

УДК 519.6:533.6:551.2

Метод конечных элементов в моделировании сферически-симметричных пульсаций Земли

Александр В. Вяткин*

Институт фундаментальной подготовки,
Сибирский федеральный университет,
пр. Свободный 79, Красноярск, 660041, Россия

Владимир В. Шайдуров†

Институт математики,
Сибирский федеральный университет,
пр. Свободный 79, Красноярск, 660041, Россия

Галина И. Щепановская‡

Институт вычислительного моделирования СО РАН,
Академгородок, 660036, Красноярск, Россия

Получена 15.03.2008, окончательный вариант 15.05.2008, принята 05.06.2008

Рассматриваются вопросы математического и численного моделирования геодинамических процессов расширения, сжатия, разогревания и охлаждения Земли.

Ключевые слова: математическое и численное моделирование, геодинамические процессы

Исследование глубинного строения, состава и геодинамики литосферы континентов и океанов позволило выделить системы, связанные с глобальными процессами развития Земли (рифты, глубокие некомпенсированные впадины, континенты, океаны) и региональными явлениями внутри континентов и океанов (складчатые области, подвижные пояса, кратоны и др.). Изучение этих явлений свидетельствует о том, что интерференция этих систем приводит к сложным процессам геодинамического развития и состояниям внутри земного шара.

Внутреннее строение Земли оценивается по известной массе, моменту инерции земного шара и на основе изучения упругих волн от землетрясений. Известно, что плотность вещества в центре Земли $\rho \geq 12.2$ г/см³ и ядро Земли отделено на глубине 2900 км от лежащих выше слоёв резким скачком плотности, порядка 4 г/см³. Таким образом, упругие свойства внутри Земли изменяются на некоторых определённых значениях глубин скачком и плавно в пределах слоёв, разделённых этими границами. Важнейшими границами являются поверхность Мохоровичича, залегающая на глубине 10-70 км, и поверхность Вихерта-Гутенберга на глубине 2900 км, резко преломляющая продольные упругие волны и не пропускающая поперечных волн. Эти границы разделяют земной шар на три главные зоны: кору, мантию и ядро. Кора обладает наибольшей жёсткостью, мантия характеризуется высокой вязкостью, а ядро находится в состоянии, близком к жидкому [1], и реагирует лишь на продольные волны изменением объема. Внутри трёх главных зон земного шара имеются менее чётко выраженные границы. В таблице приведены значения плотности, коэффициента динамической вязкости, давления и температуры в размерных величинах [2].

*e-mail: gi@icm.krasn.ru

†e-mail: shidurov@icm.krasn.ru

‡e-mail: gi@icm.krasn.ru

© Siberian Federal University. All rights reserved

Предложенная в данной работе модель позволяет рассмотреть не только кору и мантию Земли, но её полную внутреннюю структуру, включая ядро. Модель является сферически-симметричной, поэтому при задании свойств соответствующих слоёв Земли и атмосферы строение Земли и атмосферы в различных направлениях радиус-вектора, исходящего из центра Земли, считается одинаковым. Задача рассматривается в нестационарной постановке. Уравнения решаются в безразмерной постановке [3], [4], когда линейные размеры отнесены к радиусу Земли, а все газодинамические величины — к соответствующим характерным значениям на поверхности земного шара.

Для описания процессов сферически-симметричного расширения, сжатия, разогревания и охлаждения Земли используются уравнения Навье-Стокса. Введём сферическую систему координат (r, θ, φ) , связанную с декартовыми координатами следующим образом: $x = r \cos \varphi \sin \theta$, $y = r \sin \varphi \sin \theta$, $z = r \cos \theta$, $0 \leq r < +\infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. После записи уравнений Навье-Стокса в сферической системе координат учет сферической симметрии приводит к равенству нулю производных по φ и θ и компонент скоростей по φ и θ . В итоге уравнения неразрывности, импульса энергии записываются в безразмерном виде [3]:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{1}{2r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sigma u) + \frac{1}{2} u \frac{\partial \sigma}{\partial r} = 0, \quad \sigma(t, r) = \sqrt{\rho(t, r)}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho u^2) = -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{rr}) + F_{em}(r, \rho), \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho e) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u \rho e) + P \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u) = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 q_r) + \tau_{rr} \frac{\partial u}{\partial r}. \quad (3)$$

Искомые функциями являются плотность ρ , скорость u и внутренняя энергия единицы массы — e , через которые выражаются давление P и динамический коэффициент вязкости μ из уравнений состояния, $F_{em}(r, \rho)$ — потенциал гравитационных сил. Уравнения состояния представляют собой сложную алгебраическую зависимость плотности от давления и температуры с учётом фазовых переходов и метаморфизма основных составляющих веществ.

