

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования

«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт космических информационных технологий

Базовая кафедра интеллектуальных систем управления

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой

\_\_\_\_\_ Ю.Ю. Якунин

«13» июня 2018

## **БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА**

27.03.03 «Системный анализ и управление»

Разработка алгоритма многомерной оптимизации параметра размытости  $\sigma$   
непараметрического алгоритма идентификации

Руководитель \_\_\_\_\_ Чжан Е. А.  
подпись, дата должность, ученая степень инициалы, фамилия

Выпускник \_\_\_\_\_ Тараскина В. И.  
подпись, дата инициалы, фамилия

Красноярск 2018

Оглавление	
РЕФЕРАТ.....	3
ВВЕДЕНИЕ .....	4
Глава 1. Проблема идентификации дискретно-непрерывных процессов .....	6
1.1 Постановка задачи идентификации.....	6
1.2 Параметрические модели безынерционных систем с запаздыванием .....	9
1.3 Непараметрические модели безынерционных систем с запаздыванием ...	14
1.4 Модели на основе ядерных оценок .....	15
Выводы по первой главе .....	<del>21</del> <u>20</u>
Глава 2. Оптимизация параметра размытости ядерной функции.....	<del>23</del> <u>22</u>
2.1 Методы скользящего экзамена .....	<del>23</del> <u>22</u>
2.2 Методы оптимизации первого порядка для отыскания оптимального параметра размытости $cs$ .....	<del>28</del> <u>27</u>
2.3 Оптимизация параметра размытости $cs$ в многомерном случае.....	<del>33</del> <u>32</u>
Выводы по второй главе .....	<del>35</del> <u>34</u>
Глава 3. Численный эксперимент.....	<del>36</del> <u>35</u>
3.1 Реализация программного продукта .....	<del>36</del> <u>35</u>
3.2 Одномерный объект .....	<del>37</del> <u>36</u>
3.3 Многомерный объект .....	<del>40</del> <u>38</u>
Выводы по третьей главе .....	<del>63</del> <u>61</u>
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	<del>64</del> <u>62</u>
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК .....	<del>65</del> <u>63</u>

## РЕФЕРАТ

Бакалаврская работа по теме «Разработка алгоритма многомерной оптимизации параметра размытости  $cs$  непараметрического алгоритма идентификации» содержит 64 страниц текстового документа, 42 рисунка, 12 таблиц, 35 формул, 18 использованных источников.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** ЯДЕРНЫЕ ФУНКЦИИ, ПАРАМЕТР РАЗМЫТОСТИ, ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ И НЕПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ, АПРИОРНАЯ ИНФОРМАЦИЯ, МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ.

Объектом исследования в данной работе является многомерный безынерционный объект с запаздыванием, предметом - методы многомерной оптимизации.

Цель работы заключается в повышении точности прогноза непараметрической модели.

Чтобы достичь поставленной цели были поставлены следующие задачи:

1. Провести анализ методов настройки параметра  $cs$ ;
2. Разработать и исследовать алгоритм многомерной оптимизации настройки параметра  $cs$ ;
3. Реализовать алгоритм в виде программного модуля;
4. Повести численные исследования.

Для решения поставленных задач в работе использовались методы параметрического оценивания данных, анализа данных математического моделирования.

## ВВЕДЕНИЕ

Традиционно задачи, связанные с обработкой статистических данных, решаются в предположении о существовании достаточной информации об изучаемых процессах, объектах, свойствах и явлениях. Например, при решении задач идентификации обычно считается, что задана структура объектов с точностью до параметров, которые подлежат определению и считается известным характер взаимодействия помехи с объектом.

В настоящее время при решении задач, связанных с повышением эффективности производства, разработкой новых методов поиска полезных ископаемых, установлением космической радиосвязи, обнаружением радио- и гидролокационных сигналов на фоне помех, совершенствованием диагностики заболеваний, все чаще приходится иметь дело с объектами, структура которых и характеристики возмущений практически не известны. При этом доступная нам априорная информация о распределениях помех носит настолько неопределенный характер (например, класс «всех непрерывных функций распределения»), что для построения математической модели явлений нет оснований воспользоваться тем или иным параметрическим семейством распределений. Таким образом, можно сказать, что основная тенденция развития современной статистической науки заключается в создании математических методов обработки наблюдений при более реалистических, чем классические, предположениях и выражается в стремлении отойти как от параметрических предположений, так и от предположений о независимости наблюдений, которые являются неестественными для многих реальных ситуаций. В этом случае говорят о непараметрической априорной неопределенности.

Проблема решения классических задач обработки сигналов и идентификации систем, получивших широкое распространение в системах радио и гидролокации, при разработке современных автоматизированных систем управления производством и т.д. приобретает особую актуальность в рамках широких условий априорной неопределенности, которую дают

**Отформатировано:** Шрифт: (по умолчанию) + Основной текст (Calibri), 11 пт, не полужирный

**Отформатировано:** Обычный, По левому краю, Отступ: Первая строка: 0 см, междустрочный, одинарный

**Отформатировано:** Шрифт: (по умолчанию) Times New Roman, 14 пт

**Отформатировано:** Шрифт: (по умолчанию) Times New Roman, 14 пт

непараметрические ограничения. Непараметрическое описание моделей физических явлений оказывается более адекватным реально протекающим процессам и охватывает существенно более широкий круг явлений.

## Глава 1. Проблема идентификации дискретно-непрерывных процессов

### 1.1 Постановка задачи идентификации

1.1

В настоящее время понятие модели используется во многих (если не во всех) областях науки и техники, занимающихся решением сложных задач технологии, экономики, социологии, живой природы и прочих. Эти задачи возникают при изучении свойств и особенностей объектов с целью последующего управления, при создании адаптивных систем, в которых на основе построенной модели объекта вырабатываются оптимальные управляющие воздействия. Различные типы моделей рассматриваемых объектов, систем или процессов используются на стадии создания систем управления этими объектами и на стадии их эксплуатации. Это обуславливает актуальность проблемы построения эффективных моделей объектов технических, технологических, экономических или социальных процессов. Построение математических моделей того или иного типа на основе результатов наблюдений за поведением объектов и исследование их свойств составляет основное содержание науки идентификации.

Процедура идентификации системы [15] (рисунок 1) включает в себя три основных компонента:

1. Данные. Входные-выходные данные рассматриваются в процессе проведения целенаправленных идентификационных экспериментов, когда пользователь может определить перечень и моменты измерения сигналов, причем некоторые из входных сигналов могут быть управляемыми. Задача планирования эксперимента состоит в том, чтобы учитывать возможные ограничения, выбрать максимально информативные данные о сигналах системы. В которых пользователь может быть лишен возможности влиять на ход эксперимента и должен опираться на данные нормальной эксплуатации.

Отформатировано: Шрифт: (по умолчанию)  
+ Основной текст (Calibri), 11 пт

Отформатировано: Обычный, По левому краю,  
Отступ: Первая строка: 0 см, междустрочный,  
одинарный

Отформатировано: Шрифт: (по умолчанию)  
+ Основной текст (Calibri), 11 пт, не полужирный

Отформатировано: Обычный, По левому краю,  
междустрочный, одинарный, без нумерации

Отформатировано: Шрифт: (по умолчанию) Times  
New Roman, 14 пт

Отформатировано: Шрифт: (по умолчанию) Times  
New Roman, 14 пт

2. Множество моделей-кандидатов. Устанавливаются посредством фиксации той группы моделей, в пределах которой мы собираемся искать наиболее подходящую модель. Это наиболее важная и трудная часть идентификации. Именно на этом этапе знание формальных свойств моделей необходимо соединить с априорным знанием.

3. Правило оценки степени соответствия испытываемой модели данным наблюдений. Определение на основе данных наблюдений «наилучшей» модели множества. Эта часть есть собственно метод идентификации. Оценка качества модели связана, как правило, с Изучением поведения моделей в процессе их использования для воспроизведения данных.

В результате осуществления всех трех этапов процедуры идентификации мы получаем в неявной форме конкретную модель: одну из множества, которая в соответствии с выбранным критерием наилучшим образом воспроизводит данные наблюдений.

Остается проверить выполняет ли эта модель своё предназначение. Это называется процедурой подтверждения моделей. К ним относятся различные процедуры оценивания соответствия моделей данным наблюдений, априорной информации и поставленной прикладной цели. Неудовлетворительное поведение по каждому критерию заставляет нас отказаться от модели, тогда как хорошее функционирование создает определенную степень доверия к модели. Модель никогда нельзя считать окончательным и истинным описанием системы. Её можно рассматривать как способ достаточно хорошего описания тех аспектов поведения системы, которые для нас представляют наибольший интерес.

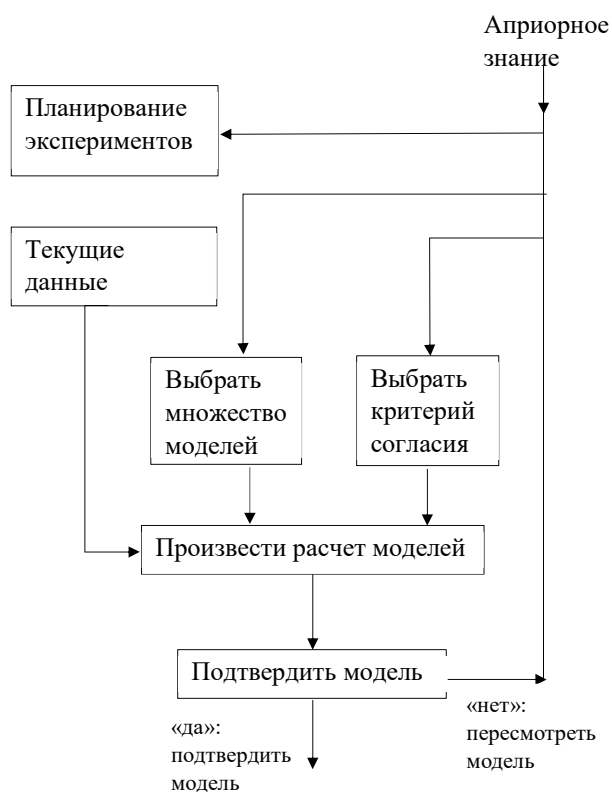


Рисунок 1 – Контур идентификации системы

Вероятно, что первая из найденных моделей не выдержит проверки на этапе подтверждения. Тогда нужно вернуться и пересмотреть шаги процедуры.

Существует несколько причин несоответствия моделей:

- Численный метод не позволяет найти наилучшую по выбранному критерию модель;
- Критерий выбран неудачно;
- В выбранном множестве моделей не оказалось достаточно «хорошего» описания системы;

Отформатировано: Шрифт: (по умолчанию) Times New Roman, 14 пт

Отформатировано: Шрифт: (по умолчанию) Times New Roman, 14 пт



– Множество данных не было достаточно информативным для того, чтобы обеспечить хороший выбор моделей.

Главным в приложениях идентификации является итеративное решение этих вопросов на основе априорной информации и результатов предыдущих попыток.

Задача идентификации сводится, в общем случае, к определению оператора модели, преобразующего входные воздействия объекта в выходные величины. Оператор объекта является его математической формализацией, т.е. математической моделью объекта, и может быть определен в соответствующих пространствах функций. В связи с этим выделяют задачи параметрической и структурной (непараметрической) идентификации.

## 1.2 Параметрические модели безынерционных систем с запаздыванием

На сегодняшний день, при моделировании дискретно-непрерывных процессов, на вершине стоит концепция параметрической идентификации или идентификации в узком смысле. Ее суть заключается в том, что на первом этапе каким-то образом определяется параметрический класс оператора определенного объекта  $A^\alpha$ , например,

$$\bar{x}_\alpha(t) = A^\alpha(u(t), \alpha), \quad (1)$$

где  $A^\alpha$  является параметрической структурой модели, в то же время  $\alpha$  — вектор параметров.

Затем производится оценивание параметров  $\alpha$  на основании полученной выборки  $\{x_i, u_i, i = \overline{1, s}\}$ , в которой  $s$  — является объемом этой самой выборки. Успешность выполнения задачи идентификации в данном случае опирается на то, насколько хорошо был выбран оператор (1).

Отформатировано: Шрифт: (по умолчанию) + Основной текст (Calibri), 11 пт, не полужирный

Отформатировано: Обычный, По левому краю, Отступ: Первая строка: 0 см, междустрочный, одинарный

Отформатировано: Отступ: Первая строка: 0 см

Отформатировано: Шрифт: (по умолчанию) Times New Roman, 14 пт

Отформатировано: Шрифт: (по умолчанию) Times New Roman, 14 пт

Параметрическая идентификация моделей объектов [11] позволяет сразу находить значения коэффициентов модели объекта по измеряемым значениям управляемого  $x$  и управляющего  $u$  сигналов объекта. При этом предполагается, что структура и порядок модели объекта уже известен.

Задача идентификации в узком смысле сводится к оценке параметров объекта по результатам наблюдений за входными и выходными сигналами, полученными в условиях функционирования объекта. Априорная информация об объекте при этом должна быть достаточно велика, внутренняя структура объекта известна и задан класс моделей, к которому можно отнести данный объект. Параметры же объекта должны обеспечивать наибольшую близость значений на выходе, рассчитанных по модели  $i$ , полученных в эксперименте, при одинаковом значении входных данных.

Параметрические модели описываются заданными в явной форме аналитическими зависимостями, содержащими параметры, подлежащие идентификации. Эти зависимости представляют собой параметрические модели конечной размерности, например, дифференциальные уравнения определенного порядка, модели в пространстве состояний. Параметрами являются численные значения величин, определяющих выход модели (например, значения коэффициентов обыкновенных дифференциальных уравнений, начальных условий, коэффициентов передаточных функций). Методами параметрической идентификации определяются неизвестные коэффициенты уравнения объекта или передаточной функции.

Важным преимуществом методов параметрической идентификации является возможность использования рекуррентных алгоритмов, позволяющих проводить текущую идентификацию в реальном времени при номинальных режимах работы объекта. Эти преимущества определили широкое использование методов параметрической идентификации в задачах управления и автоматизации. К таким методам относятся: метод наименьших квадратов, метод максимального правдоподобия и метод стохастической аппроксимации.

В статье [10] излагается подход к решению задач идентификации с учетом неопределенности структуры и параметров модели объекта в условиях переменной задержки измерений выхода для многомерных динамических объектов.

Рассматривается многомерный динамический объект с неопределенными структурой и параметрами модели объекта, с переменной задержкой измерений выхода. Ставится задача – разработать алгоритм идентификации, обеспечивающий учет динамических свойств объекта при нерегулярном измерении выхода.

Представим непрерывный линейный стационарный объект, описываемый с помощью импульсной переходной функции  $h(\alpha)$

$$y(t) = \int_0^n h(\alpha)u(t - \alpha)d(\alpha), \quad (2)$$

где  $u$ ,  $y$  – входящее и выходящее воздействия системы;  $n$  – верхний предел интегрирования, называемый в дальнейшем глубиной модели.

Для дискретных систем уравнение (2) имеет вид

$$y(t) = \sum_{k=0}^n h(k)u(t - k). \quad (3)$$

Предположим, что

$$h(k) = 0 \text{ при } k < 0, \sum_{k=0}^{\infty} |h(k)| < \infty, \lim_{k \rightarrow \infty} h(k) = 0. \quad (4)$$

При наличии шума уравнение (3) запишется в виде

$$y(t) = \sum_{k=0}^n h(k)u(t - k) + v(t), \quad (5)$$

где  $v(t)$  – некоррелируемая с выходом помеха с нулевым средним.

