Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2008, 1(3) 257-261

УДК 519.7

Об одном классе автоматов с полиномиальной оценкой числа состояний в наблюдаемой форме

Максим Л.Громов*
Ольга В.Кондратьева†
Томский государственный университет,
пр. Ленина 36, Томск, 634050,
Россия

Получена 10.03.2008, окончательный вариант 25.05.2008, принята 15.06.2008

Данная работа посвящена описанию некоторых свойств автоматов, которые позволяют говорить о полиномиальном числе состояний в наблюдаемой форме автомата. Подобная структура (наблюдаемая форма автомата) является необходимой составной частью многих методов тестирования и оптимизации систем, основанных на автоматной модели, а также и полуавтоматной модели, с той лишь разницей, что аналогом наблюдаемой формы автомата там является детерминированный полуавтомат.

Ключевые слова: автомат, наблюдаемая форма автомата, приведение к наблюдаемой форме.

Введение

На практике нередко возникают задачи, требующие применения недетерминированных автоматов. Недетерминизм, например, можно использовать для более абстрактного описания системы, для представления нескольких возможностей и так далее. Кроме того, недетерминированным автоматом можно описать поведение системы в условиях неполной определенности, а также множество неисправных систем [1]. Но подавляющее большинство методов тестирования, оптимизации, решения автоматных уравнений и так далее, основанных на недетерминированных автоматах, определены для так называемых автоматов в *наблюдаемой форме*. Однако не всегда бывает возможным изначально задать автомат в наблюдаемой форме, но известно [3], что для любого автомата существует эквивалентный ему наблюдаемый автомат. Процесс нахождения такого эквивалентного автомата называется *приведением автомата к наблюдаемой форме*. Однако наблюдаемая форма автомата, в общем случае, может иметь экспоненциальное число состояний по отношению к числу состояний в исходном автомате. В данной работе мы исследуем некоторые свойства автоматов, которые ограничивают число состояний наблюдаемой формы автомата полиномом. Отметим, что в теории полуавтоматов аналогом наблюдаемой формы является детерминированный полуавтомат, а процесс построения детерминированного эквивалента заданному полуавтомату называется детерминизацией. С небольшими поправками результаты, изложенные в этой статье, могут быть перенесены и на них.

Структура работы такова: в разделе 1 вводятся основные определения, взятые из [2]. В разделе 2 определяется процесс построения наблюдаемой формы автомата и доказываются

*e-mail: gromov@sibmail.com
†e-mail: kajteler@sibmail.com

две теоремы — частный и общий случаи одного свойства автоматов, позволяющие ограничить число состояний в наблюдаемой форме полиномом. В заключении обсуждаются открытые проблемы и перспективы исследования.

1. Определения

Определение 1. Конечным автоматом *(или просто* автоматом*) будем называть пятерку* $A = \langle S, I, O, \mu, s_0 \rangle$*, где* I *и* O *— конечные входное и выходное множества (алфавиты),* S *— конечное, непустое множество состояний с выделенным начальным состоянием* s_0*, и* $\mu \subseteq S \times I \times O \times S$ *— отношение переходов.*

Если четверка $\langle s, i, o, s' \rangle \in \mu$, то будем говорить, что под действием входного сигнала i автомат из состояния s переходит в состояние s' с выдачей выходного сигнала o. Введём следующие обозначения:

1. $\mu(s) \stackrel{\text{def}}{=} \{\langle i, o, s' \rangle \in I \times O \times S | \ \langle s, i, o, s' \rangle \in \mu\}$;
2. Пусть $S' \subseteq S$, тогда обобщим предыдущее: $\mu(S') \stackrel{\text{def}}{=} \cup_{s \in S'} \mu(s)$;
3. $\mu(s, i) \stackrel{\text{def}}{=} \{\langle o, s' \rangle \in O \times S | \ \langle s, i, o, s' \rangle \in \mu\}$;
4. $\mu(s, i, o) \stackrel{\text{def}}{=} \{s' \in S | \ \langle s, i, o, s' \rangle \in \mu\}$;
5. $s \xrightarrow{i/o} \stackrel{\text{def}}{=} |\mu(s, i, o)| > 0$;
6. Пусть $S' \subseteq S$, тогда: $S' \xrightarrow{i/o} \stackrel{\text{def}}{=} \exists s \in S' : \ |\mu(s, i, o)| > 0$;
7. $s \xrightarrow{i/o} s' \stackrel{\text{def}}{=} \langle s, i, o, s' \rangle \in \mu$