Потоковые соотношения, определяющие компоненту тензора напряжений τ_{rr} и тепловой поток q_r через безразмерные параметры — число Рейнольдса Re и число Прандтля Pr , — выражаются зависимостями [5], [6]:

$$\tau_{rr} = \frac{4}{3Re} \mu \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{4}{3rRe} \mu u, \quad q_r = -\frac{\gamma}{Re Pr} \mu \frac{\partial e}{\partial r}. \quad (4)$$

Потенциал гравитационных сил в данном случае представляется в виде:

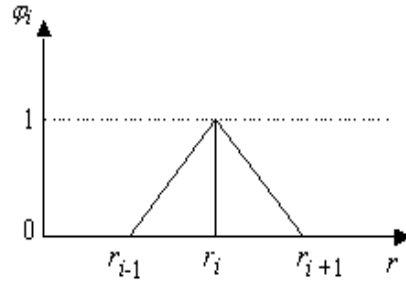
$$F_{em} = -4\pi F_r \chi_l \cdot \frac{\rho}{r^2} \int_0^r \rho x^2 dx, \quad (5)$$

где F_r — число Фруда, χ_l — безразмерная величина, которая определяется гравитационной постоянной, ускорением свободного падения и плотностью на поверхности Земли.

В качестве начальных условий берутся реальные значения плотности и динамического коэффициента вязкости, которые приведены в табл. 1.

На расчётной области радиус Земли занимает одну четвёртую часть. Введём равномерную сетку $r_i = (i + 1/2)h$, $i = -1, \dots, n$, с шагом $h = 2/(2n + 1)$. Обозначим

$\bar{\Omega}_h = \{r_i, i = -1, \dots, n\}$ и введём множество внутренних узлов $\Omega_h = \{r_i, i = 0, 1, \dots, n-1\}$. В результате расчётная область $\bar{\Omega}$ разбилась на $n+1$ интервал (r_i, r_{i+1}) , $i = -1, 0, \dots, n-1$. Для каждого узла $r_i \in \bar{\Omega}_h$ определим базисную функцию φ_i , которая равна единице в r_i , нулю во всех остальных узлах $\bar{\Omega}_h$ и линейна на каждом отрезке (r_i, r_{i+1}) (рис. 1).

Рис. 1. Вид базисной функции φ_i

$$\varphi_i(r) = \begin{cases} \frac{r - r_{i-1}}{h}, & \text{если } r \in [r_{i-1}, r_i]; \\ \frac{r_{i+1} - r}{h}, & \text{если } r \in (r_i, r_{i+1}]; \\ 0, & \text{если } r \notin [r_{i-1}, r_{i+1}]. \end{cases} \quad (6)$$

С помощью введённых обозначений сформулируем метод Бубнова-Галеркина. Будем искать приближение $\sigma_h(t, r)$ к функции $\sigma(t, r)$ в виде

$$\sigma_h(t, r) = \sum_{i=0}^n \sigma_i(t) \varphi_i(r) \quad (7)$$

с некоторыми коэффициентами $\sigma_i(t)$, зависящими от времени. Подставим пробное решение σ_h в уравнение (1) вместо точного решения и умножим скалярно на φ_l :

$$(R, \varphi_l) = 0, \quad l = 0, \dots, n, \quad (8)$$

где

$$R = \frac{\partial \sigma_h}{\partial t} + \frac{1}{2r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sigma_h u) + \frac{1}{2} u \frac{\partial \sigma_h}{\partial r}. \quad (9)$$

При условии сферической симметрии, получим следующее выражение:

$$\int_0^1 r^2 \varphi_l \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{1}{2r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sigma u) + \frac{1}{2} u \frac{\partial \sigma}{\partial r} \right) dr = 0, \quad l = 0, \dots, n. \quad (10)$$

Применяя формулу интегрирования по частям к (10), получим равенство:

$$\int_0^1 r^2 \varphi_l \frac{\partial \sigma}{\partial t} dr + \left(\frac{1}{2} \varphi_l \sigma u \right) \Big|_{r=1} - \int_0^1 \frac{1}{2} r^2 \sigma u \frac{\partial \varphi_l}{\partial r} dr + \int_0^1 \frac{1}{2} r^2 \varphi_l u \frac{\partial \sigma}{\partial r} dr = 0, \quad (11)$$

$$l = 0, \dots, n.$$

Подставляя приближённое решение (7) в равенство (11) вместо σ , получим

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \left[\int_0^1 \left(\frac{\partial \sigma_i(t)}{\partial t} r^2 \varphi_l \varphi_i - \frac{1}{2} r^2 \sigma_i u \frac{\partial \varphi_l}{\partial r} \varphi_i + \frac{1}{2} r^2 \sigma_i u \varphi_l \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} \right) dr + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (u \sigma_i \varphi_l \varphi_i) \Big|_{r=1} \right] = 0, \quad l = 0, \dots, n. \end{aligned} \quad (12)$$