Уравнение для многомерного объекта с несколькими входами  $u_1, u_2, \dots, u_N$  и одним выходом, с учетом (2)-(5), примет вид

$$y(\tau) = \sum_{k=0}^{n_1} h_1(k)u_1(\tau - k) + \sum_{k=0}^{n_2} h_2(k)u_2(\tau - k) + \dots + \sum_{k=0}^{n_N} h_N(k)u_N(\tau - k) + v(\tau), \quad (6)$$

где  $\tau$  – нерегулярные моменты времени;  $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_i = \tau_{i-1} + t_0 + \varepsilon$ ,  $\tau_0 =$

Отформатировано: Отступ: Первая строка: 0 см

Отформатировано: Шрифт: (по умолчанию) Times New Roman, 14 пт

Отформатировано: Шрифт: (по умолчанию) Times New Roman, 14 пт

постоянная составляющая;  $\varepsilon$  – случайная составляющая, ограниченная определенным диапазоном.

Без учета шума уравнение (6) запишем в виде

$$y(\tau) = \sum_{k=0}^{n_1} h_1(k)u_1(\tau - k) + \sum_{k=0}^{n_2} h_2(k)u_2(\tau - k) + \dots + \sum_{k=0}^{n_N} h_N(k)u_N(\tau - k). \quad (7)$$

В качестве критериев идентификации на определенном временном промежутке используются: коэффициент детерминации (доля объясненной дисперсии отклонений зависимой переменной от ее среднего значения)

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_i (y_i - y_i^m)^2}{\sum_i (y_i - \bar{y})^2}, \quad (8)$$

среднеквадратическая ошибка (СКО)

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^M (y_i - y_i^m)^2}{M}}, \quad (9)$$

где  $y_i$  – наблюдаемое значение выходной переменной, а  $y_i^m$  – ее значение, полученное по модели объекта;  $\bar{y}$  – среднее значение наблюдаемой выходной переменной;  $M$  – количество измерений выхода. При этом модель тем больше соответствует исследуемому объекту, чем ближе к единице значение коэффициента детерминации  $R^2$  либо чем ближе к нулю значение СКО.

#### Алгоритм решения поставленной задачи.

Пусть  $\mathbf{u} = [u_1(\tau), \dots, u_1(\tau - n_1), \dots, u_N(\tau), \dots, u_N(\tau - n_N)]^T$  – объединенный вектор входных воздействий размерности  $\sum_{k=1}^N n_k$ , где  $n_i$  – число значений  $i$ -ого входа;  $\mathbf{h} = [h_1(0), \dots, h_1(n_1), \dots, h_N(0), \dots, h_N(n_N)]^T$  – вектор импульсных характеристик той же размерности, компоненты которого отражают вклады соответствующих входных воздействий. Тогда уравнение (7) примет вид:

$$y = \mathbf{u}^T \mathbf{h}. \quad (10)$$

Сформируем вектор  $\mathbf{Y}$  размерности  $q = \sum_{k=1}^N n_k$  из измеренных в нерегулярные моменты времени значений выхода  $y$ ,  $\mathbf{Y} = [y(\tau_1), y(\tau_2), \dots, y(\tau_q)]^T$  и матрицу  $\mathbf{U}$ , содержащую измеренные входы  $u_i$ , соответствующие определенному значению выхода  $y$  из (7)

Отформатировано: Шрифт: не полужирный

Отформатировано: Шрифт: не полужирный

Отформатировано: По ширине, Отступ: Первая строка: 0 см, интервал Перед: 0 пт

Отформатировано: Шрифт: (по умолчанию) Times New Roman, 14 пт

Отформатировано: Шрифт: (по умолчанию) Times New Roman, 14 пт

$$U = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1(\tau_1) & \dots & \mathbf{u}_2(\tau_1) & \dots & \mathbf{u}_N(\tau_1) & \dots & \mathbf{u}_N(\tau_1 - n_N) \\ \mathbf{u}_1(\tau_2) & \dots & \mathbf{u}_2(\tau_2) & \dots & \mathbf{u}_N(\tau_2) & \dots & \mathbf{u}_N(\tau_2 - n_N) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{u}_1(\tau_q) & \dots & \mathbf{u}_2(\tau_q) & \dots & \mathbf{u}_N(\tau_q) & \dots & \mathbf{u}_N(\tau_q - n_N) \end{bmatrix},$$

и запишем матричное уравнение

$$Y = Uh. \quad (11)$$

Введем функцию ошибки

$$E = \bar{Y} - Y = \bar{Y} - Uh,$$

где  $\bar{Y}$  – фактическое измерение выхода, минимизируем целевую функцию:

$$\Psi = E^2 = (\bar{Y} - Uh)^2.$$

Необходимым и достаточным условием нахождения минимума является равенство нулю первой производной  $\frac{d\Psi}{dh} = 0 = U^T(\bar{Y} - Uh)$ , откуда

$$h = \frac{U^T \bar{Y}}{U^T U}. \quad (12)$$

Полученные значения импульсных характеристик верны при отсутствии шумов, но в реальных условиях такая ситуация практически не встречается, поэтому использованы методы идентификации импульсных характеристик  $h_i$  уравнения (6), робастных по отношению к переменной задержке измерения выхода  $y$ , ошибкам измерений входов и выхода. Рассмотрены такие случаи как коррелированность входов, присутствие помехи на входах и выходе, отсутствие информации о глубине модели импульсных характеристик, невозможность учета некоторых из входных воздействий, использование измерений параметров, реально не влияющих на выход. При идентификации объектов, заданных передаточными функциями, применены такие методы как перебор всех доступных входных переменных, метод включения (добавление в модель по одной входной переменной), метод исключения (включение всех доступных для измерения входных переменных и последующее исключение по одному в порядке уменьшения их влияния на выход). В первом случае результат будет наиболее точным, однако необходимо значительное время для вычислений. Метод включения требует меньших временных затрат, но качество модели

может оказаться хуже, когда комбинация нескольких входов влияет на качество модели больше, чем каждый из них в отдельности. В то же время метод исключения эффективнее метода включения. Следует отметить, что для всех этих методов критичным является количество используемых в модели входов, так как ограниченность количества измерений выхода не позволит определить импульсные характеристики для каждого из них.

### 1.3 Непараметрические модели безынерционных систем с запаздыванием

Задача непараметрической идентификации ставится в том случае, когда априорная информация об объекте недостаточна, в связи с чем возникает необходимость определения структуры и вида объекта и задания класса моделей, оценки степени и формы влияния входных переменных на выходные и т. д. В данном случае цель идентификации состоит в том, чтобы оценить оператора на основании выборки:  $\{x_i, u_i, i = \overline{1, S}\}$

$$\bar{x}_s(t) = A_s(u(t), \bar{x}_s, \bar{u}_s), \quad (13)$$

в которой  $\bar{x}_s = (x_1, x_2, \dots, x_S)$ ,  $\bar{u}_s = (u_1, u_2, \dots, u_S)$  — временные векторы. Оценивание оператора  $A_s$  может быть вполне осуществимо при помощи средств непараметрической статистики. Хотелось бы подчеркнуть, что при этом действии нет необходимости в выборе параметрической структуры.

Непараметрическая задача оценивания неизвестных распределений [11] — это задача нахождения процедуры, с помощью которой можно оценивать распределения из довольно широкого класса (например, класса всех непрерывных функций распределения или класса распределений, имеющих ряд производных и т.д.).

Иными словами, главная особенность непараметрических задач состоит в том, что класс распределений не характеризуется конечным числом действительных параметров. Несмотря на "бедность" исходной информации, непараметрические процедуры во многих случаях ненамного проигрывают в

Отформатировано: Отступ: Первая строка: 0 см

Отформатировано: Шрифт: (по умолчанию) Times New Roman, 14 пт

Отформатировано: Шрифт: (по умолчанию) Times New Roman, 14 пт

эффективности параметрическим, если оба типа процедур строятся по данным, соответствующим известной параметрической модели, и намного выигрывают в эффективности, если выбранная параметрическая модель не описывает наблюдаемые данные. Иногда непараметрические процедуры являются асимптотически оптимальными. Следует обратить внимание также и на то, что при решении целого класса задач нелинейной обработки сигналов непараметрические процедуры дают более обзримые результаты, чем параметрические рекуррентные процедуры, связанные с решением нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных или разложением в ряды.

Широкий круг таких задач математической статистики, как оценивание распределений вероятностей и их характеристик, выделение сигналов на фоне помех, а также проверка гипотез и обнаружение разладок, может быть интерпретирован на языке "оценивания" некоторых функционалов от распределений вероятностей наблюдений. Такие функционалы в условиях непараметрической неопределенности являются, как правило, неоцениваемыми по терминологии, введенной, что усложняет исследование статистических свойств их непараметрических оценок по сравнению со случаем оцениваемых функционалов.

#### 1.4 Модели на основе ядерных оценок

Идейно простой подход к представлению последовательности весов [18]  $\{W_{ni}(x)\}_{i=1}^n$  состоит в описании формы весовой функции  $W_{ni}(x)$  посредством функции плотности со скалярным параметром, который реализует размер и форму весов около  $x$ . Эту функцию формы принято называть ядром  $K$ . Ядро – это непрерывная ограниченная симметричная вещественная функция  $K$  с единичным интегралом

$$\int K(u) du = 1. \quad (14)$$

Последовательность весов для ядерных оценок (для одномерного  $x$ ) определяется как

$$W_{ni}(x) = \frac{K_{h_n}(x-X_i)}{\hat{f}_{h_n}(x)} \quad (15)$$

где

$$\hat{f}_{cs_n}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{cs_n}(x - X_i) \quad (16)$$

а

$$K_{cs_n}(u) = \frac{1}{cs_n} K\left(\frac{u}{cs_n}\right) \quad (17)$$

Представляет собой ядро с параметром масштаба  $cs_n$ .

Функция  $\hat{f}_{cs_n}(\cdot)$  часто называют оценкой Надарая –Ватсона.

$$\hat{f}_{cs_n}(x) = \frac{\sum_{i=1}^n y_i K_{cs_n}(x-X_i)}{\sum_{i=1}^n K_{cs_n}(x-X_i)} \quad (18)$$

Форма ядерных весов определяется ядром  $K$ , в то время как размер весов параметризуется посредством переменной  $cs$ , называемой шириной окна.

Нормализация весов  $\hat{f}_{cs_n}(x)$  позволяет адаптироваться к локальной интенсивности переменной  $X$  и, кроме того, гарантирует, что сумма весов равна единице. Можно брать различные ядерные функции, но слишком малые функции могут приводить к машинному нулю, поэтому разумно рассматривать такие ядерные функции, которые равны нулю вне некоторого фиксированного интервала.

Примерами таких ядер могут служить:

– Треугольное ядро:

$$K(u) = \begin{cases} 0,5, & |u| \leq 1; \\ 0, & |u| > 1. \end{cases} \quad (19)$$

– Параболическое ядро:

$$K(u) = \begin{cases} 0,75(1-u)^2, & |u| \leq 1; \\ 0, & |u| > 1. \end{cases} \quad (20)$$

– Прямоугольное ядро:

$$K(u) = \begin{cases} 1 - |u|, & |u| \leq 1; \\ 0, & |u| > 1. \end{cases} \quad (21)$$

Для многомерной предикторной переменной  $X_i = (X_{i1}, \dots, X_{id})$  можно использовать произведение одномерных ядер



$$K(u_1, \dots, u_d) = \prod_{j=1}^d K(u_j) \quad (22)$$

Тогда в приведенном случае ядерные веса задаются соотношением:

$$W_{ni}(x) = \frac{\prod_{j=1}^d K_h(x_j - X_{ij})}{\hat{f}_{cs}(x)} \quad (23)$$

Тогда оценка Надарая-Ватсона примет вид

$$\hat{f}_{cs_n}(x_1, \dots, x_d) = \frac{\prod_{j=1}^d \sum_{i=1}^n Y_i \cdot K_{cs_n}(x_j - X_{ij})}{\prod_{j=1}^d \sum_{i=1}^n K_{cs_n}(x_j - X_{ij})} \quad (24)$$

### Оценки типа Надарая – Ватсона функционалов от условных распределений

С содержательной точки зрения вместо оценок «базовых» функционалов  $a_i(x) = \int g_i(y) f(y, x) dy$ ,  $i = \overline{1, s+1}$ ,  $g_{s+1} \equiv 1$ , и их производных, вводимых в [14], можно сразу же рассматривать оценки условных функционалов  $b_i(x) = \frac{a_i(x)}{p(x)} = \frac{a_i(x)}{a_{s+1}(x)} = \int g_i(y) f(y|x) dy$ ,  $i = \overline{1, s}$ . Здесь  $g_1, \dots, g_s$  – известные функции,  $p(\cdot)$  – плотность распределения входной переменной  $X$ ,  $f(\cdot|x) = \frac{f(x, \cdot)}{p(x)}$  – условная плотность распределения зависимой переменной  $Y$ .

Рассмотрим среднеквадратическую ошибку (СКО) оценок типа Надарая - Ватсона условных функционалов в случае независимых одинаково распределенных наблюдений  $(X_i, Y_i)$ :

$$b_{1n}(x) = \frac{\sum_{l=1}^n g_1(Y_l) \cdot K\left(\frac{x-X_l}{cs_n}\right)}{\sum_{l=1}^n K\left(\frac{x-X_l}{cs_n}\right)} \quad (25)$$

пользуясь методикой, предложенной Кошкиным Г.М.

Согласно этому, вначале находим СКО и ковариации оценок базовых функционалов  $a_{in} = \frac{1}{ncs_n} \sum_{l=1}^n g_l(Y_l) \cdot K\left(\frac{x-X_l}{cs_n}\right)$ , а затем, применяя теоремы сходимости (следствия 1.9.1 и 1.9.3 в [8]), находим асимптотическое смещение и дисперсию оценки  $b_{1n}(x)$ . В нашем случае функция  $H(t) = \frac{t_1}{t_2}$ ,  $t_1 = a_{1n}(x)$ ,  $t_2 = a_{2n}(x)$ ,  $s = 2$ . Будем считать, что  $K(\cdot)$  – ограниченное симметричное ядро-плотность,  $g_1(\cdot)$  и  $p(\cdot)$  – ограниченные функции,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (cs_n + \frac{1}{ncs_n}) = 0$ , плотность

Отформатировано: Шрифт: (по умолчанию) Times New Roman, 14 пт

Отформатировано: Шрифт: (по умолчанию) Times New Roman, 14 пт

$p(\cdot)$  и функция  $a_1(\cdot)$  дважды непрерывно дифференцируемы, а функция  $\int g_1^2(y)f(\cdot, y)dy$  непрерывна в точке  $x$ ,  $p(x) \neq 0$ . Тогда при  $n \rightarrow \infty$

$$E(b_{1n}(x)) = b_1(x) + cs_n^2 \frac{\int x^2 K(x) dx}{p(x)} \left[ \frac{1}{2} b_1''(x) p(x) + b_1'(x) p'(x) \right] + o(cs_n^2),$$

$$Var(b_{1n}(x)) = \frac{\int g_1^2(x) f(y|x) dy - b_1^2(x)}{ncs_n p(x)} \int K^2(u) du + o\left(\frac{1}{ncs_n}\right).$$

При исследовании асимптотического смещения оценок базовых функционалов (см., например, [13, с. 41]) нетрудно видеть, что, отказавшись от условия неотрицательности ядра, можно повысить скорость сходимости смещения оценок. Пусть ядро  $K(\cdot)$  дополнительно удовлетворяет условиям

$$\int |x^v K(x)| dx < \infty, T_j = \int x^j K(x) dx = 0, j = 1, \dots, v-1, T \neq 0,$$

где  $v$  – произвольное четное число, которое обычно называется порядком ядра. Тогда при условии непрерывной дифференцируемости до  $v$ -ого порядка включительно функций  $p(\cdot)$  и  $a_1(\cdot)$

$$E(b_{1n}(x)) = b_1(x) + cs_n^v \frac{\int x^v K(x) dx}{p(x)v!} \left[ \frac{1}{2} a_1^{(v)}(x) p(x) - b_1(x) p^{(v)}(x) \right] + o(cs_n^v).$$

Асимптотическое поведение дисперсии при этом не меняется.

