u, а множество U выпукло, на оптимальном процессе (u^*, x^*, y^*) справедлив также линеаризованный (дифференциальный) принцип максимума:

$$< H_u(\psi^*, \theta^*, x^*, y^*, u^*, s, t), u^*(s,t) >= \max_{v \in U} < H_u(\psi^*, \theta^*, x^*, y^*, u^*, s, t), v > .$$

Когда, как в рассматриваемой модели видообразования, все компоненты управления являются параметрами, рассмотрев формулу приращения целевого функционала (6) на классической вариации управления, с учетом оценок (5) получим линеаризованный принцип максимума в следующей форме:

$$\begin{aligned} &< \iint\limits_{\Pi} H_u(\psi^*, \theta^*, x^*, y^*, u^*, s, t) ds dt, u^* >= \\ &= \max_{v \in U} < \iint\limits_{\Pi} H_u(\psi^*, \theta^*, x^*, y^*, u^*, s, t) ds dt, u > . \end{aligned} \tag{8}$$

Линеаризованный принцип служит основой для построения градиентных методов численного поиска локальных решений, например, по схеме работы [4].

3. Метод условного градиента

Выпишем основные конструкции метода условного градиента применительно к прикладной задаче:

$$\begin{gathered} J(\sigma) = \int\limits_S (x(s,t_1) - \bar{x}(s))^2 ds \to \min, \\ x_t(s,t) = rx(s,t)\Big(1 - \frac{1}{K(s)} \int\limits_S C(s,\xi) x(\xi,t) d\xi\Big), \quad x(s,t_0) = x^0(s), \\ \sigma \in U = [\sigma_K 0, \sigma_K 1] \times [\sigma_C 0, \sigma_C 1]. \end{gathered} \tag{9}$$

Функция Понтрягина примет вид

$$\begin{gathered} H(\psi, \theta, x, y, \sigma, s, t) = \\ = \psi r x\Big(1 - y\frac{\sigma_K \sqrt{2\pi}}{\bar{K}} exp\frac{(s-\bar{s})^2}{2\sigma_K^2}\Big) + \frac{x}{\sigma_C\sqrt{2\pi}} \int\limits_S \theta(\xi,t) exp\frac{(\xi - s)^2}{2\sigma_C^2} d\xi, \end{gathered}$$

а сопряженная система (7) описывается соотношениями

$$\begin{gathered} \psi_t = -\psi r\Big(1 - y\frac{\sigma_K \sqrt{2\pi}}{\bar{K}} exp\frac{(s-\bar{s})^2}{2\sigma_K^2}\Big) - \frac{1}{\sigma_C\sqrt{2\pi}} \int\limits_S \theta(\xi,t) exp\frac{(\xi - s)^2}{2\sigma_C^2} d\xi, \\ \psi(s,t_1) = -2(x(s,t_1) - \bar{x}(s)), \\ \theta(s,t) = -\psi r x\frac{\sigma_K \sqrt{2\pi}}{\bar{K}} exp\frac{(s-\bar{s})^2}{2\sigma_K^2}. \end{gathered} \tag{10}$$

Пусть задано начальное управление $\sigma^0 = (\sigma_K^0, \sigma_C^0) \in U$ и на k-м шаге итерационного процесса вычислено $\sigma^k = (\sigma_K^k, \sigma_C^k)$. Из интегро-дифференциальных систем (9), (10) на основании метода Эйлера с пересчетом ([5], с.165) построим соответствующие значения фазовых и сопряженных траекторий x^k, y^k, ψ^k, θ^k в узлах сетки. Определим вспомогательное управление $\bar{\sigma}^k$ как решение задачи

$$\bar{\sigma}^k = \text{argmax} < \iint_{\Pi} H_\sigma(\psi^k, \theta^k, x^k, y^k, \sigma^k, s, t) ds dt, \sigma >, \ \sigma \in U.$$

Подсчитаем величину

$$W(\sigma^k) =< \iint_{\Pi} H_\sigma(\psi^k, \theta^k, x^k, y^k, \sigma^k, s, t) ds dt, \bar{\sigma}^k - \sigma^k >\geq 0.$$

Если $W(\sigma^k) = 0$, то управление σ^k удовлетворяет дифференциальному принципу максимума (2.4). В случае $W(\sigma^k) > 0$ зададим α-параметрическое семейство управлений $\sigma^k(\alpha) = \sigma^k + \alpha(\bar{\sigma}^k - \sigma^k)$, $\alpha \in [0,1]$, положим $\sigma^{k+1} = \sigma^k(\alpha^k)$, где величина шага α^k выбирается из условия убывания целевого функционала: $J(\sigma^{k+1}) < J(\sigma^k)$.

Так как множество U компактно, а градиент функции H удовлетворяет условию Липшица, данный релаксационный метод сходится к множеству точек, удовлетворяющих условию (8) ([6, с. 294-296]).

Автор использовал поддержку гранта РФФИ №08-01-98007-р_ сибирь_ а.

Список литературы

[1] U.Dieckmann, M.Doebeli, On the origin of species by sympatric speciation, *Nature*, 1999, no. 400, 354-357.

[2] С.В.Семовский, Ю.С.Букин, Д.Ю. Щербаков, Видообразование в одномерной популяции: адаптивная динамика и нейтральная эволюция, *Исследовано в России*, 2002 [http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2002/125.pdf].

[3] И.Г.Петровский, Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, М., МГУ, 1984.

[4] О.В.Васильев, В.А.Срочко, В.А.Терлецкий, Методы оптимизации и их приложения, Ч.2, Оптимальное управление, Новосибирск, Наука, 1990.

[5] В.А.Срочко, Численные методы: курс лекций, Иркутск, ИрГУ, 2003.

[6] Ф.П.Васильев, Методы решения экстремальных задач, М., Наука, 1981.

Identification of a Speciation Model by Methods of Optimal Control Theory

Anna V.Bukina

The model of sympatric speciation is identified by means of optimal control theory. For the corresponding integro-differential optimal control problem a necessary optimality condition is deduced in the form of the linearised maximum principle. This condition allows concretizing gradient method of solution for control problem of speciation model.

Keywords: controlled integro-differential system, necessary optimality conditions, the model of speciation, gradient method of solution.