С учётом выбора базисных функций (6) отличными от нуля в (12) остаются слагаемые:

$$\begin{aligned} \sum_{i=l-1}^{l+1} \left[\int_0^1 \left(\frac{\partial \sigma_i(t)}{\partial t} r^2 \varphi_l \varphi_i - \frac{1}{2} r^2 \sigma_i u \frac{\partial \varphi_l}{\partial r} \varphi_i + \frac{1}{2} r^2 \sigma_i u \varphi_l \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} \right) dr + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (u \sigma_i \varphi_l \varphi_i) \Big|_{r=1} \right] = 0, \quad l = 0, \dots, n. \end{aligned} \quad (13)$$

Для вычисления интегралов в уравнении (13) применим квадратурную формулу трапеций и равенства $\sigma_{-1} = \sigma_0$, $u_{-1} = -u_0$, вытекающие из симметрии задачи. Аппроксимируя производную по времени правой разностной производной, в итоге получим разностные уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{h}{\tau} r_0^2 \sigma_0^{k+1} + \left(\frac{1}{4} r_1^2 u_1^k + \frac{1}{4} r_0^2 u_0^k \right) \sigma_1^{k+1} &= \frac{h}{\tau} r_0^2 \sigma_0^k, \quad l = 0, \\ \left(-\frac{1}{4} r_{l-1}^2 u_{l-1}^k - \frac{1}{4} r_l^2 u_l^k \right) \sigma_{l-1}^{k+1} + \frac{1}{\tau} r_l^2 h \sigma_l^{k+1} + \\ + \left(\frac{1}{4} r_{l+1}^2 u_{l+1}^k + \frac{1}{4} r_l^2 u_l^k \right) \sigma_{l+1}^{k+1} &= \frac{1}{\tau} r_l^2 h \sigma_l^k, \quad l = 1, \dots, n-1, \\ \left(-\frac{1}{4} r_{n-1}^2 u_{n-1}^k - \frac{1}{4} r_n^2 u_n^k \right) \sigma_{n-1}^{k+1} + \left(\frac{h}{2\tau} r_n^2 + \frac{1}{2} r_n^2 u_n^k \right) \sigma_n^{k+1} &= \frac{h}{2\tau} r_n^2 \sigma_n^k, \quad l = n. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь в нелинейных членах “заморожены” коэффициенты, известные с предыдущего шага по времени.

Аналогично (7) будем искать функцию $u_h(t, r)$, которая будет аппроксимировать функцию $u(t, r)$ в виде

$$u_h(t, r) = \sum_{i=0}^n u_i(t) \varphi_i(r) \quad (15)$$

с некоторыми коэффициентами $u_i(t)$, зависящими от времени.

В случае сферической симметрии получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} \int_0^1 r^2 \varphi_l \left[\left(\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{2} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho u^2) - \frac{u}{2r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho u) + \frac{\partial P}{\partial r} - \right. \\ \left. - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{4}{3 \text{Re}} r^2 \mu \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{4}{3 \text{Re}} r \mu u \right) - F_{em} \right] dr = 0, \quad l = 0, \dots, n. \end{aligned} \quad (16)$$

Отметим, что здесь использовано не исходное уравнение (2), а из него вычтено уравнение неразрывности, умноженное на $u/2$. Это приведёт и в непрерывном и в дискретном виде к

устойчивости в норме пространства L_2 , а не в L_1 , как в исходном уравнении (2). Применяя к нему формулу интегрирования по частям, получим

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 r^2 \varphi_l \left(\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{2} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dr + (\varphi_l \rho u^2) \Big|_{r=1} - \int_0^1 r^2 \rho u^2 \frac{\partial \varphi_l}{\partial r} dr - \frac{1}{2} (\varphi_l \rho u^2) \Big|_{r=1} + \\
& + \int_0^1 \frac{1}{2} r^2 \rho u \frac{\partial}{\partial r} (\varphi_l u) dr + (r^2 \varphi_l P) \Big|_{r=1} - \int_0^1 P \left(2r \varphi_l + r^2 \frac{\partial \varphi_l}{\partial r} \right) dr - \\
& - \left(\varphi_l \frac{4}{3 \operatorname{Re}} \mu \frac{\partial u}{\partial r} - \varphi_l \frac{4}{3 \operatorname{Re}} \mu u \right) \Big|_{r=1} + \int_0^1 \frac{\partial \varphi_l}{\partial r} \left(\frac{4}{3 \operatorname{Re}} r^2 \mu \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{4}{3 \operatorname{Re}} r \mu u \right) dr - \\
& - \int_0^1 r^2 \varphi_l F_{em} dr = 0, \quad l = 0, \dots, n. \tag{17}
\end{aligned}$$