Очевидно, что при  $v > 2$  ядро принимает отрицательные значения. Знакопеременные ядра можно строить различными методами [15, с. 95] или, например, используя рекуррентную формулу, позволяющую получать ядра порядка  $v+2$ , зная ядра  $v$ -ого порядка при условии их дифференцируемости:

$$K_{v+2}(x) = \frac{3}{2} K_v(x) + \frac{1}{2} x K_v'(x),$$

где  $K_v$  – ядро порядка  $v$ . Использование знакопеременного ядра позволяет повысить скорость сходимости смещения оценок (25), однако, с другой стороны, приводит к таким трудностям интерпретации результатов, что оценка плотности может не обладать свойствами плотности и может выглядеть искусственным приемом.

### Нахождение переменной ширины окна при построении непараметрических моделей на основе оценки Надарая-Ватсона.

В случае непараметрического моделирования выходной величины, меняющей характер зависимости, возникает трудность настройки параметра размытости, например, в случае моделирования периодических процессов с переменной частотой и (или) амплитудой. Одним из подходов, позволяющих справиться с данной проблемой, является использование ансамблей непараметрических моделей [7]. Ансамблем называется несколько моделей одного или разных типов, составленных по очереди. Причем, каждая из последующих моделей, добавляемых в ансамбль, аппроксимирует ошибку ансамбля на предыдущей итерации.

Параметр  $cs$  называется шириной окна сглаживания. Выбор ширины окна оказывает основное влияние на качество восстановления зависимости. При слишком узком окне функция  $\hat{f}_{cs_n}(x)$  стремится пройти через все точки обучающей выборки, что делает оценку чувствительной к помехам измерения. При слишком большом значении  $cs$  функция становится излишне сглаженной и слабо отражает характер исходной зависимости. Проблема данного подхода заключается в том, что подобная оценка в некоторых случаях не способна должным образом аппроксимировать искомую зависимость, например, когда зависимость имеет периодический характер с переменной частотой и амплитудой.

Оценка регрессии с использованием адаптивной ширины окна строится в предположении функциональной зависимости ширины окна от значения входной переменной и имеет следующий вид

$$\hat{f}_{cs_n}(x) = \frac{\sum_{i=1}^n y_i K_{cs_n}(\frac{x-X_i}{cs_n(x)})}{\sum_{i=1}^n K_{cs_n}(\frac{x-X_i}{cs_n(x)})} \quad (26)$$

Необходимо найти такую функцию  $cs(x)$ , которая обеспечивала бы хорошее качество аппроксимации во всех точках обучающей выборки. Для нахождения данной функции использовалась следующая эвристика. Первоначально генерируется множество значений параметра ширины окна  $CS = \{cs_j^*\}_{j=0}^{T-1}$ , например, по формуле  $cs_j^* = cs_0^* \alpha^j$ , где  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $j$  – показатель

степени. Основная идея заключается в том, что данное множество должно обеспечивать достаточное разнообразие значений. Иными словами, в нем должны присутствовать такие значения параметра, которые позволяют построить модель с хорошим качеством аппроксимации на каком-либо фрагменте обучающей выборки. Чем больше изменений характера зависимости претерпевает исходная функция, тем лучше должен быть охват значений параметра ширины окна множеством CS. В таком случае имеет смысл брать значение параметра  $\alpha$  близким к единице. Значения  $cs_j^*$  не должны быть меньше минимальной ширины окна, при которой в любой точке определения функции в окно попадает хотя бы одна точка обучающей выборки. Значение  $cs_0^*$  рекомендуется брать достаточно большим, при котором происходит чрезмерное сглаживание.

После этого строятся непараметрические модели с различной шириной окна  $cs_j^*$ . В каждой точке  $x_i$  выбираем такое  $cs_i = cs_j^* \in CS$ , при котором в  $\varepsilon$ -окрестности этой точки (множество  $\{x_j \mid \rho(x_i, x_j) < \varepsilon\}$ ) непараметрическая модель даёт наименьший средний модуль ошибки (29). Для вычисления среднего модуля ошибки можно воспользоваться непараметрической моделью с прямоугольным ядром и шириной окна равной  $\varepsilon$  (27, 28). В случае выбора малого значения  $\varepsilon$  ширина окна будет сильно зашумлена, что скажется на итоговой модели. Выбор больших значений приводит к тому, что на участках, где характер исходной зависимости меняется, значения функции ширины окна меняются слишком медленно. В качестве значения параметра  $\varepsilon$  можно взять оптимальное по среднеквадратичному критерию ошибки значение ширины окна  $cs$  при использовании непараметрической модели с постоянной шириной окна.

$$e_j^\varepsilon(x) = \frac{\sum_{i=1}^l |y_i - \hat{f}_{cs_j}(x_i)| K\left(\frac{x-x_i}{\varepsilon}\right)}{\sum_{i=1}^l K\left(\frac{x-x_i}{\varepsilon}\right)} \quad (27)$$

$$e_{i,j} = e_j(x_i) \quad (28)$$

$$cs_i = cs_{K_i}^*, \text{ где } K_i = \operatorname{argmax}_j (e_{i,j}^\varepsilon) \quad (29)$$

В завершение строится модель регрессии  $cs(x)$  по имеющимся точкам  $\{x_i, cs_i\}$ ,  $i = \overline{1, l}$ . При восстановлении значения в новой точке  $x$ , сначала находится значение предпочтительной ширины окна в этой точке  $cs(x)$  и затем вычисляется оценка регрессии по формуле (26).

### Выводы по первой главе

Исследуется проблема моделирования дискретно-непрерывных процессов в пространстве входных-выходных переменных. Моделирование данных процессов может осуществляться при помощи различных параметрических и непараметрических методов. Рассмотрено моделирование при помощи непараметрических методов. Такое решение было принято ввиду того, что непараметрическая теория, в отличие от параметрической теории, предполагает, что известны только качественные характеристики процесса. Зачастую, моделируемые объекты обладают неизвестной, сложной структурой. Учитывая эти факты, использование и развитие непараметрической теории продолжает быть актуальной задачей современности. При построении модели объекта при помощи ядерных оценок, важным параметром является коэффициент размытости ядра, а также нахождение его оптимального значения. некорректный выбор ширины окна усреднения негативно отражается на конечном результате оценки стоимости объекта оценки, причем негативное влияние проявляется по-разному. Так, в случае заниженного значения ширины окна усреднения негативное влияние кратковременных случайных возмущений приводит к высокой колеблемости результата усреднения и, как следствие, к значительному расширению доверительного интервала стоимости под риском. Это создает большую неопределенность конечного результата оценки стоимости объекта и может привести к тому, что результат вообще не будет иметь практического значения. В случае же завышенного значения ширины окна усреднения, наоборот, из результатов обработки «выпадают» локальные динамические тренды (это временной промежуток, на котором функция среднего значения

входной генеральной совокупности монотонно возрастает либо убывает) общего тренда входной генеральной совокупности. Можно утверждать, что результат будет искажен. Отсюда можно заключить, что ширина окна усреднения при использовании скользящих оценок является важным параметром всей процедуры и требует специального исследования. Как правило, это выполняется перебором различных размеров окна усреднения и принятия решения на основе визуального анализа результатов обработки.

## Глава 2. Оптимизация параметра размытости ядерной функции

### 2.1 Методы скользящего экзамена

#### 2.1

Задачи непараметрического оценивания плотности вероятности, ее производных и функционалов от нее относятся к одной из наиболее актуальных проблем современной математической статистики и ее приложений. Необходимость решения подобных задач вызвана потребностями практики в экономике и производстве, где математические модели объектов и процессов приходится строить в условиях значительной априорной неопределенности. В стохастических моделях, использующих кривые регрессии [5], уравнения фильтрации [8], алгоритмы оптимального управления [16] часто приходится по наблюдениям восстанавливать плотности распределения, производные плотности и функционалы от неизвестных распределений. Например, в теории непараметрического оценивания сигналов [8] одной из важных статистических характеристик, которую необходимо оценивать по наблюдениям, является логарифмическая производная плотности. Последняя, представляющая собой отношение производной плотности к самой плотности наблюдений, входит в уравнения оптимальной фильтрации и интерполяции. Поэтому от точности оценивания этой характеристики зависит точность решения задач обработки сигналов. Известно, что при оценивании плотности наибольшее влияние на точность оценивания оказывает параметр сглаживания или, как его еще называют, ширина окна (bandwidth) ядерных функций. При этом форма ядра сказывается незначительно. При оценивании же производных плотности выбор ядерных функций уже оказывает существенное влияние [1]. К настоящему времени известны несколько способов оценивания ширины окна ядерных функций по наблюдаемой выборке, но к основным из них, по-видимому, следует отнести метод кросс-валидации  $CV$  [2, 3].

Кросс-валидация, которую иногда называют перекрестной проверкой, это техника валидации модели для проверки того, насколько успешно применяемый

**Отформатировано:** Шрифт: (по умолчанию) + Основной текст (Calibri), 11 пт, не полужирный

**Отформатировано:** Обычный, По левому краю, Отступ: Слева: 0 см, междустрочный, одинарный, Поз.табуляции: нет в 1,25 см

**Отформатировано:** Шрифт: (по умолчанию) + Основной текст (Calibri), 11 пт, не полужирный

**Отформатировано:** Обычный, междустрочный, одинарный, без нумерации

**Отформатировано:** Шрифт: (по умолчанию) Times New Roman, 14 пт

**Отформатировано:** Шрифт: (по умолчанию) Times New Roman, 14 пт

в модели статистический анализ способен работать на независимом наборе данных. Обычно кросс-валидация используется в ситуациях, где целью является предсказание, и хотелось бы оценить, насколько предсказывающая модель способна работать на практике. Один цикл кросс-валидации включает разбиение набора данных на части, затем построение модели на одной части (называемой тренировочным набором), и валидация модели на другой части (называемой тестовым набором). Чтобы уменьшить разброс результатов, разные циклы кросс-валидации проводятся на разных разбиениях, а результаты валидации усредняются по всем циклам.

Кросс-валидация важна для защиты от гипотез, навязанных данными («ошибки третьего рода»), особенно когда получение дополнительных данных затруднительно или невозможно.

Предположим, у нас есть модель с одним или несколькими неизвестными параметрами, и набор данных, на котором эта модель может быть оптимизирована (тренировочный набор). Процесс подгонки оптимизирует параметры модели и делает модель настолько подходящей под тренировочный набор, насколько это возможно. Если мы теперь возьмем независимый образец данных для валидации модели из того же источника, откуда мы взяли тренировочный набор данных, обычно обнаруживается, что модель описывает тестовые данные хуже, чем тренировочный набор. Это называется перепогонкой (overfitting), и особенно часто встречается в ситуациях, когда размер тренировочного набора невелик, или когда число параметров в модели велико. Кросс-валидация это способ оценить способность модели работать на гипотетическом тестовом наборе, когда такой набор в явном виде получить невозможно.

### **Распространенные типы кросс-валидации**

- Кросс-валидация по K блокам (K-fold cross-validation)

В этом случае исходный набор данных разбивается на K одинаковых по размеру блока. Из K блоков один оставляется для тестирования модели, а остающиеся K-1 блока используются как тренировочный набор. Процесс



повторяется  $K$  раз, и каждый из блоков используется один раз как тестовый набор. Получаются  $K$  результатов, по одному на каждый блок, они усредняются или комбинируются каким-либо другим способом, и дают одну оценку. Преимущество такого способа перед случайным сэмплением (random subsampling) в том, что все наблюдения используются и для тренировки, и для тестирования модели, и каждое наблюдение используется для тестирования в точности один раз. Часто используется кросс-валидация на 10 блоках, но каких-то определенных рекомендаций по выбору числа блоков нет.

В послынной кросс-валидации блоки выбираются таким образом, что среднее значение ответа модели примерно равно по всем блокам.

– Валидация последовательным случайным сэмплением (random subsampling).

Этот метод случайным образом разбивает набор данных на тренировочный и тестовый наборы. Для каждого такого разбиения, модель подгоняется под тренировочные данные, а точность предсказания оценивается на тестовом наборе. Результаты затем усредняются по всем разбиениям. Преимущество такого метода перед кросс-валидацией на  $K$  блоках в том, что пропорции тренировочного и тестового наборов не зависят от числа повторений (блоков). Недостаток метода в том, что некоторые наблюдения могут ни разу не попасть в тестовый набор, тогда как другие могут попасть в него более, чем один раз. Другими словами, тестовые наборы могут перекрываться. Кроме того, поскольку разбиения проводятся случайно, результаты будут отличаться в случае повторного анализа.

В послынном варианте этого метода, случайные выборки генерируются таким способом, при котором средний ответ модели равен по тренировочному и тестовому наборам. Это особенно полезно, когда ответ модели бинарен, с неравными пропорциями ответов по данным.

– Поэлементная кросс-валидация (Leave-one-out, LOO)

Здесь отдельное наблюдение используется в качестве тестового набора данных, а остальные наблюдения из исходного набора – в качестве тренировочного. Цикл повторяется, пока каждое наблюдение не будет использовано один раз в качестве тестового. Это то же самое, что и K-блочная кросс-валидация, где K равно числу наблюдений в исходном наборе данных.

### Оценка соответствия модели

Цель кросс-валидации в том, чтобы оценить ожидаемый уровень соответствия модели данным, независимым от тех данных, на которых модель тренировалась. Она может использоваться для оценки любой количественной меры соответствия, подходящей для данных и модели. Например, для задачи бинарной классификации, каждый случай в тестовом наборе будет предсказан правильно или неправильно. В этой ситуации коэффициент ошибки может быть использован в качестве оценки соответствия, хотя могут использоваться и другие оценки. Если предсказываемое значение распределено непрерывно, для оценки соответствия может использоваться среднеквадратичная ошибка, корень из среднеквадратичной ошибки или медианное абсолютное отклонение.

### Применения

Кросс-валидация может использоваться для сравнения результатов различных процедур предсказывающего моделирования. Например, предположим, что мы интересуемся оптическим распознаванием символов, и рассматриваем варианты использования либо поддерживающих векторов (Support Vector Machines, SVM), либо k ближайших соседей (k nearest neighbors, KNN). С помощью кросс-валидации мы могли бы объективно сравнить эти два метода в терминах относительных коэффициентов их ошибок классификаций. Если мы будем просто сравнивать эти методы по их ошибкам на тренировочной выборке, KNN скорее всего покажет себя лучше, поскольку он более гибок и следовательно более склонен к переобучению по сравнению с SVM.

Кросс-валидация также может использоваться для выбора параметров. Предположим, у нас есть 20 параметров, которые мы могли бы использовать в модели. Задача – выбрать параметры, использование которых даст модель с

лучшими предсказывающими способностями. Если мы будем сравнивать подмножества параметров по их ошибкам на тестовом наборе, лучшие результаты получатся при использовании всех параметров. Однако с кросс-валидацией, модель с лучшей способностью к обобщению обычно включает только некоторое подмножество параметров, которые достаточно информативны.

### Вопросы вычислительной производительности

Большинство форм кросс-валидации достаточно просты для реализации, если имеется готовая реализация метода предсказания. В частности, метод предсказания нужен только в виде «черного ящика», **нет нужды лезть в детали** его реализации. Если метод предсказания достаточно ресурсоемок в тренировке, кросс-валидация может быть медленной, поскольку тренировка выполняется последовательно много раз. В некоторых случаях, таких как метод наименьших квадратов или ядерная регрессия, кросс-валидация может быть существенно ускорена предварительным вычислением некоторых значений, которые используются повторно на тренировке, или используя «правила обновления», такие как формулу Sherman-Morrison. Однако нужно быть осторожным, чтобы обеспечить полное отделение валидационного набора данных от тренировочного, иначе может случиться смещение (bias). Крайний пример ускорения кросс-валидации случается в случае линейной регрессии, где результаты кросс-валидации имеют явную аналитическую форму, известную как PRESS (prediction residual error sum of squares).