Определение 2. *Состояние* s *автомата* $A = \langle S, I, O, \mu, s_0 \rangle$ *назовём* детерминированным*, если для любого входного символа* $i \in I$ *существует не более одной пары* $\langle o, s' \rangle \in O \times S$*, такой, что* $\langle s, i, o, s' \rangle \in \mu$ *(то есть* $|\mu(s, i)| \leqslant 1$*), в противном случае состояние* s *назовём* недетерминированным. *Автомат* A *будем называть детерминированным, если всякое его состояние детерминировано, и недетерминированным в противном случае.*

Иными словами, автомат называется детерминированным, если в любом его состоянии любой входной сигнал обрабатывается либо единственным образом, либо переход под действием этого входа неопределен. Очевидно, что детерминированные автоматы являются частным случаем недетерминированных.

Определение 3. *Назовем состояние* $s \in S$ *автомата* $A = \langle S, I, O, \mu, s_0 \rangle$*, для которого по паре* $\langle i, o \rangle \in I \times O$ *осуществляется более одного перехода (то есть* $|\mu(s, i, o)| > 1$*)* ненаблюдаемым состоянием по паре $\langle i, o \rangle$*, а состояние* $s' \in S$*, для которого по этой паре осуществляется не более одного перехода (то есть* $|\mu(s, i, o)| \leqslant 1$*)* – наблюдаемым по этой паре*. Состояние, наблюдаемое по всем парам* $\langle i, o \rangle \in I \times O$*, назовём просто* наблюдаемым состоянием*, а если состояние ненаблюдаемое хотя бы по одной паре, то в дальнейшем будем говорить, что это —* ненаблюдаемое состояние*.*

Определение 4. Автоматом в наблюдаемой форме *назовем такой автомат, в котором все состояния наблюдаемы. Аналогично, автомат, содержащий хотя бы одно ненаблюдаемое состояние, будем называть* автоматом в ненаблюдаемой форме*.*

Заметим, что наблюдаемость состояния не означает его детерминированности, например, если в состоянии s определено только два перехода – $\langle s, i, o_1, s' \rangle$ и $\langle s, i, o_2, s'' \rangle$, где $o_1 \neq o_2$, то состояние s будет наблюдаемым по парам $\langle i, o_1 \rangle$ и $\langle i, o_2 \rangle$ и в то же время — недетерминированным, так как для одного и того же входного символа i определены различные переходы.

2. Наблюдаемая форма

Для любого автомата в ненаблюдаемой форме существует эквивалентный ему автомат в наблюдаемой форме [3]. Процесс построения автомата в наблюдаемой форме, эквивалентного данному, называется *приведением автомата к наблюдаемой форме* (ПАНФ). Основная идея заключается в том, что вводятся новые состояния, объединяющие достигаемые по одной и той же входо-выходной паре состояния из некоторого подмножества состояний. Процесс построения начинается с синглетона, содержащего начальное состояние.

Определение 5. *Пусть задан автомат* $A = \langle S, I, O, \mu, s_0 \rangle$. Наблюдаемой формой автомата A *назовём автомат* $A_d = \langle Q, I, O, \nu, q_0 \rangle$, *где* $q_0 = \{s_0\}$, *а* $Q \subseteq 2^S$ *— минимальное множество, определяемое правилом для* ν

$$\frac{\mu(q, i, o) \neq \varnothing}{\langle q, i, o, \mu(q, i, o) \rangle \in \nu}.$$

В общем случае, число состояний в наблюдаемой форме автомата экспоненциально по отношению к числу состояний в исходном автомате, то есть для каждого автомата в ненаблюдаемой форме с n состояниями существует эквивалентный ему автомат в наблюдаемой форме с не более чем $2^n - 1$ состояниями (число всех подмножеств множества состояний исходного автомата без пустого множества), причём эта оценка достижима [3].