Подставляя приближенное решение (15) в равенство (17) вместо u , получим

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^n \left[\int_0^1 \left(r^2 \varphi_l \varphi_i \left(\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{u_i}{2} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) - \frac{1}{2} r^2 \rho u u_i \varphi_i \frac{\partial \varphi_l}{\partial r} + \right. \right. \\
& + \frac{1}{2} r^2 \rho u u_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} \varphi_l + \frac{4}{3 \operatorname{Re}} r^2 \mu u_i \frac{\partial \varphi_l}{\partial r} \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} - \frac{4}{3 \operatorname{Re}} r \mu u_i \varphi_i \frac{\partial \varphi_l}{\partial r} \Big) dr + \\
& \left. \left(\frac{1}{2} \rho u u_i \varphi_l \varphi_i - \varphi_l \frac{4}{3 \operatorname{Re}} \mu u_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} + \varphi_l \frac{4}{3 \operatorname{Re}} \mu u_i \varphi_i \right) \Big|_{r=1} \right] = \\
& = \int_0^1 P \left(2r \varphi_l + r^2 \frac{\partial \varphi_l}{\partial r} \right) dr - (\varphi_l P) \Big|_{r=1} + \int_0^1 r^2 \varphi_l F_{em} dr \quad l = 0, \dots, n. \tag{18}
\end{aligned}$$

С учетом выбора базисных функций (6) отличными от нуля в (18) остаются следующие слагаемые:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=l-1}^{l+1} \left[\int_0^1 \left(r^2 \varphi_l \varphi_i \left(\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{u_i}{2} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) - \frac{1}{2} r^2 \rho u u_i \varphi_i \frac{\partial \varphi_l}{\partial r} + \frac{1}{2} r^2 \rho u u_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} \varphi_l + \right. \right. \\
& + \frac{4}{3 \operatorname{Re}} r^2 \mu u_i \frac{\partial \varphi_l}{\partial r} \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} - \frac{4}{3 \operatorname{Re}} r \mu u_i \varphi_i \frac{\partial \varphi_l}{\partial r} \Big) dr + \\
& \left. + \left(\frac{1}{2} \rho u u_i \varphi_l \varphi_i - \varphi_l \frac{4}{3 \operatorname{Re}} \mu u_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} + \varphi_l \frac{4}{3 \operatorname{Re}} \mu u_i \varphi_i \right) \Big|_{r=1} \right] = \\
& = \int_0^1 P \left(2r \varphi_l + r^2 \frac{\partial \varphi_l}{\partial r} \right) dr - (\varphi_l P) \Big|_{r=1} + \int_0^1 r^2 \varphi_l F_{em} dr, \tag{19} \\
& l = 0, \dots, n.
\end{aligned}$$

Для вычисления интегралов в уравнении (19) применим квадратурную формулу трапеций и равенства $u_{-1} = -u_0$, $\mu_{-1} = \mu_0$, вытекающие из симметрии задачи. Аппроксимируем производную по времени следующим образом:

$$\rho_l \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{u_i}{2} \frac{\partial \rho_l}{\partial t} = \sqrt{\rho_l} \frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{\rho_l} u_i) \approx \frac{\rho_l^{k+1} u_i^{k+1} - \sqrt{\rho_l^{k+1}} \sqrt{\rho_l^k} u_i^k}{\tau}.$$