Ограничения и неверное использование кросс-валидации. Кросс-валидация дает значимые результаты только когда тренировочный набор данных и тестовый набор данных берутся из одного источника, из одной популяции. В многих применениях предсказательных моделей структура изучаемой системы меняется со временем. Это может наводить систематические отклонения тренировочного и валидационного наборов данных. К примеру, если модель для предсказания цены акции тренируется на данных из определенного пятилетнего периода, нереалистично рассматривать последующий пятилетний

Отформатировано: выделение цветом

Отформатировано: Шрифт: (по умолчанию) Times New Roman, 14 пт

Отформатировано: Шрифт: (по умолчанию) Times New Roman, 14 пт

период как выборку из той же самой популяции. Если выполняется правильно, и наборы данных из одной популяции, кросс-валидация дает результат практически без смещений (bias). Однако, есть много способов использовать кросс-валидацию неправильно. В этом случае ошибка предсказания на реальном валидационном наборе данных скорее всего будет намного хуже, чем ожидается по результатам кросс-валидации.

## 2.2 Методы оптимизации первого порядка для отыскания оптимального параметра размытости $cs$

Задача оптимизации [17] состоит в выборе наилучших планов. Не смотря на смысловое разнообразие задач, они сводятся к тому, чтобы найти значение переменных, обращающих в минимум или максимум значение целевой функции.

Рассмотрим вначале самый простой случай, когда оптимизация осуществляется только по одной переменной и функция  $I$  является одноэкстремальной, т.е. унимодальной функцией. Однопараметрическая оптимизация часто является составной частью методов оптимизации в пространстве многих переменных. Например, после того как найдено направление поиска (в пространстве многих переменных), оптимизация вдоль этого направления представляет собой оптимизацию относительно одной переменной. Имеется функция одной переменной. Необходимо найти ее минимум при  $x$ , изменяющемся в интервале  $[a, b]$ :  $I(x) = \min$ . Непрерывная функция  $I(x)$  с минимумом является унимодальной на интервале  $[a, b]$ , если существует такая точка  $x^0 \in [a, b]$ , что на отрезке  $[a, x^0]$  функция  $I(x)$  убывает, а на отрезке  $[x^0, b]$  возрастает. Строго выпуклая функция является примером унимодальной функции.

Основное свойство унимодальной функции, используемое в методах поиска ее минимума, состоит в том, что вычисление двух любых значений  $I(x^1)$ ,  $I(x^2)$  из интервала  $[a, b]$  (причем  $x^1 \neq x^2$ ) позволяет уменьшить интервал локализации точки минимума  $x^0$ .

– Метод деления отрезка пополам;

Метод позволяет исключать на каждой итерации в точности половину интервала. Иногда этот метод называют трехточечным поиском на равных интервалах, поскольку его реализация основана на выборе трех пробных точек, равномерно распределенных в интервале поиска.

Шаг 1. Положить  $x^m = \frac{a+b}{2}$  и  $L = b - a$ . Вычислить значение  $I(x^m)$

Шаг 2. Положить  $x^1 = a + \frac{L}{4}$  и  $x^2 = b - \frac{L}{4}$ . Точки  $x^1, x^2, x^m$  делят отрезок  $[a, b]$  на четыре равные части. Вычислить значения  $I(x^1), I(x^2)$ .

Шаг 3. Сравнить  $I(x^m)$  и  $I(x^1)$ . Если  $I(x^1) < I(x^m)$ , исключить интервал  $(x^m, b]$ , положив  $b = x^m$ . Средней точкой нового интервала поиска становится точка  $x^1$ . Следовательно, необходимо положить  $x^m = x^1$ . Перейти к шагу 5. Если  $I(x^1) \geq I(x^m)$ , перейти к шагу 4.

Шаг 4. Сравнить  $I(x^m)$  и  $I(x^2)$ . Если  $I(x^2) \geq I(x^m)$ , исключить интервал  $[a, x^m)$ , положив  $a = x^m$ . Так как средней точкой нового интервала становится точка  $x^2$ , положить  $x^m = x^2$ . Перейти к шагу 5. Если  $I(x^2) \leq I(x^m)$ , то исключить интервалы  $[a, x^1), (x^2, b]$  и положить  $b = x^2$  и  $a = x^1$ . Заметим,  $x^m$  продолжает оставаться средней точкой нового интервала. Перейти к шагу 5.

Шаг 5. Вычислить  $L = b - a$ . Если величина  $|L|$  мала, закончить поиск. В противном случае вернуться к шагу 2.

Особенности метода:

1) На каждой итерации алгоритма исключается в точности половина интервала поиска.

2) Средняя точка последовательно получаемых интервалов всегда совпадает с одной из пробных точек  $x^1, x^2, x^m$ , найденных на предыдущей итерации. Следовательно, на каждой итерации требуется не более двух вычислений значения функции.

3) Если проведено  $n$  вычислений значения функции, то длина полученного интервала составляет  $\frac{1}{2^{n/2}}$  величины исходного интервала.

– Метод золотого сечения;

Золотым сечением отрезка называют деление его на две неравные части так, что отношение длины всего отрезка к длине большей части равно отношению длины большей части к длине меньшей части отрезка.

На рисунке 2 точки  $x^1$  и  $x^2$  осуществляют золотое сечение отрезка  $[a, b]$ . Оказывается, что точка  $x^1$  осуществляет золотое сечение отрезка  $[a, x^2]$ , а точка  $x^2$  - отрезка  $[x^1, b]$ . Этот факт позволяет на каждой итерации (за исключением первой) добавлять только по одной экспериментальной точке (с учетом золотого сечения). Итерационная процедура сокращения отрезка  $[a, b]$  выглядит следующим образом.

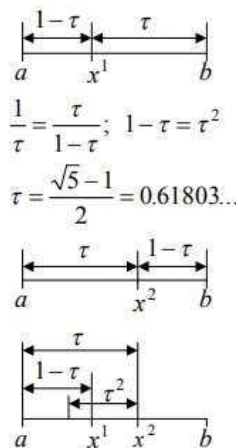


Рисунок 2 – Метод золотого сечения

В точках  $x^1$  и  $x^2$

$$x^1 = a + \frac{3 - \sqrt{5}}{2}(b - a) = a + 0.381966(b - a)$$

$$x^2 = a + \frac{\sqrt{5} - 1}{2}(b - a) = a + 0.621033(b - a)$$

золотого сечения вычисляется минимизируемая функция  $I(x^1), I(x^2)$ .

Если  $I(x^1) \leq I(x^2)$ , то принимается  $a_1 = a, b_1 = x^2, \bar{x}^2 = x^1$ .

Если же  $I(x^1) > I(x^2)$ , то  $a_1 = x^1, b_1 = b, \bar{x}^2 = x^2$ .

Отформатировано: Шрифт: (по умолчанию) Times New Roman, 14 пт

Отформатировано: Шрифт: (по умолчанию) Times New Roman, 14 пт

Отрезок  $[a_1, b_1]$  содержит  $x_0$ , его длина равна  $b_1 - a_1 = \left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right](b - a)$ .  
 Внутри  $[a_1, b_1]$  содержится точка  $\bar{x}^2$  со значением в ней целевой функции  $I(\bar{x}^2) = \min\{I(x^1), I(x^2)\}$ . Точка  $\bar{x}^2$  производит золотое сечение отрезка  $[a_1, b_1]$ .

На  $n$ -м шаге после вычисления  $I(x^1), I(x^2), I(x^{n+1})$  найден отрезок  $[a_n, b_n]$ , включающий  $x^0$ . Точка  $\bar{x}^{n+1}$  такая, что  $I(\bar{x}^{n+1}) = \min I(x^i), i = \overline{1, n+1}, n \geq 1, b_n - a_n = \left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]^n (b - a)$ .

Следующей является точка  $x^{n+2} = b_n + a_n - \bar{x}^{n+1}$ , которая производит золотое сечение отрезка  $[a_n, b_n]$ . Пусть для определенности  $a_n < x^{n+2} < \bar{x}^{n+1} < b_n$ . Случай  $\bar{x}^{n+1} < x^{n+2}$  рассматривается аналогично.

Если  $I(x^{n+2}) \leq I(\bar{x}^{n+1})$ , то полагаем  $a_{n+1} = a_n, b_{n+1} = \bar{x}^{n+1}, \bar{x}^{n+2} = x^{n+2}$ .

Если  $I(x^{n+2}) > I(\bar{x}^{n+1})$ , то  $a_{n+1} = x^{n+2}, b_{n+1} = b_n, \bar{x}^{n+2} = \bar{x}^{n+1}$ .

Новый отрезок  $[a_{n+1}, b_{n+1}]$  длиной  $b_{n+1} - a_{n+1} = \left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]^{n+1} (b - a)$  содержит  $x^0$ . Точка  $\bar{x}^{n+2}$  производит золотое сечение отрезка  $[a_{n+1}, b_{n+1}]$  и  $I(\bar{x}^{n+2}) = \min\{I(x^i), i = \overline{1, n+2}\} = \min\{I(x^{n+2}), I(\bar{x}^{n+1})\}$ .

По заданной величине  $\delta$  точности поиска  $x^0$  из равенства  $\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]^n (b - a) = \delta$  вычисляется необходимое число шагов  $n$ . Для существенного уменьшения погрешности вычисления точек  $x^n (n \geq 2)$  необходимо вместо использования формулы  $x^{n+2} = b_n + a_n - \bar{x}^{n+1}$  произвести непосредственное золотое сечение отрезка  $[a_n, b_n]$  и в качестве  $x^{n+2}$  взять ту из точек  $a_n + (b_n - a_n)(3 - \sqrt{5}), a_n + (b_n - a_n)(\sqrt{5} - 1)$ , которая наиболее удалена от  $\bar{x}^{n+1}$ .

Метод золотого сечения оказывается более эффективным, поскольку он требует меньшего числа измерений функции для достижения одной и той же заданной функции.

- Метод с использованием квадратичной аппроксимации.

Отформатировано: Шрифт: (по умолчанию) Times New Roman, 14 пт

Отформатировано: Шрифт: (по умолчанию) Times New Roman, 14 пт

При реализации метода оценивания функции  $I(x)$  с использованием квадратичной аппроксимации предполагается, что на ограниченном интервале можно аппроксимировать функцию  $I(x)$  квадратичным полиномом, а затем использовать аппроксимирующую функцию для оценивания координаты точки истинного минимума функции  $I(x)$ . Если задана последовательность точек  $x^1, x^2, x^3$   $[a, b]$  и известны значения функции  $I^1 \equiv I(x^1), I^2 \equiv I(x^2), I^3 \equiv I(x^3)$ , то можно определить три коэффициента  $a_0, a_1, a_2$  из условия, что значения квадратичной функции

$$q(x) = a_0 + a_1(x - x^1) + a_2(x - x^2)$$

совпадут со значениями  $I(x)$  в трех указанных точках.

Из условия  $I^1 \equiv I(x^1) = q(x^1) = a_0$  находим коэффициент  $a_0 = I^1$ . Далее из условия  $I^2 \equiv I(x^2) = q(x^2) = I^1 + a_1(x^2 - x^1)$  получаем  $a_1 = \frac{I^2 - I^1}{x^2 - x^1}$ .

Наконец, при  $x = x^3$  имеем уравнение  $I^3 \equiv I(x^3) = q(x^3) = I^1 - \frac{I^2 - I^1}{x^2 - x^1}(x^3 - x^1) + a_2(x^3 - x^1)(x^3 - x^2)$ , из которого находим коэффициент:

$$a_2 = \frac{1}{x^3 - x^2} \left( \frac{I^3 - I^1}{x^3 - x^1} - \frac{I^2 - I^1}{x^2 - x^1} \right) \equiv \frac{1}{x^3 - x^2} \left( \frac{I^3 - I^1}{x^3 - x^1} - a_1 \right).$$

Находим теперь точку  $\bar{x}$ , обеспечивающую минимум квадратичной аппроксимации:

$$\frac{dq}{dx} = a_1 + a_2(x - x^2) + a_2(x - x^1) = 0, 2a_2x = a_2(x^1 + x^2) - a_1, \bar{x} = \frac{x^1 + x^2}{2} - \frac{a_1}{2a_2}.$$

Можно ожидать, что величина  $\bar{x}$  является приемлемой оценкой координаты точки истинного оптимума  $x^0$ . На следующей итерации рассматриваются также три точки:  $\bar{x}$  и две из трех ранее рассматриваемых точек, в которых функция  $I(x)$  принимает меньшие значения.

Если  $\bar{x}$  выходит за границу допустимого интервала, то в качестве решения следует брать граничное значение.

Отформатировано: Шрифт: (по умолчанию) Times New Roman, 14 пт

Отформатировано: Шрифт: (по умолчанию) Times New Roman, 14 пт



### 2.3 Оптимизация параметра размытости $cs$ в многомерном случае

Технический прогресс порождает необходимость разработки новых композитов с заранее заданными свойствами, технологии их производства и методов расчета [9]. Современная наука о таких материалах представляется чрезвычайно разветвленной и далекой от своего завершения. Экспериментальное определение свойств композиционных материалов требует большого объема дорогостоящих исследований. Возникает целесообразность автономных исследований отдельных подсистем в иерархической структуре и построения их теоретических моделей при конструировании композитов. Проектирование композитов как сложных систем должно производиться с соблюдением основных принципов системного подхода: - иерархичность – каждая система или элемент рассматривается как отдельная система; - структурность – возможность описания системы через описание связей между ее элементами; - взаимозависимость – проявление свойств системы только при взаимодействии с внешней средой; - множественность описания – описание системы множеством взаимодействующих математических моделей; - проектирование части с учетом целого. Центральным этапом является построение математических моделей отдельных подсистем и описание их взаимодействия.

В связи с размытостью представлений об идентификации как об особом типе человеческой деятельности идентификационный подход к настоящему времени еще окончательно не оформился. Пока в нём доминирует математический уровень строгости; математический язык рассматривается как наилучшее средство представления системы. В большинстве работ ограничиваются лишь постановкой и исследованием математических задач и не затрагиваются содержательные и человеческие аспекты практической идентификации. Подобная избирательность во многом определяется тем, что при значительном объеме представлений о потенциально возможных способах исследователь не в состоянии разработать детальную общую схему

идентификации, ориентированную на использование определенной системы научных понятий, достаточных с точки зрения большинства исследователей для обоснования. Не сформулированы пока и понятия, отражающие роль человека при определении целей идентификации.

Нетривиальная задача выбора математической модели для описания свойства связана со структурной идентификацией (выбор класса моделей); решением общей задачи идентификации в выбранном классе моделей с последующим решением частной задачи идентификации – параметрической. Одним из главных требований к моделям считается простота интерпретаций физического смысла входящих в модели коэффициентов. Учитывалось, что регрессионные модели при синтезе материалов по существу не применяются; а модели, полученные математическими методами планирования эксперимента, в основном, также носят иллюстративный характер и редко используются для решения задач прогноза и целенаправленного изменения значений факторов. Большой практический интерес имеют математические модели, представленные семейством уравнений с заданным кортежем параметров.

Учитывалось, что задача идентификации относится к классу некорректных задач. Если при приближенном решении обратной задачи использовать какой-либо классический алгоритм формально без учета некорректности задач, то возможно получение результата, не имеющего ни научной, ни прикладной ценности. Игнорировать некорректность постановки задачи нельзя. Для ее преодоления можно использовать дополнительную информацию об искомом решении либо воспользоваться методами регуляризации некорректно поставленных задач. Поиск адекватной модели состоял из непараметрической идентификации. Далее осуществляется формализация критериев качества системы и разрабатываются математические модели в соответствии с каждым из критериев (рисунок 3). Наконец, на основе решения задач однокритериальной оптимизации с использованием найденных оптимальных значений осуществляется формализация многокритериальной задачи и ее решение (определяются оптимальные организация и свойства системы).