В связи с этим возникает задача: указать свойства автомата в ненаблюдаемой форме, обеспечивающие полиномиальное число состояний в наблюдаемой форме автомата по отношению к числу состояний в исходном автомате. В этом разделе мы укажем подобные свойства автомата. Для этого нам потребуются следующие определения:

Определение 6. *Пусть задан автомат* $A = \langle S, I, O, \mu, s_0 \rangle$, *тогда:*

1. Степенью ненаблюдаемости $k(s, i, o)$ *состояния* s *по паре* $\langle i, o \rangle$ *назовём мощность множества* $\mu(s, i, o)$, *то есть* $k(s, i, o) = |\mu(s, i, o)|$.
2. Кратностью ненаблюдаемости $r(s)$ *состояния* s *назовем мощность множества всех таких пар* $\langle i, o \rangle \in I \times O$, *по которым состояние* s *ненаблюдаемо, то есть* $r(s) = |\{\langle i, o \rangle \in I \times O | \ k(s, i, o) > 1\}|$.

Таким образом, если состояние $s \in S$ — наблюдаемое состояние, то $k(s, i, o) \leqslant 1$, $r(s) = 0$.

Теорема 1. *Пусть* $A = \langle S, I, O, \mu, s_0 \rangle$ *— заданный автомат с* n *состояниями, из которых* m *— ненаблюдаемые состояния кратности не более, чем* r, *причем для каждой пары состояний* $s_1, s_2 \in S$ *и для каждой входо-выходной пары* $\langle i, o \rangle \in I \times O$ *верно условие:*

$$\mu(s_1, i, o) \subseteq \mu(s_2, i, o) \ \vee \mu(s_2, i, o) \subseteq \mu(s_1, i, o).$$

Тогда наблюдаемая форма $A_d = \langle Q, I, O, \nu, q_0 \rangle$ *автомата* A *имеет не более чем* $n + rm$ *состояний.*

Доказательство. Пусть в процессе построения наблюдаемой формы A_d возникло новое состояние $q = \{s_1, \ldots, s_j\} \subseteq S$. Согласно условию теоремы, для каждой входо-выходной пары $\langle i, o\rangle$ из $I \times O$ в множестве $\{s_1, \ldots, s_j\}$ найдётся такое состояние s, что $\mu(\{s_1, \ldots, s_j\}, i, o) \subseteq \mu(s, i, o)$, и тогда либо $\nu(q, i, o) = \mu(s, i, o)$, если $\mu(s, i, o) \neq \varnothing$, либо переход из q по $\langle i, o\rangle$ неопределён, если $\mu(s, i, o) = \varnothing$. Таким образом, всякое состояние q в наблюдаемой форме A_d (кроме начального q_0) порождено каким-то состоянием $s \in S$ автомата A по некоторой входо-выходной паре и либо является синглетоном, если порождающее его состояние s наблюдаемо по этой паре, либо подмножеством множества S, если s ненаблюдаемо. В результате в Q, в худшем случае, возникнут все синглетоны (а их n штук) и все подмножества состояний, получаемые из каждого ненаблюдаемого состояния (их m штук) по каждой своей входо-выходной паре ненаблюдаемости (их не более чем r для каждого состояния), то есть не более чем mr подмножеств. В итоге, всего состояний в наблюдаемой форме будет не более чем $n + mr$. □

Как видно из доказательства, при выполнении условия теоремы поведение любого подмножества определяется поведением одного состояния из этого подмножества. Руководствуясь подобными рассуждениями, можно сформулировать более общую теорему.

Теорема 2. *Пусть $A = \langle S, I, O, \mu, s_0\rangle$ — заданный автомат с n состояниями, из которых m — ненаблюдаемые состояния кратности не более чем r, причем для всякой входо-выходной пары $\langle i, o\rangle \in I \times O$ в любом подмножестве $\{s_1, \ldots, s_u\}$ множества S мощности $u \leqslant n$ найдётся такое состояние s, что*

$$\mu(s, i, o) \subseteq \mu(\{s_1, \ldots, s_u\}, i, o).$$

Тогда наблюдаемая форма $A_d = \langle Q, I, O, \nu, q_0\rangle$ автомата A имеет не более чем

$$n + rm + p\sum_{j=2}^{u-1} \frac{n!}{(n-j)!\; j!}$$

состояний, где $p = |I \times O|$ – число всех возможных входо-выходных пар автомата.