В итоге получим

$$\begin{aligned} & \left(\frac{h}{\tau} r_0^2 \rho_0^{k+1} + \frac{2}{h \operatorname{Re}} r_0^2 \mu_0^k + \frac{2}{3 h \operatorname{Re}} r_1^2 \mu_1^k \right) u_0^{k+1} + \\ & + \left(\frac{1}{4} r_1^2 \rho_1^{k+1} u_1^k - \frac{2}{3 h \operatorname{Re}} r_1^2 \mu_1^k + \frac{2}{3 \operatorname{Re}} r_1 \mu_1^k + \frac{1}{4} r_0^2 \rho_0^{k+1} u_0^k - \frac{2}{3 h \operatorname{Re}} r_0^2 \mu_0^k \right) u_1^{k+1} = \\ & = \frac{\sqrt{\rho_0^{k+1}} \sqrt{\rho_0^k} u_0^k}{\tau} h r_0^2 + \frac{1}{2} r_0^2 P_0^k + 2 h r_0 P_0^k - \frac{1}{2} P_1^k r_1^2 + h r_0^2 F_{em,0}^k, \quad l = 0, \\ & \left(-\frac{1}{4} r_{l-1}^2 \rho_{l-1}^{k+1} u_{l-1}^k - \frac{2}{3 h \operatorname{Re}} r_{l-1}^2 \mu_{l-1}^k - \frac{2}{3 \operatorname{Re}} r_{l-1} \mu_{l-1}^k - \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{4} r_l^2 \rho_l^{k+1} u_l^k - \frac{2}{3 h \operatorname{Re}} r_l^2 \mu_l^k \right) u_{l-1}^{k+1} + \\ & + \left(\frac{h}{\tau} r_l^2 \rho_l^{k+1} + \frac{2}{3 h \operatorname{Re}} r_{l-1}^2 \mu_{l-1}^k + \frac{4}{3 h \operatorname{Re}} r_l^2 \mu_l^k + \frac{2}{3 h \operatorname{Re}} r_{l+1}^2 \mu_{l+1}^k \right) u_l^{k+1} + \\ & + \left(\frac{1}{4} r_{l+1}^2 \rho_{l+1}^{k+1} u_{l+1}^k - \frac{2}{3 h \operatorname{Re}} r_{l+1}^2 \mu_{l+1}^k + \frac{2}{3 \operatorname{Re}} r_{l+1} \mu_{l+1}^k + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{4} r_l^2 \rho_l^{k+1} u_l^k - \frac{2}{3 h \operatorname{Re}} r_l^2 \mu_l^k \right) u_{l+1}^{k+1} = \\ & = \frac{\sqrt{\rho_l^{k+1}} \sqrt{\rho_l^k} u_l^k}{\tau} h r_l^2 + \frac{1}{2} r_{l-1}^2 P_{l-1}^k + 2 h r_l P_l^k - \frac{1}{2} r_{l+1}^2 P_{l+1}^k + h r_l^2 F_{em,l}^k, \\ & \quad \quad \quad l = 1, \dots, n-1, \\ & \left(-\frac{1}{4} r_{n-1}^2 \rho_{n-1}^{k+1} u_{n-1}^k - \frac{2}{3 h \operatorname{Re}} r_{n-1}^2 \mu_{n-1}^k - \frac{2}{3 \operatorname{Re}} r_{n-1} \mu_{n-1}^k - \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{4} r_n^2 \rho_n^{k+1} u_n^k - \frac{2}{3 h \operatorname{Re}} r_n^2 \mu_n^k \right) u_{n-1}^{k+1} + \\ & + \left(\frac{h}{2\tau} r_n^2 \rho_n^{k+1} + \frac{2}{3 h \operatorname{Re}} r_{n-1}^2 \mu_{n-1}^k - \frac{2}{3 h \operatorname{Re}} r_n^2 \mu_n^k + \frac{2}{3 \operatorname{Re}} r_n \mu_n^k + \frac{1}{2} r_n^2 \rho_n^{k+1} u_n^k \right) u_n^{k+1} = \\ & = \frac{\sqrt{\rho_n^{k+1}} \sqrt{\rho_n^k} u_n^k}{2\tau} h r_n^2 + \frac{1}{2} r_{n-1}^2 P_{n-1}^k + h r_n P_n^k - \frac{1}{2} r_n^2 P_n^k + h r_n^2 F_{em,n}^k, \quad l = n. \end{aligned} \tag{20}$$

Будем искать приближение $e_h(t, r)$ к функции $e(t, r)$ в виде

$$e_h(t, r) = \sum_{i=0}^n e_i(t) \varphi_i(r) \tag{21}$$

с некоторыми коэффициентами $e_i(t)$, зависящими от времени.

В случае сферической симметрии получим следующее выражение:

$$\int_0^1 \left(r^2 \varphi_l \frac{\partial}{\partial t} (\rho e) + \varphi_l P \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u) + \varphi_l \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u \rho e) - \frac{\gamma}{\operatorname{Re} \operatorname{Pr}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \mu \frac{\partial e}{\partial r} \right) \varphi_{l-1} \right.$$

$$-\frac{4}{3\text{Re}}r^2\varphi_l\mu\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{4}{3\text{Re}}r\varphi_l\mu u\frac{\partial u}{\partial r} dr = 0, \quad l = 0, \dots, n. \quad (22)$$

Применяя формулу интегрирования по частям к (22), получим

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left(r^2\varphi_l \frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + 2r\varphi_l u P + r^2\varphi_l P \frac{\partial u}{\partial r} - r^2 u \rho e \frac{\partial \varphi_l}{\partial r} + \frac{\gamma}{\text{Re Pr}} r^2 \mu \frac{\partial e}{\partial r} \frac{\partial \varphi_l}{\partial r} - \right. \\ & \left. - \frac{4}{3\text{Re}}r^2\varphi_l\mu\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{4}{3\text{Re}}r\varphi_l\mu u\frac{\partial u}{\partial r} \right) dr + (u\rho e\varphi_l) \Big|_{r=1} - \\ & \left. - \left(\frac{\gamma}{\text{Re Pr}}\varphi_l\mu\frac{\partial e}{\partial r} \right) \Big|_{r=1} = 0, \quad l = 0, \dots, n. \end{aligned} \quad (23)$$