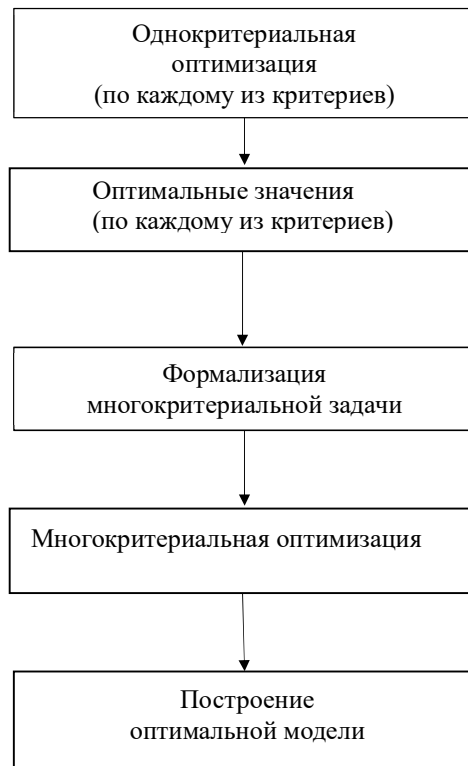


Рисунок 3 – Формализация многокритериальной задачи

### Выводы по второй главе

Рассматриваются основные методы кросс-валидации для оценивания параметра размытости  $cs$ . С кросс-валидацией, модель с лучшей способностью к обобщению обычно включает только некоторое подмножество параметров, которые достаточно информативны.

Далее рассматриваются методы одномерной оптимизации и в последствие их формализация для задач многокритериальной оптимизации.

Отформатировано: Шрифт: (по умолчанию) Times New Roman, 14 пт

Отформатировано: Шрифт: (по умолчанию) Times New Roman, 14 пт

## Глава 3. Численный эксперимент

### 3.1 Реализация программного продукта

Для проведения численного эксперимента была реализована программа, написанная на языке *C#* в программной среде *Microsoft Visual Studio 2015*. На рисунке 4 представлен вид программы, а на рисунке 5 результат работы программы.

На вход программа получает от пользователя:

- $S$  – Объем выборки;
- $K$  – процент помехи;
- Интервал, в котором определяется параметр размытости  $cs$ ;
- $\varepsilon$  – точность вычисления;

На выходе пользователь получает:

- $W1$  – ошибку аппроксимации метода деления отрезка пополам для скалярного случая;
- $t1$  – время работы метода деления отрезка пополам;
- $cs1$  – оптимальный параметр  $cs$ , полученный методом деления отрезка пополам;
- $W2$  – ошибка аппроксимации итеративного метода;
- $t2$  – Время работы итеративного метода;
- $cs2$  – оптимальный параметр  $cs$ , полученный итеративным методом;
- $W3$  – ошибка аппроксимации метода деления отрезка пополам для векторного случая.
- $cs3$  – оптимальный вектор, полученный методом деления отрезка пополам.

Также на экран выводится выборка и полученные модели.

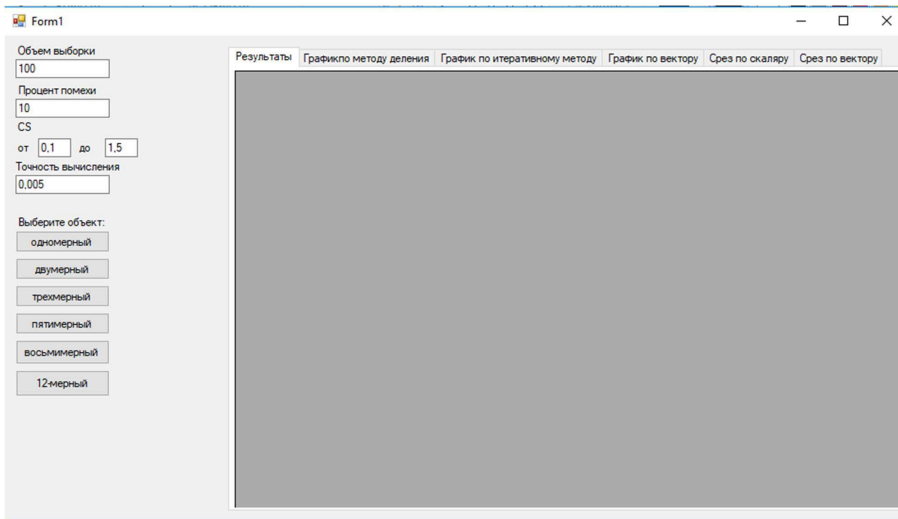


Рисунок 4 – Окно программы

The screenshot shows the 'Form1' application window with the 'Результаты' tab selected. The table displays the following data:

	W1	W2	W3	Выборка	opt1	opt2	opt3
	28.99%	28.99%	23.38%	4.127	4.621	4.621	4.728
t1	t2			11.222	9.942	9.942	9.92
0.32	0.59			0.587	0.271	0.271	0.407
cs1	cs2	cs3		6.707	7.076	7.076	6.651
0.8	0.8	0.8		8.203	7.333	7.333	8.204
		0.646875		3.499	4.233	4.233	4.342
		1.478125		6.828	6.648	6.648	7.019
				7.891	7.56	7.56	7.608
				5.36	4.749	4.749	5.019
				3.254	3.754	3.754	3.753
				11.103	9.122	9.122	9.176
				7.754	7.644	7.644	7.42
				3.141	3.564	3.564	3.47
				2.732	2.786	2.786	2.714
				4.127	3.704	3.704	3.848
				6.311	6.837	6.837	6.765
				0.257	0.7	0.7	0.693
				8.62	9.266	9.266	8.564
				7.076	7.076	7.076	7.076

Рисунок 5 – Результат работы программы

### 3.2 Одномерный объект

Имеется одномерный объект, который описывается уравнением

$$x(u) = 3 \cdot \sin(u1) + \theta, \quad (30)$$

Отформатировано: Шрифт: (по умолчанию) Times New Roman, 14 пт

Отформатировано: Шрифт: (по умолчанию) Times New Roman, 14 пт

где  $\theta$  – нормально распределенная помеха с нулевым математическим ожиданием и конечной дисперсией.

В таблице 1 показаны средние значения 10 экспериментов, а в таблице 2 значения по которым строятся графики 6 и 7. На графиках точками показан выход объекта, линией – выход модели.

По данным таблиц 1, 2 и рисунков 6, 7 можно сделать вывод, что для одномерного объекта не принципиальны метод аппроксимации, точность вычисления и объем выборки, результаты получаются примерно одинаковые, разве, что с уменьшением точности вычисления, уменьшается точность вычисления для метода деления отрезка пополам. Но эта разница не значительная.

Таблица 1 – Результат работы программы для одномерного объекта

№	S	K	E	W1	t1	W2	t2
1	100	0	0,005	4,77%	0,362	4,79%	0,23
2	100	0	0,05	4,85%	0,188	4,79%	0,23
3	100	0	0,5	8,53%	0,056	4,84%	0,233
4	100	10	0,05	16,35%	0,171	16,38%	0,223
5	100	25	0,05	36,43%	0,161	36,45%	0,234
6	100	50	0,05	60,63%	0,149	61,18%	0,235
7	300	10	0,05	14,73%	1,65	14,73%	2,068
8	600	10	0,05	14,96%	6,519	14,94%	8,298
9	1000	10	0,05	14,59%	17,949	14,57%	23,051

Таблица 2 – Данные для построения графиков для одномерного объекта

S	K	E	W1	W2	cs1	cs2
100	10	0,05	13,29%	13,77%	0,144	0,2

Отформатировано: Шрифт: (по умолчанию) Times New Roman, 14 пт

Отформатировано: Шрифт: (по умолчанию) Times New Roman, 14 пт

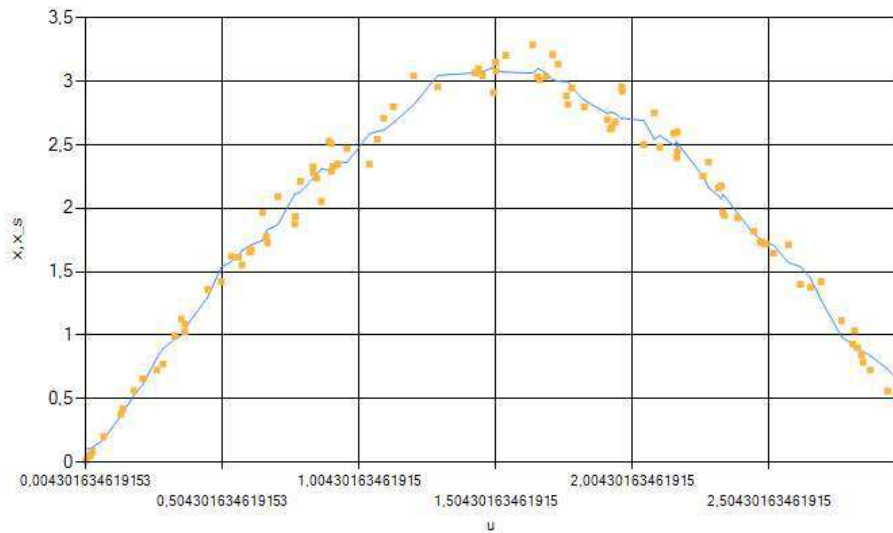


Рисунок 6 – Метод деления отрезка пополам

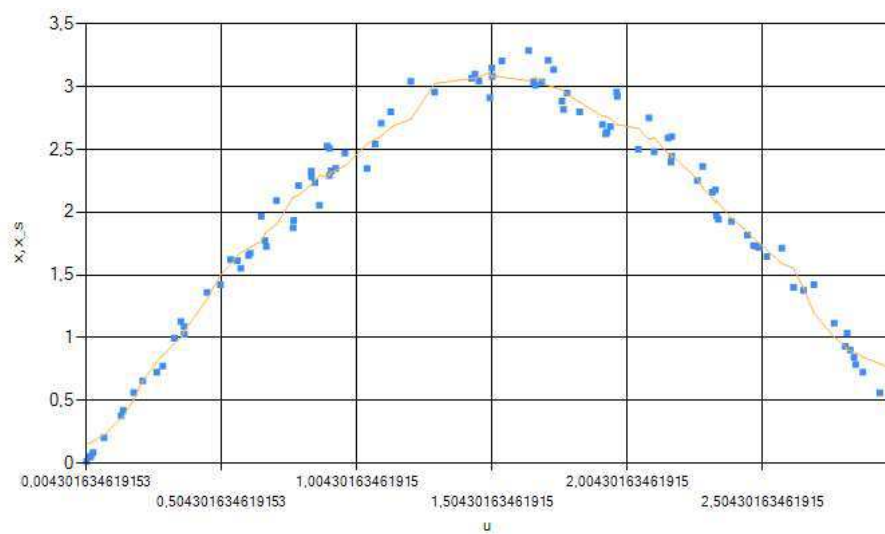


Рисунок 7 – Метод итеративный метод

Отформатировано: Шрифт: (по умолчанию) Times New Roman, 14 пт

Отформатировано: Шрифт: (по умолчанию) Times New Roman, 14 пт

### 3.3 Многомерный объект

*Двумерный объект*

Имеется двумерный объект, который описывается уравнением:

$$x(u) = 3 \cdot \sin(u1) + u2^2 + \theta, \quad (31)$$

где  $\theta$  – нормально распределенная помеха с нулевым математическим ожиданием и конечной дисперсией.

Далее, для каждого объекта таблицы составляются аналогично таблицам 1 и 2 соответственно.

По данным таблиц 3, 4 и рисунков 8-10 можно сделать вывод, что результаты для объектов с малой размерностью получаются примерно одинаковые.

Таблица 3 – Результат работы программы для двумерного объекта

№	S	K	$\varepsilon$	W1	t1	W2	t2	W3
1	100	0	0,005	14,03%	0,534	14,45%	0,437	13,30%
2	100	0	0,05	15,57%	0,304	15,76%	0,446	14,56%
3	100	0	0,5	24,42%	0,115	15,46%	0,42	20,49%
4	100	10	0,05	19,1%	0,334	19,31%	0,423	18,19%
5	100	25	0,05	33,12%	0,295	33,68%	0,469	32,79%
6	100	50	0,05	55,7%	0,294	56,44%	0,457	55,28%
7	300	10	0,05	14,90%	2,737	15,03%	3,994	14,78%
8	600	10	0,05	13,60%	12,371	13,66%	15,674	13,57%
9	1000	10	0,05	13,04%	27,937	13,06%	43,886	13%

Таблица 4 – Данные для построения графиков для двумерного объекта

S	K	$\varepsilon$	W1	W2	W3	cs1	cs2	cs3
100	10	0,05	22,15%	22,02%	21,76%	0,52	0,5	0,47
								0,45



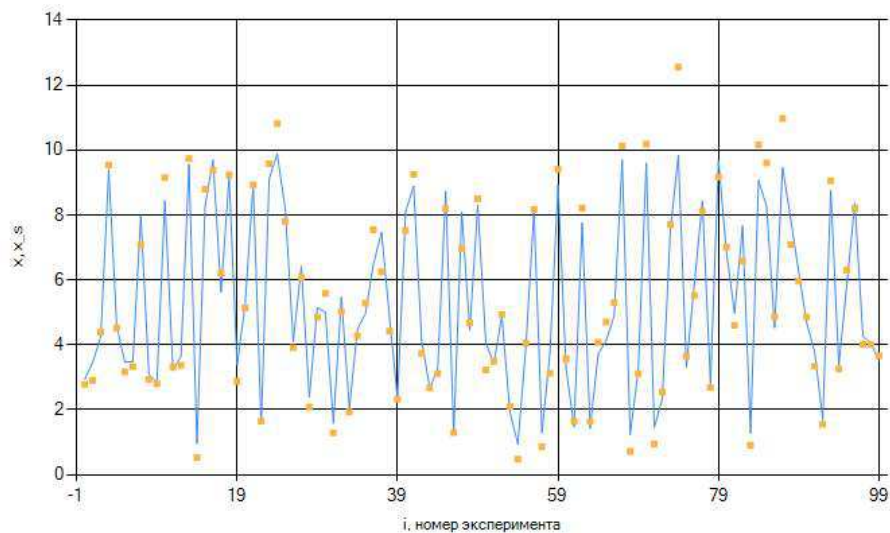


Рисунок 8 – Метод деления отрезка пополам, когда параметр размытости скалярная величина

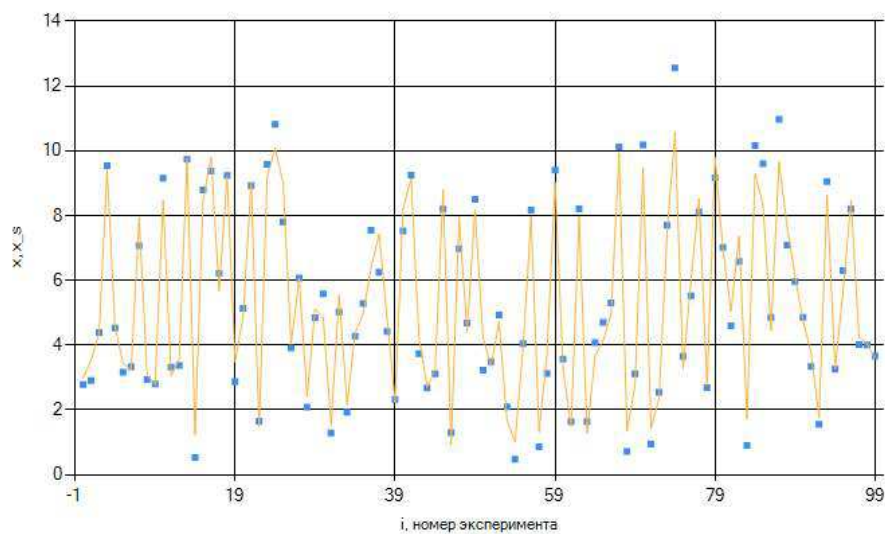


Рисунок 9 – Метод деления отрезка пополам, когда параметр размытости векторная величина

Отформатировано: Шрифт: (по умолчанию) Times New Roman, 14 пт

Отформатировано: Шрифт: (по умолчанию) Times New Roman, 14 пт

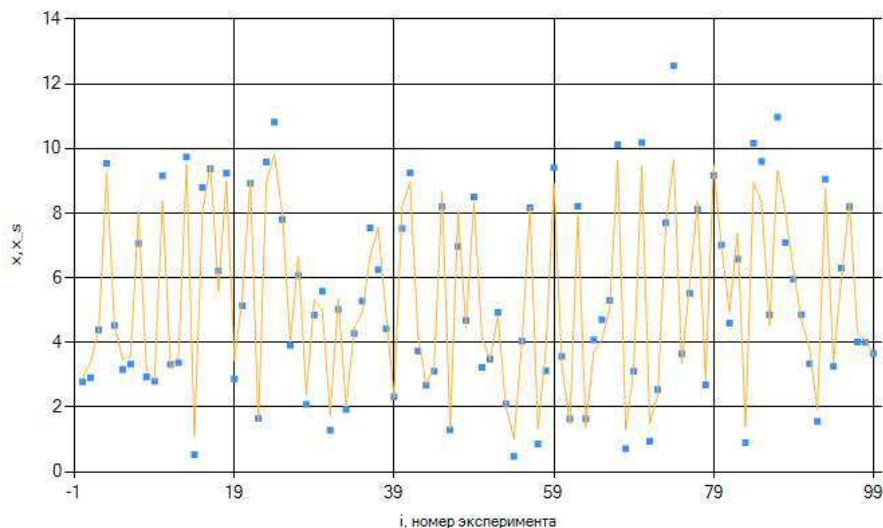


Рисунок 10 – Итеративный метод

*Трехмерный объект*

Имеется трехмерный объект, который описывается уравнением:

$$x(u) = 3 \cdot \sin(u1) + u^2 + \cos(u3) + \theta, \quad (32)$$

где  $\theta$  – нормально распределенная помеха с нулевым математическим ожиданием и конечной дисперсией.