Доказательство. Мы не станем приводить полное доказательство этой теоремы, лишь поясним все члены, входящие в формулу оценки числа состояний.

При строительстве наблюдаемой формы, в худшем случае, могут возникнуть все синглетоны — их n штук. Каждый синглетон, содержащий ненаблюдаемое состояние, породит новое состояние, которое есть подмножество состояний исходного автомата, по входо-выходной паре ненаблюдаемости. Таких подмножеств не более чем rm. Каждое подмножество состояний мощностью вплоть до $u - 1$ может породить новые состояния по каждой из входо-выходных пар. Поведение более мощных множеств определяется, согласно условию теоремы, $u - 1$ состояниями из них, и поэтому они новых состояний не породят. □

Интересным также является вопрос о достижимости экспоненциальной оценки числа состояний в наблюдаемой форме автомата и, в частности, о минимальном необходимом для этого числе входо-выходных пар. Для конечных полуавтоматов доказано, что для любого числа состояний n возможно построить такой полуавтомат с 3 символами в его алфавите, что число состояний в эквивалентном ему детерминированном полуавтомате будет $2^n - 1$ [4]. На основании этого можно доказать, что для заданного наперёд числа состояний n возможно построить автомат в ненаблюдаемой форме с 2 входами и 2 выходами таким образом, что его наблюдаемая форма будет иметь $2^n - 1$ состояний.

Заключение

Заметим, что обе данные теоремы являются лишь достаточными условиями полиномиальности чила состояний в наблюдаемой форме автомата. Кроме того, оценки, данные в них, сильно огрублены, поскольку при их выводе не учитывались состояния, которые были построены (посчитаны) на предыдущих шагах вывода. Поэтому дальнейшие цели своей работы авторы видят в уточнении оценок и отыскании необходимых условий (а в перспективе и критериев) полиномиальности числа состояний в наблюдаемой форме автомата.

Ещё одно направление исследований авторы видят в переносе уже полученных условий для автоматов на структуры, порождающие автоматы. Например, при некоторых процедурах оптимизации цифровых схем приходится решать автоматные уровнения, в результате чего, в качестве решения, возникают недетерминированные автоматы, но в ненаблюдаемой форме. Для дальнейшей оптимизации схемы эти автоматы приходится приводить к наблюдаемой форме. Поэтому становится интересной задача, какими свойствами должны обладать реализуемые схемами функции, чтобы автоматы, описывающие их, имели наблюдаемые формы с полиномиальным числом состояний.

Список литературы

[1] A.Petrenko, N.Yevtushenko, Conformance Tests as Checking Experiments for Partial Nondeterministic FSM, *Proceedings of the 5th International Workshop on Formal Approaches to Testing of Software* (Fates 2005) in LNCS 3997, 2005, 118–133.

[2] Н.В.Евтушенко, А.Ф.Петренко, М.В.Ветрова, Недетерминированные автоматы: анализ и синтез, Ч.1, Отношения и операции, Учебное пособие, Томск, ТГУ, 2006.

[3] Г.П.Агибалов, А.М.Оранов, Лекции по теории конечных автоматов, Томск, ТГУ, 1984.

[4] Б.А.Трахтенброт, Я.М.Барздинь, Конечные автоматы (поведение и синтез), М., Наука, 1970.

On one FSM class with a polynomial number of states in observable form

Maxim L.Gromov
Ol'ga V.Kondratyeva

This work is devoted to the description of some property of a finite state machine (FSM), which allows one to speak about polynomial number of states in observable form of a FSM. The observable form is an essential part of the vast variety of methods for testing and optimization of systems, based on FSM model.

Keywords: finite state machine, the observable form of a finite state machine, reduction to an observable form.