Подставляя в равенство (23) вместо e приближённое решение (21), получим

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^n \left(\int_0^1 \left(r^2\varphi_l\varphi_i \frac{\partial}{\partial t}(\rho e_i) - r^2 u \rho \frac{\partial \varphi_l}{\partial r} e_i \varphi_i + \frac{\gamma}{\text{Re Pr}} \mu r^2 e_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} \frac{\partial \varphi_l}{\partial r} \right) dr + \right. \\ & \left. + \left(u \rho \varphi_l e_i \varphi_i - \frac{\gamma}{\text{Re Pr}} \mu \varphi_l e_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} \right) \Big|_{r=1} \right) = - \int_0^1 \left(2r\varphi_l u P + r^2\varphi_l P \frac{\partial u}{\partial r} - \right. \\ & \left. - \frac{4}{3\text{Re}}r^2\varphi_l\mu\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{4}{3\text{Re}}r\varphi_l\mu u\frac{\partial u}{\partial r} \right) dr, \quad l = 0, \dots, n. \end{aligned} \quad (24)$$

С учетом выбора базисных функций (6) отличными от нуля в (24) остаются следующие слагаемые:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=l-1}^{l+1} \left(\int_0^1 \left(r^2\varphi_l\varphi_i \frac{\partial}{\partial t}(\rho e_i) - r^2 u \rho \frac{\partial \varphi_l}{\partial r} e_i \varphi_i + \frac{\gamma}{\text{Re Pr}} \mu r^2 e_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} \frac{\partial \varphi_l}{\partial r} \right) dr + \right. \\ & \left. + \left(u \rho \varphi_l e_i \varphi_i - \frac{\gamma}{\text{Re Pr}} \mu \varphi_l e_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} \right) \Big|_{r=1} \right) = - \int_0^1 \left(2r\varphi_l u P + r^2\varphi_l P \frac{\partial u}{\partial r} - \right. \\ & \left. - \frac{4}{3\text{Re}}r^2\varphi_l\mu\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{4}{3\text{Re}}r\varphi_l\mu u\frac{\partial u}{\partial r} \right) dr, \quad l = 0, \dots, n. \end{aligned} \quad (25)$$

Для вычисления интегралов в уравнении (25) применим квадратурную формулу трапеций и равенства $e_{-1} = e_0$, $\mu_{-1} = \mu_0$, вытекающие из симметрии задачи. Аппроксимируя производную по времени правой разностной производной, в итоге получим разностные уравнения:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{h}{\tau} r_0^2 \rho_0^{k+1} + \frac{3\gamma}{2h\text{Re Pr}} r_0^2 \mu_0^k + \frac{\gamma}{2h\text{Re Pr}} r_1^2 \mu_1^k \right) e_0^{k+1} + \\ & + \left(- \frac{\gamma}{2h\text{Re Pr}} r_0^2 \mu_0^k + \frac{1}{2} r_1^2 u_1^{k+1} \rho_1^{k+1} + \frac{\gamma}{2h\text{Re Pr}} r_1^2 \mu_1^k \right) e_1^{k+1} = \\ & = \frac{h}{\tau} r_0^2 \rho_0^k e_0^k - 2h r_0 u_0^{k+1} P_0^k - \frac{1}{2} r_0^2 P_0^k (u_1^{k+1} - u_0^{k+1}) + \frac{1}{3h\text{Re}} r_0^2 \mu_0^k (u_1^{k+1} - u_0^{k+1})^2 - \\ & \quad - \frac{2}{3\text{Re}} r_0 \mu_0^k u_0^{k+1} (u_1^{k+1} - u_0^{k+1}), \quad l = 0, \\ & \left(- \frac{1}{2} r_{l-1}^2 u_{l-1}^{k+1} \rho_{l-1}^{k+1} - \frac{\gamma}{2h\text{Re Pr}} r_{l-1}^2 \mu_{l-1}^k - \frac{\gamma}{2h\text{Re Pr}} r_l^2 \mu_l^k \right) e_{l-1}^{k+1} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{h}{\tau} r_l^2 \rho_l^{k+1} + \frac{\gamma}{2h \operatorname{Re} \operatorname{Pr}} r_{l-1}^2 \mu_{l-1}^k + \frac{\gamma}{h \operatorname{Re} \operatorname{Pr}} r_l^2 \mu_l^k + \frac{\gamma}{2h \operatorname{Re} \operatorname{Pr}} r_{l+1}^2 \mu_{l+1}^k \right) e_l^{k+1} + \\
& \quad + \left(-\frac{\gamma}{2h \operatorname{Re} \operatorname{Pr}} r_l^2 \mu_l^k + \frac{1}{2} r_{l+1}^2 u_{l+1}^{k+1} \rho_{l+1}^{k+1} + \frac{\gamma}{2h \operatorname{Re} \operatorname{Pr}} r_{l+1}^2 \mu_{l+1}^k \right) e_{l+1}^{k+1} = \\
& = \frac{h}{\tau} r_l^2 \rho_l^k e_l^k - 2h r_l u_l^{k+1} P_l - \frac{1}{2} r_l^2 P_l^k (u_{l+1}^{k+1} - u_{l-1}^{k+1}) + \frac{1}{3h \operatorname{Re}} r_l^2 \mu_l^k (u_{l+1}^{k+1} - u_{l-1}^{k+1})^2 - \\
& \quad - \frac{2}{3 \operatorname{Re}} r_l \mu_l^k u_l^{k+1} (u_{l+1}^{k+1} - u_{l-1}^{k+1}), \quad l = 1, \dots, n-1, \tag{26} \\
& \quad \left(-\frac{1}{2} r_{n-1}^2 u_{n-1}^{k+1} \rho_{n-1}^{k+1} - \frac{\gamma}{2h \operatorname{Re} \operatorname{Pr}} r_{n-1}^2 \mu_{n-1}^k - \frac{\gamma}{2h \operatorname{Re} \operatorname{Pr}} r_n^2 \mu_n^k \right) e_{n-1}^{k+1} + \\
& + \left(\frac{h}{2\tau} r_n^2 \rho_n^{k+1} + \frac{\gamma}{2h \operatorname{Re} \operatorname{Pr}} r_{n-1}^2 \mu_{n-1}^k + \frac{1}{2} r_n^2 u_n^{k+1} \rho_n^{k+1} - \frac{\gamma}{2h \operatorname{Re} \operatorname{Pr}} r_n^2 \mu_n^k \right) e_n^{k+1} = \\
& = \frac{h}{2\tau} r_n^2 \rho_n^k e_n^k - h r_n u_n^{k+1} P_n - \frac{1}{2} r_n^2 P_n^k (u_n^{k+1} - u_{n-1}^{k+1}) + \frac{2}{3h \operatorname{Re}} r_n^2 \mu_n^k (u_n^{k+1} - u_{n-1}^{k+1})^2 - \\
& \quad - \frac{2}{3 \operatorname{Re}} r_n \mu_n^k u_n^{k+1} (u_n^{k+1} - u_{n-1}^{k+1}), \quad l = n.
\end{aligned}$$