Из таблицы 5 видно, что с увеличением размерности объекта разница во времени работы алгоритма увеличивается. Несмотря на то, что ошибка для скалярного случая при методе деления отрезка пополам и итеративном методе примерно одинаковая, время работы метода деления отрезка пополам сокращается.

Из рисунков 10-12 видно преимущество метода деления отрезка пополам, время работы алгоритма меньше и ошибка аппроксимации меньше. Рисунки 13-18 иллюстрируют насколько модель лучше для каждой переменной.

Таблица 5 – Результат работы программы для трехмерного объекта

№	S	K	$\varepsilon$	W1	t1	W2	t2	W3
---	---	---	---------------	----	----	----	----	----

Отформатировано: Шрифт: (по умолчанию) Times New Roman, 14 пт

Отформатировано: Шрифт: (по умолчанию) Times New Roman, 14 пт

1	100	0	0,005	26,45%	0,791	26,90%	0,605	21,37%
2	100	0	0,05	24,56%	0,393	24,91%	0,69	20,34%
3	100	0	0,5	31,09%	0,165	27,79%	0,62	28,06%
4	100	10	0,05	27,42%	0,375	28,02%	0,667	24,25%
5	100	25	0,05	39,14%	0,435	39,88%	0,679	36,14%
6	100	50	0,05	58,28%	0,506	58,89%	0,702	56,27%
7	300	10	0,05	19,98%	4,066	19,97%	6,276	17,27%
8	600	10	0,05	17,32%	19,193	17,48%	25,46	15,54%
9	1000	10	0,05	15,62%	42,037	15,66%	66,092	14,13%

Таблица 6 – Данные для построения графиков трехмерного объекта

<i>S</i>	<i>K</i>	<i>E</i>	<i>W1</i>	<i>W2</i>	<i>W3</i>	<i>cs1</i>	<i>cs2</i>	<i>cs3</i>
100	10	0,05	31,24%	31,96%	26,65%	0,712	0,8	0,99
								0,65
								1,48

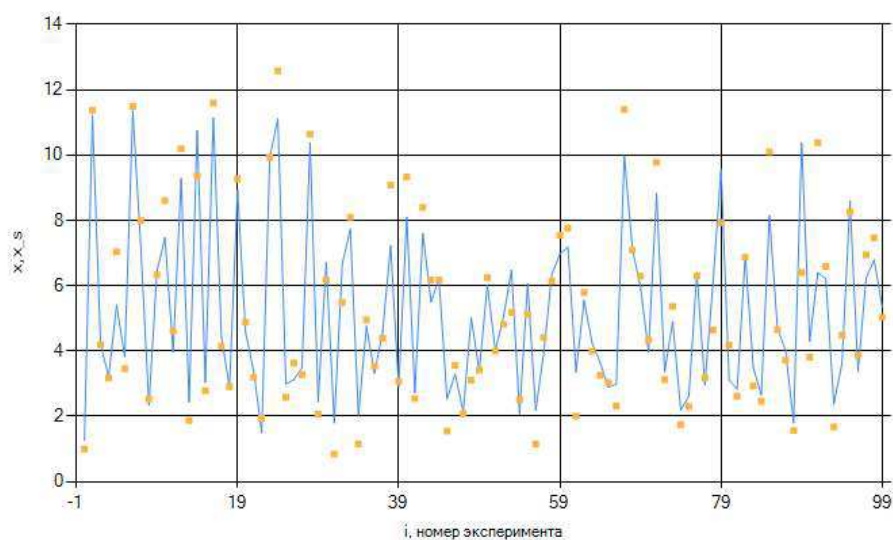


Рисунок 11 – Метод деления отрезка пополам при скалярной величине параметра размытости

Отформатировано: Шрифт: (по умолчанию) Times New Roman, 14 пт

Отформатировано: Шрифт: (по умолчанию) Times New Roman, 14 пт

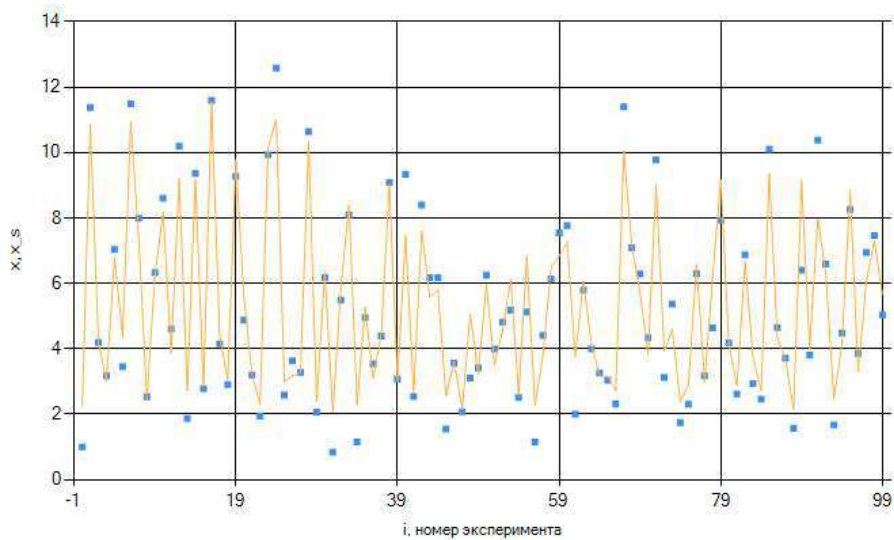


Рисунок 12 – Метод деления отрезка пополам при векторной величине параметра размытости

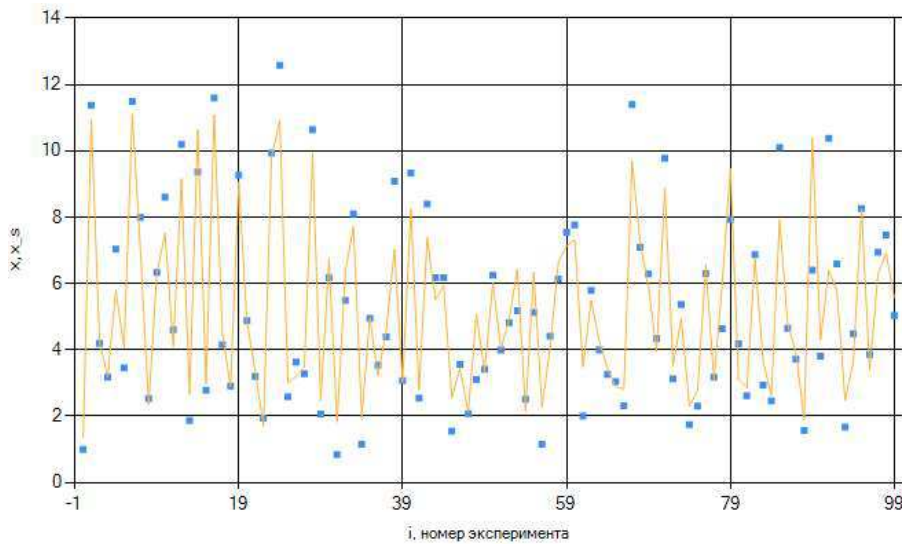


Рисунок 13 – Итеративный метод

Отформатировано: Шрифт: (по умолчанию) Times New Roman, 14 пт

Отформатировано: Шрифт: (по умолчанию) Times New Roman, 14 пт

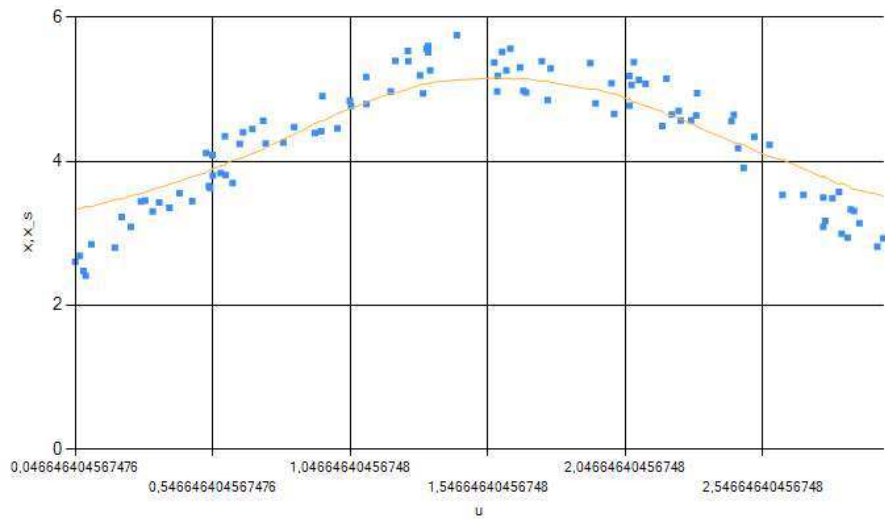


Рисунок 14 – Срез по переменной  $u_1$ , когда параметр размытости скалярная величина

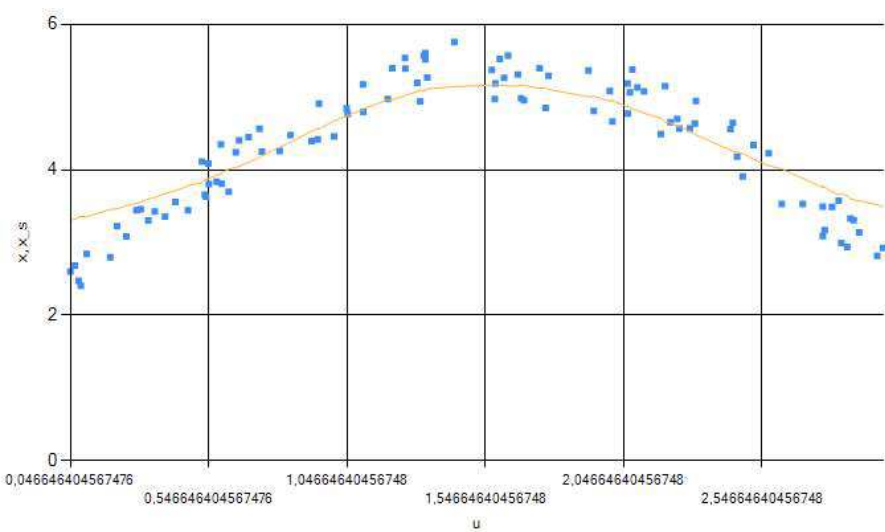


Рисунок 15 – Срез по переменной  $u_1$ , когда параметр размытости векторная величина

Отформатировано: Шрифт: (по умолчанию) Times New Roman, 14 пт

Отформатировано: Шрифт: (по умолчанию) Times New Roman, 14 пт

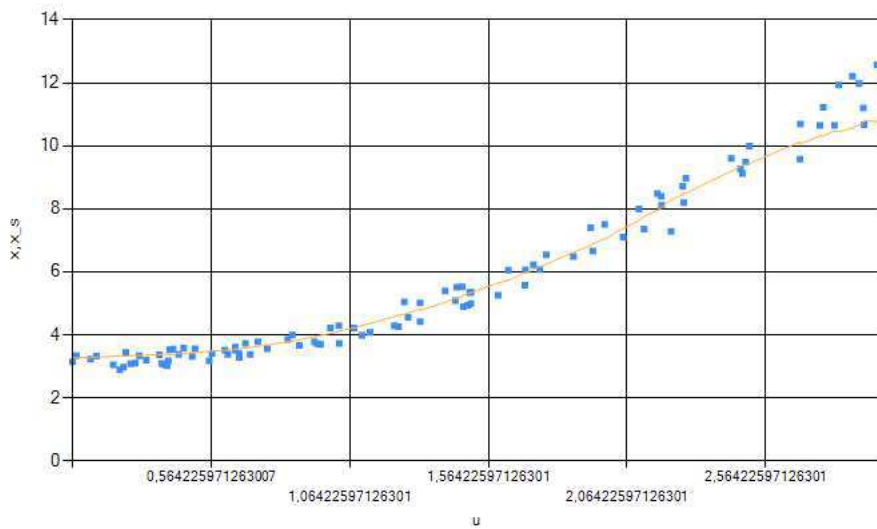


Рисунок 16 – Срез по переменной  $u_2$ , когда параметр размытости скалярная величина

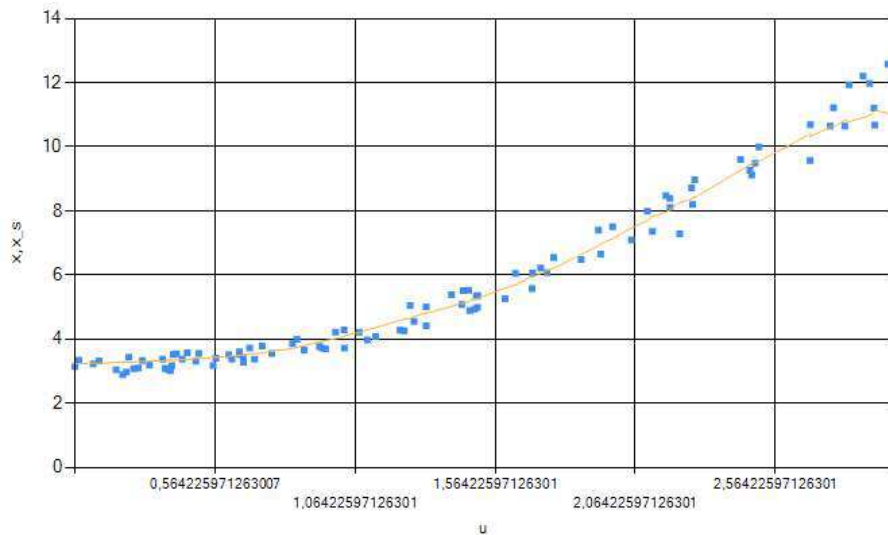


Рисунок 17 – Срез по переменной  $u_2$ , когда параметр размытости векторная величина

Отформатировано: Шрифт: (по умолчанию) Times New Roman, 14 пт

Отформатировано: Шрифт: (по умолчанию) Times New Roman, 14 пт

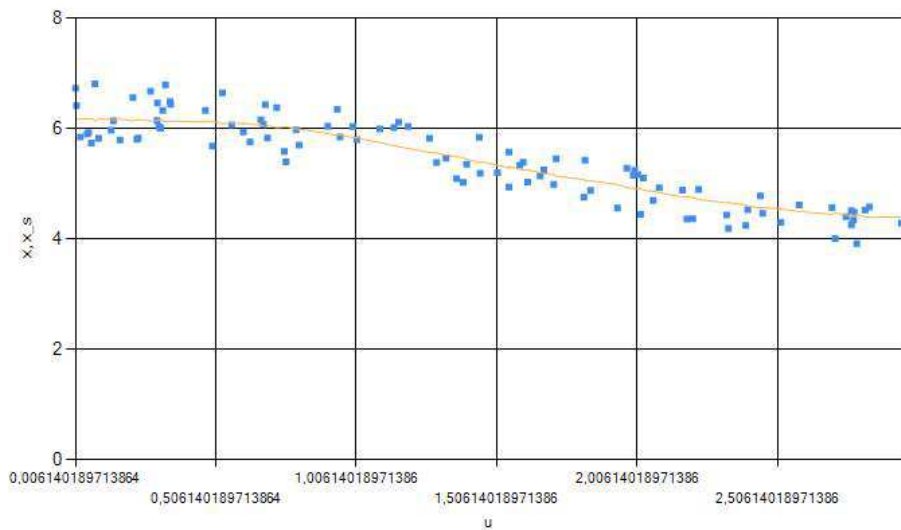


Рисунок 18 – Срез по переменной  $u_3$ , когда параметр размытости скалярная величина

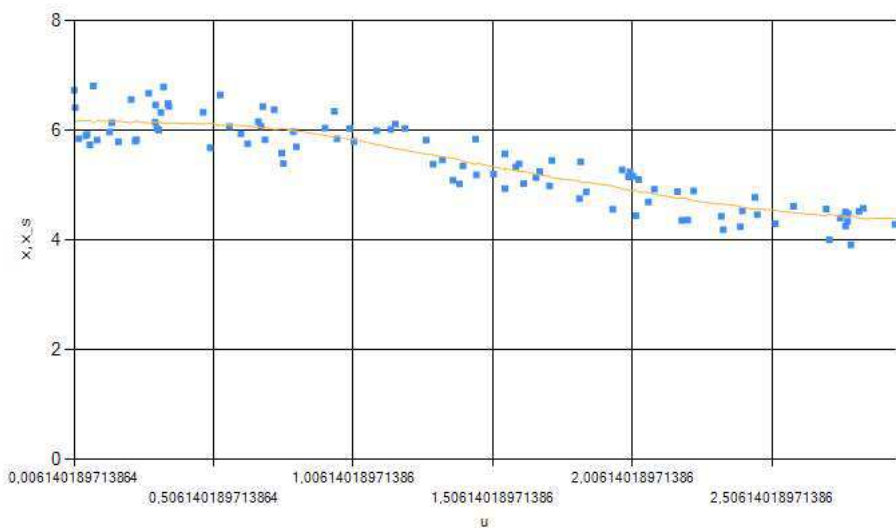


Рисунок 19 – Срез по переменной  $u_3$ , когда параметр размытости векторная величина

Отформатировано: Шрифт: (по умолчанию) Times New Roman, 14 пт

Отформатировано: Шрифт: (по умолчанию) Times New Roman, 14 пт

*Пятимерный объект*

Имеется пятимерный объект, который описывается уравнением

$$x(u) = 3 \cdot \sin(u1) + u2^2 + \cos(u3) + u4 + u5^4 + \theta, \tag{33}$$

где  $\theta$  – нормально распределенная помеха с нулевым математическим ожиданием и конечной дисперсией.

Из таблицы 7 можно сделать вывод, что если решать задачу методом деления отрезка пополам в скалярном случае, то время значительно уменьшается, особенно это заметно при большом объеме выборки. Если решать задачу векторным случаем, то при малом объеме выборки ошибка аппроксимации меньше в 2 раза, а при большом почти в 3.

В таблице 8 показаны данные, по которым строятся рисунки 19-31. По срезам видно, как улучшается модель при векторном решении задачи. Срезы с почти одинаковым значением  $cs$  являются не информативными для нас, так как модель в этом случае почти не меняется. Далее мы будем рассматривать только срезы с отличающимися значениями ширины окна.

Таблица 7 – Пятимерный объект

№	S	K	$\epsilon$	W1	t1	W2	t2	W3
1	100	0	0,005	48,79%	1,493	49,35%	1,039	24,52%
2	100	0	0,05	49,82%	0,819	50,04%	1,087	22,69%
3	100	0	0,5	48,68%	0,279	48,80%	1,075	33,80%
4	100	10	0,05	51,83%	0,813	52,20%	1,064	24,32%
5	100	25	0,05	52,57%	0,816	52,77%	1,013	34,66%
6	100	50	0,05	63,15%	0,869	63,43%	1,129	50,48%
7	300	10	0,05	44,43%	2,399	42,50%	9,867	17,41%
8	600	10	0,05	37,83%	9,666	36,39%	39,215	14,02%
9	1000	10	0,05	32,95%	28,085	32,98%	104,352	12,69%

Таблица 8 – Данные для построения графиков для пятимерного объекта

S	K	$\epsilon$	W1	W2	W3	cs1	cs2	cs3
100	10	0.05	55,93%	56,02%	38,62%	1,478125	1,5	1,478125
								1,325
								1,478125
								1,2375

Отформатировано: Шрифт: (по умолчанию) Times New Roman, 14 пт

Отформатировано: Шрифт: (по умолчанию) Times New Roman, 14 пт





Рисунок 21 – Метод деления отрезка пополам при векторной величине параметра размытости

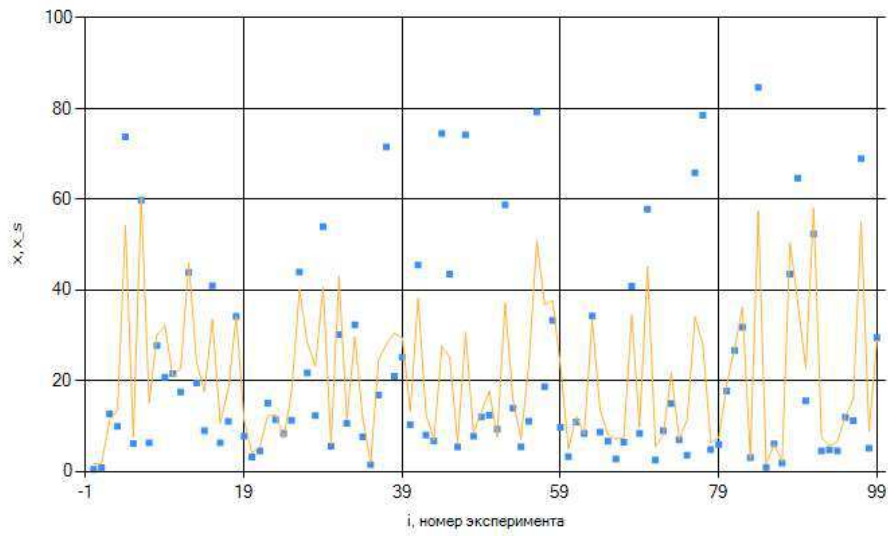
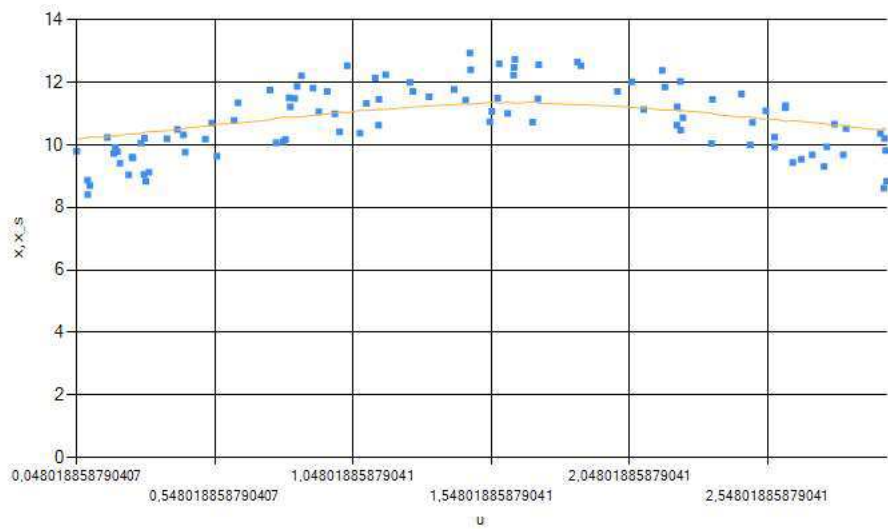


Рисунок 22 – Итеративный метод



Отформатировано: Шрифт: (по умолчанию) Times New Roman, 14 пт

Отформатировано: Шрифт: (по умолчанию) Times New Roman, 14 пт

Рисунок 23 – Срез по переменной  $u_1$ , когда параметр размытости скалярная величина

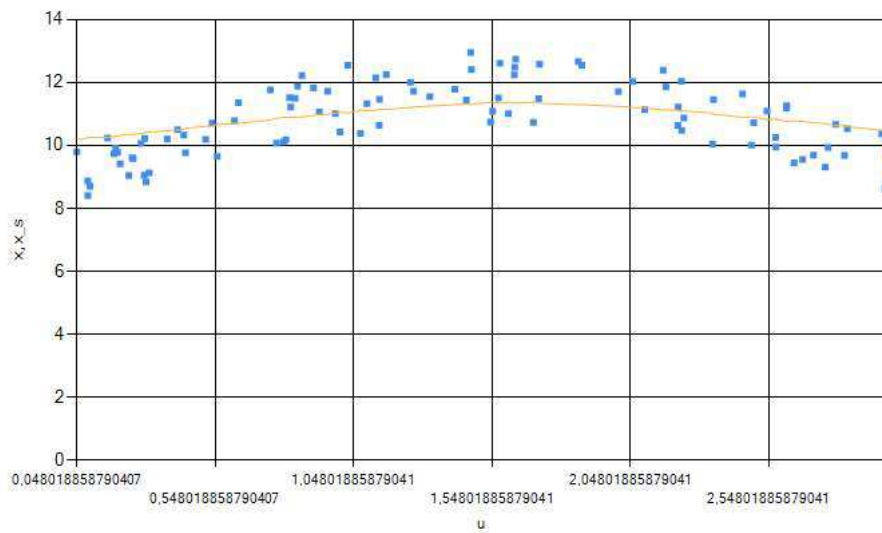
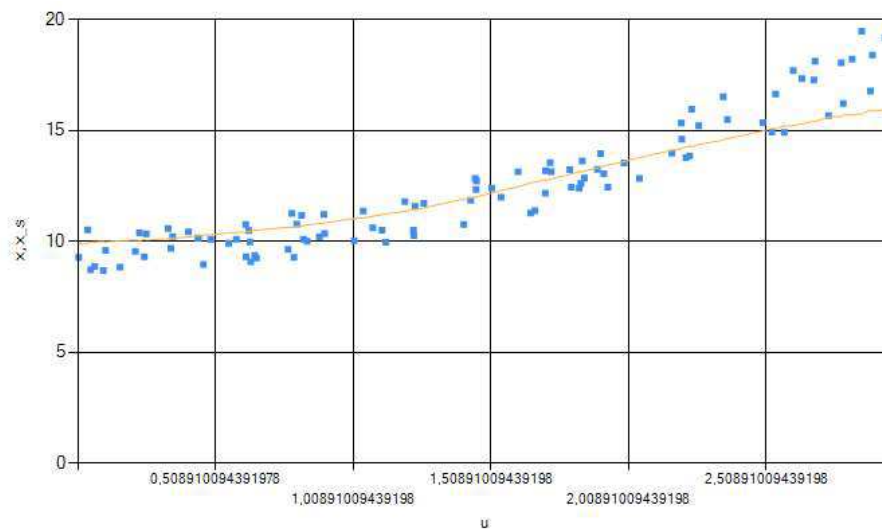


Рисунок 24 – Срез по переменной  $u_1$ , когда параметр размытости векторная величина



Отформатировано: Шрифт: (по умолчанию) Times New Roman, 14 пт

Отформатировано: Шрифт: (по умолчанию) Times New Roman, 14 пт

Рисунок 25 – Срез по переменной  $u_2$ , когда параметр размытости скалярная величина

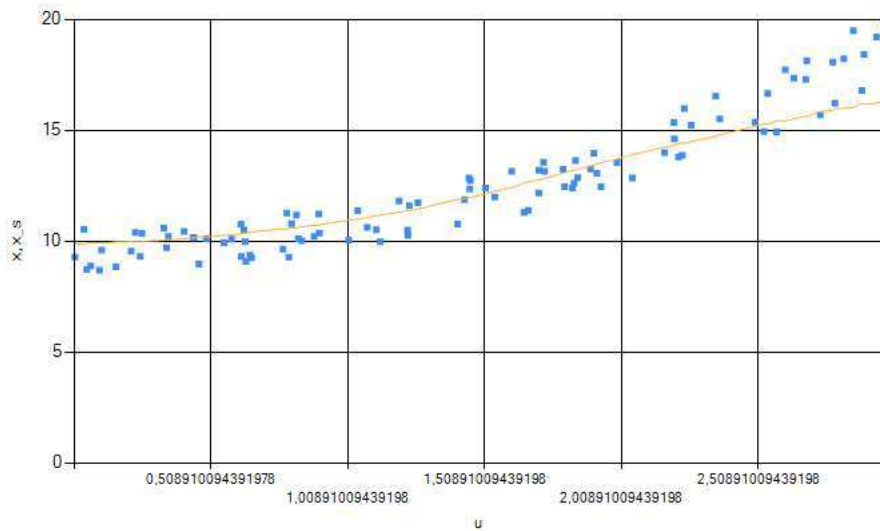
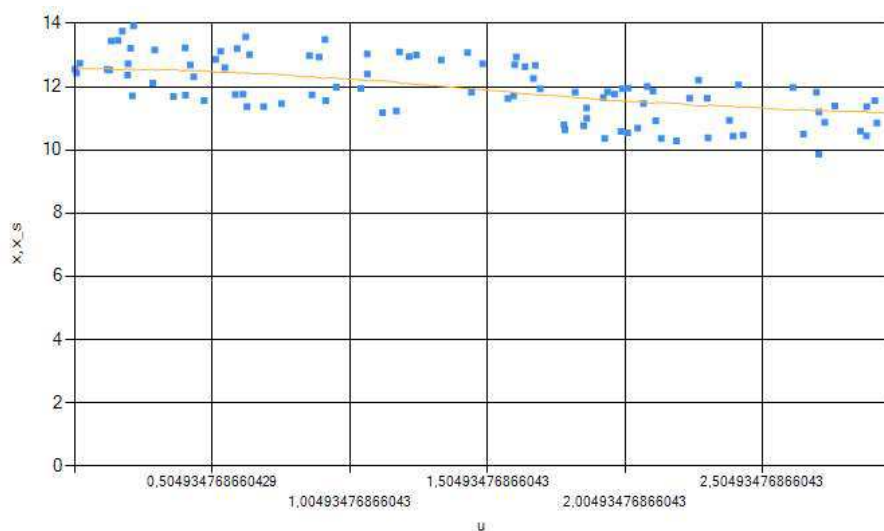


Рисунок 26 – Срез по переменной  $u_2$ , когда параметр размытости векторная величина