Таким образом, получена консервативная вариационно-разностная схема первого порядка аппроксимации. К решению получаемых больших систем линейных алгебраических уравнений специального вида с трёхдиагональной матрицей применяется метод немонотонной прогонки с итерациями, который отличается высокой вычислительной устойчивостью.

Алгоритм метода немонотонной прогонки для данной задачи, имеющей следующий вид

$$\begin{aligned}
c_0 y_0 - b_0 y_1 &= f_0, \quad i = 0, \\
-a_i y_{i-1} + c_i y_i - b_i y_{i+1} &= f_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \\
-a_N y_{N-1} + c_N y_N &= f_N, \quad i = N,
\end{aligned}$$

определяется следующим образом. Сначала задаются начальные значения для C , A , F и Φ :

$$C = c_0, \quad A = a_1, \quad F = f_0, \quad \Phi = f_1$$

и параметра $\varkappa_1 = 0$.

Далее последовательно для $i = 0, 1, \dots, N-1$ выполняется прямой ход. В зависимости от ситуации проводятся следующие действия:

если $|C| \geq |b_i|$, то

$$\begin{aligned}
\alpha_{i+1} &= b_i/C, \quad \beta_{i+1} = F/C, \\
C &= c_{i+1} - A\alpha_{i+1}, \quad F = \Phi + A\beta_{i+1}, \\
\Theta_{i+1} &= \varkappa_i, \quad \varkappa_{i+1} = i + 1, \\
A &= a_{i+2}, \quad \Phi = f_{i+2},
\end{aligned}$$

если $|C| < |b_i|$, то

$$\begin{aligned}
\alpha_{i+1} &= C/b_i, \quad \beta_{i+1} = -F/b_i, \\
C &= c_{i+1}\alpha_{i+1} - A, \quad F = \Phi - c_{i+2}\beta_{i+1}, \\
\Theta_{i+1} &= i + 1, \quad \varkappa_{i+1} = \varkappa_i, \\
A &= a_{i+2}\alpha_{i+1}, \quad \Phi = f_{i+2} + a_{i+2}\beta_{i+1}.
\end{aligned}$$

Замечание. Для $i = N - 1$ переопределение A и Φ в обоих случаях не приводится.

После окончания прямого хода осуществляется обратный ход по определению неизвестных в обратном порядке. Сначала вычисляется неизвестное y_n , где $n = \varkappa_N$ по формуле

$$y_n = F/C,$$

а затем последовательно для $i = N - 1, N - 2, \dots, 0$ вычисляются остальные неизвестные $y_m = \alpha_{i+1}y_n + \beta_{i+1}$, где $m = \Theta_{i+1}$, $n = \varkappa_{i+1}$, $i = N - 1, N - 2, \dots, 0$.

Таблица 1

h , км	15	60	100	200	300	400	600	1100	1600	2700	2870	2900	4700	6371
P , кбар	3,5	14	29	64,9	99	130	190	30	530	1240	1340	1350	3040	3632
T , К	673	873	1103	1473	1623	1673	1723	1873	2700			3500	4000	
ρ , г/см ³	2,85	3,34	3,37	3,36	3,48	3,54	4,13	4,74	5,03	5,55	5,68	9,89	12,3	13,0
μ	0,35	0,72	0,72	0,7	0,75	0,82	1,3	1,7	2,2	2,9	2,95	0	0	

В качестве начальных условий использовались значения плотности, динамического коэффициента вязкости, давления и температуры, которые приведены в табл. 1 [2]. В расчётах плотность и динамический коэффициент вязкости, а также температура отнесены к соответствующим характерным величинам на поверхности земного шара.

На рис. 2 представлены результаты вычислительного эксперимента, нанесены кривые распределения плотности по радиусу земного шара для различных моментов времени, выделена линия начального распределения плотности, соответствующая важнейшим граничным поверхностям Мохоровичича и Вихерта-Гутенберга [7]. Получено, что со временем Земля сжимается под действием гравитационных сил и уменьшается в радиусе, плотность Земли возрастает во всех слоях, основные геодинамические зоны сохраняются, хоть и становятся более сглаженными. Поверхность Земли определяется значением переменной r , при котором значение безразмерной плотности равно единице.

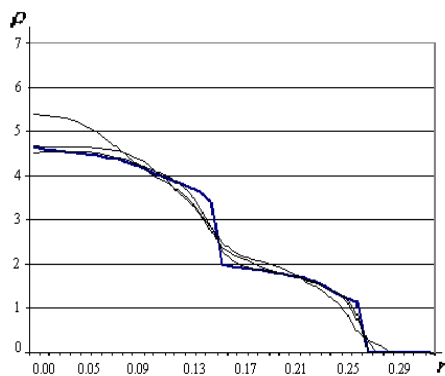


Рис. 2. Распределение плотности по радиусу Земли для различных моментов времени под действием гравитационных сил

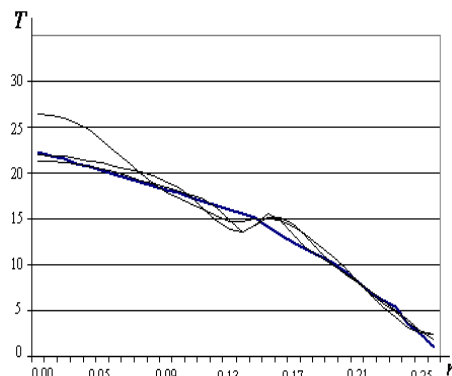


Рис. 3. Распределение температуры по радиусу Земли для различных моментов времени под действием гравитационных сил

На рис. 3 нанесены кривые распределения безразмерной температуры по радиусу земного шара для тех же моментов времени, что и линии плотности, выделена также линия начального распределения температуры.

Отметим, что в настоящей работе внутреннее строение Земли впервые изучено в рамках газодинамической модели. В результате решения поставленной задачи рассмотрены сферически-симметричные пульсации Земли под действием гравитационных сил с учётом конвекции и диффузии глубинных слоёв как сплошной среды.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы Президиума РАН № 16 (проект № 9).

Список литературы

- [1] Г.Джеффрис, Земля, её происхождение, история и развитие, М., Изд-во иностр. лит., 1960.
- [2] Н.Л.Добрецов, А.Г.Кирдяшкин, А.А.Кирдяшкин, Глубинная геодинамика, Новосибирск, Изд-во СО РАН, филиал "ГЕО", 2001.
- [3] О.А.Ушакова, В.В. Шайдуров, Метод конечных элементов для уравнений Навье-Стокса в сферической системе координат, *Вестник КрасГУ*, 2006, № 4, 151-156.
- [4] В.В.Шайдуров, Г.И. Щепановская, Математическое и численное моделирование нестационарного распространения импульса энергии большой мощности в вязком теплопроводном газе, Часть 1. Математическая постановка задачи, Красноярск, ИВМ СО РАН, 2003, 50 с. (Деп. в ВИНТИ 24.10.03, № 1860-В2003).
- [5] E.D.Karepova, A.V.Malyshev, V.V. Shaidurov, G.I. Shchepanovskaya, The parallel realization of the finite element method for the Navier-Stokes equations for a viscous heat conducting gas, *Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design*, Springer, 91(2006), 41-54.
- [6] В.А.Мальшев, В.В.Шайдуров, Г.И.Щепановская, Математическое и численное моделирование на многопроцессорной вычислительной системе сверхзвукового взаимодействия тепловых импульсов, *Вестник КрасГУ*, 2006, № 4, 109-116.
- [7] В.В.Шайдуров, Г.И.Щепановская, Газодинамическая модель внутреннего строения Земли, *Вестник СубГАУ*, 2008, № 1, 79-83.

The finite element method for modeling spherically symmetric pulsations of the earth

Alexander V.Vyatkin
Vladimir V.Shaidurov
Galina I.Shchepanovskaya

Some problems of mathematical and numerical modeling of geodynamic processes of expansion, compression, heating and cooling of the Earth are considered.

Keywords: mathematical and numerical modeling, geodynamic processes