Отформатировано: Шрифт: (по умолчанию) Times New Roman, 14 пт

Отформатировано: Шрифт: (по умолчанию) Times New Roman, 14 пт

Рисунок 27 – Срез по переменной  $u_3$ , когда параметр размытости скалярная величина

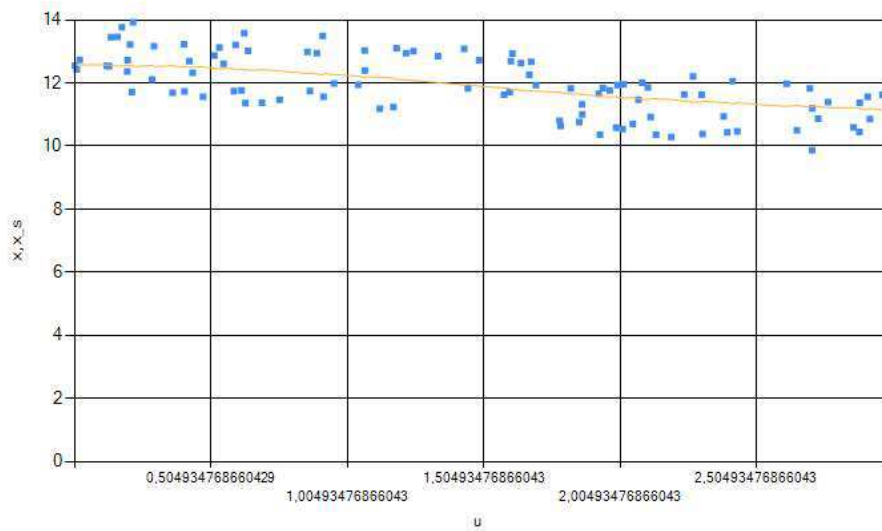
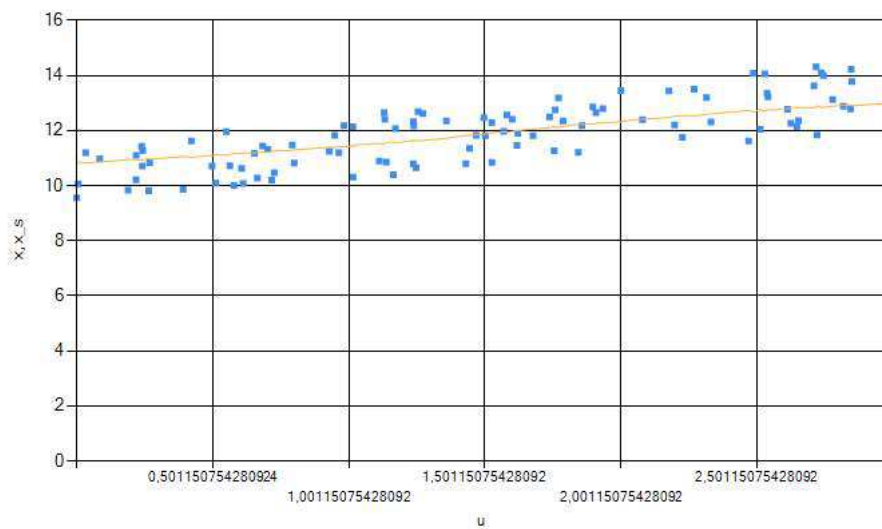


Рисунок 28 – Срез по переменной  $u_3$ , когда параметр размытости векторная величина



Отформатировано: Шрифт: (по умолчанию) Times New Roman, 14 пт

Отформатировано: Шрифт: (по умолчанию) Times New Roman, 14 пт

Рисунок 29 – Срез по переменной  $u_4$ , когда параметр размытости скалярная величина

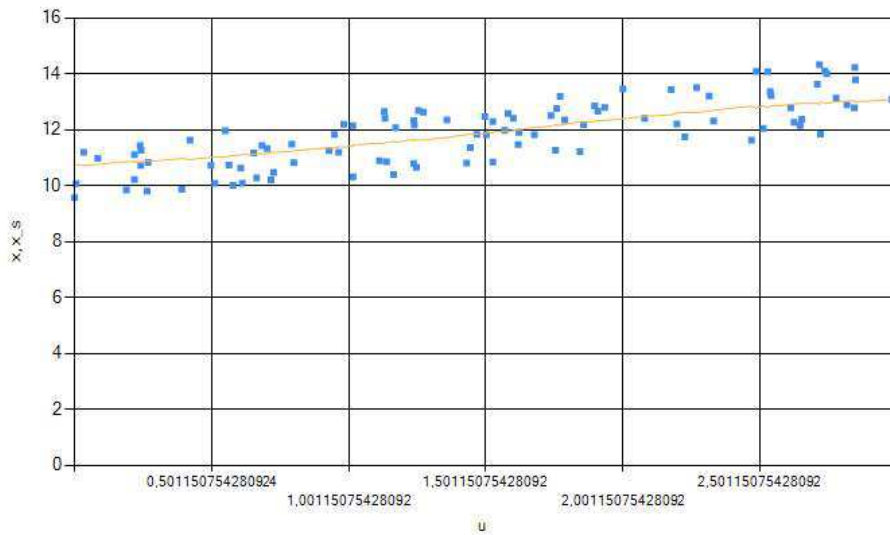
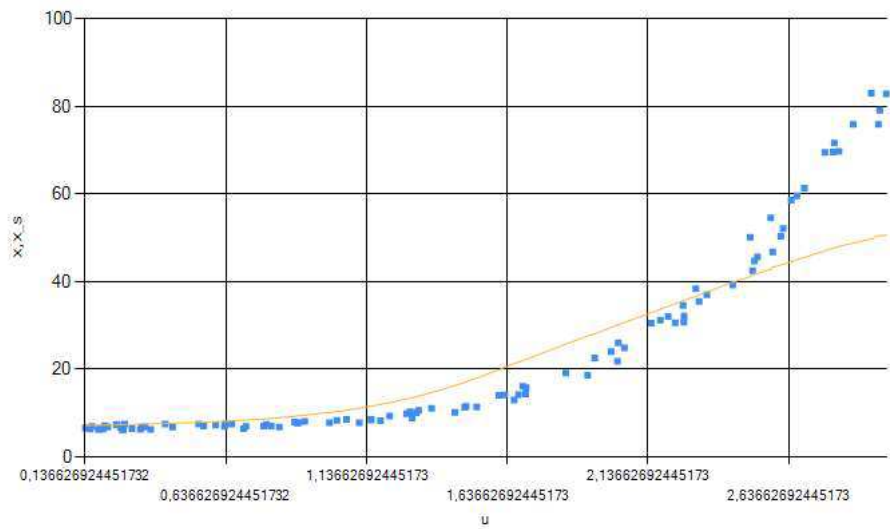


Рисунок 30 – Срез по переменной  $u_4$ , когда параметр размытости векторная величина



Отформатировано: Шрифт: (по умолчанию) Times New Roman, 14 пт

Отформатировано: Шрифт: (по умолчанию) Times New Roman, 14 пт

Рисунок 31 – Срез по переменной  $u_5$ , когда параметр размытости скалярная величина

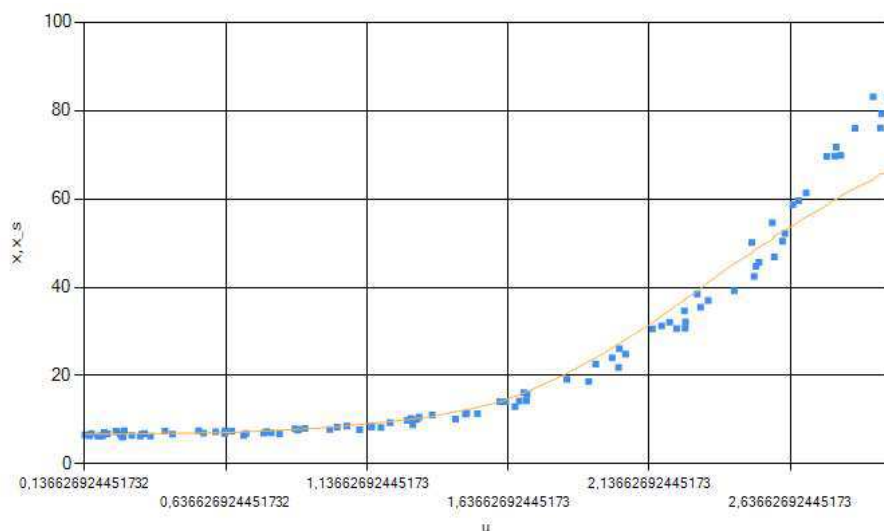


Рисунок 32 – Срез по переменной  $u_5$ , когда параметр размытости векторная величина

### Восьмимерный объект

Имеется восьмимерный объект, который описывается уравнением:

$$x(u) = 3 \cdot \sin(u_1) + u_2^2 + \cos(u_3) + u_4 + u_5^4 + 3 \cdot \cos(u_6) + 7 \cdot \sin(u_7) + 4 \cdot u_8 + \theta, \quad (34)$$

где  $\theta$  – нормально распределенная помеха с нулевым математическим ожиданием и конечной дисперсией.

Из таблицы 9 можно сделать вывод, что для случая с большой размерностью строить модель нужно на больших выборках, так задача решается корректно. Результаты совпадают с результатами для пятимерного объекта.

На рисунках 32-34 показываються только первые 100 значений, по ним можно оценить работу алгоритма. А срезы построены только для переменной  $s$

Отформатировано: Шрифт: (по умолчанию) Times New Roman, 14 пт

Отформатировано: Шрифт: (по умолчанию) Times New Roman, 14 пт

разнящейся шириной окна. По рисункам 35 и 36 видна на сколько улучшается модель.

Таблица 9 – Восьмимерный объект

№	<i>S</i>	<i>K</i>	$\varepsilon$	<i>W1</i>	<i>t1</i>	<i>W2</i>	<i>t2</i>	<i>W3</i>
1	100	0	0,005	73,33%	2,571	72,93%	1,652	73,06%
2	300	0	0,005	57,28%	23,642	56,97%	15,109	39,82%
3	600	0	0,005	49,56%	90,018	49,68%	63,656	29,33%
4	600	0	0,05	48,70%	45,132	48,93%	57,316	27,66%
5	600	0	0,5	52,75%	16,106	51,84%	61,104	38,74%
6	600	10	0,5	49,71%	16,45	50,07%	64,556	36,67%
7	600	25	0,5	57,34%	15,648	56,15%	61,284	48,69%
8	600	50	0,5	67,17%	15,596	65,47%	59,832	64,62%
9	1000	10	0,5	48,11%	43,61	48,35%	174,128	31,91%
10	1500	10	0,5	45,41%	101,965	45,86%	381,855	21,75%

Таблица 10 – Данные для построения графиков для восьмимерного объекта

<i>S</i>	<i>K</i>	$\varepsilon$	<i>W1</i>	<i>W2</i>	<i>W3</i>	<i>cs1</i>	<i>cs2</i>	<i>cs3</i>
600	10	0.5	53,55%	53,07%	37,78%	1,325	1,5	1,325
								1,325
								1,325
								1,325
								0,8
								1,325
								1,325
								1,325

Отформатировано: Шрифт: (по умолчанию) Times New Roman, 14 пт

Отформатировано: Шрифт: (по умолчанию) Times New Roman, 14 пт



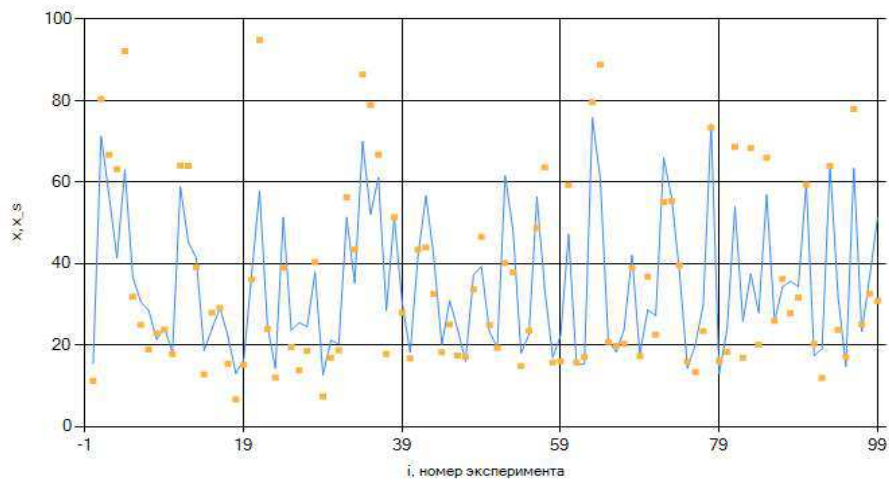


Рисунок 33 – Метод деления отрезка пополам при скалярной величине параметра размытости

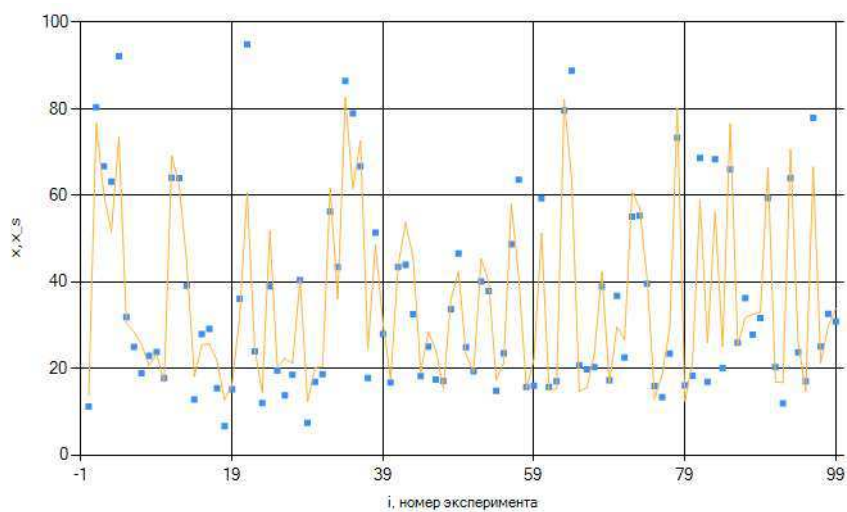


Рисунок 34 – Метод деления отрезка пополам при векторной величине параметра размытости

Отформатировано: Шрифт: (по умолчанию) Times New Roman, 14 пт

Отформатировано: Шрифт: (по умолчанию) Times New Roman, 14 пт

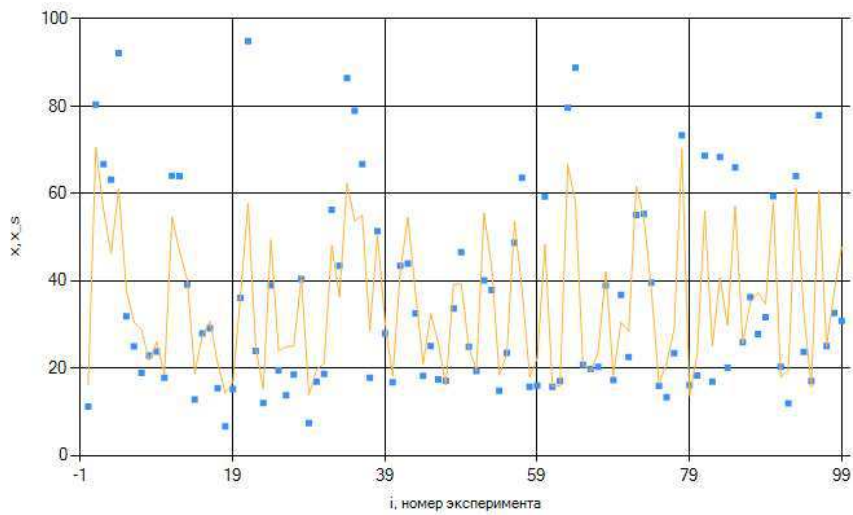


Рисунок 35 – Итеративный метод

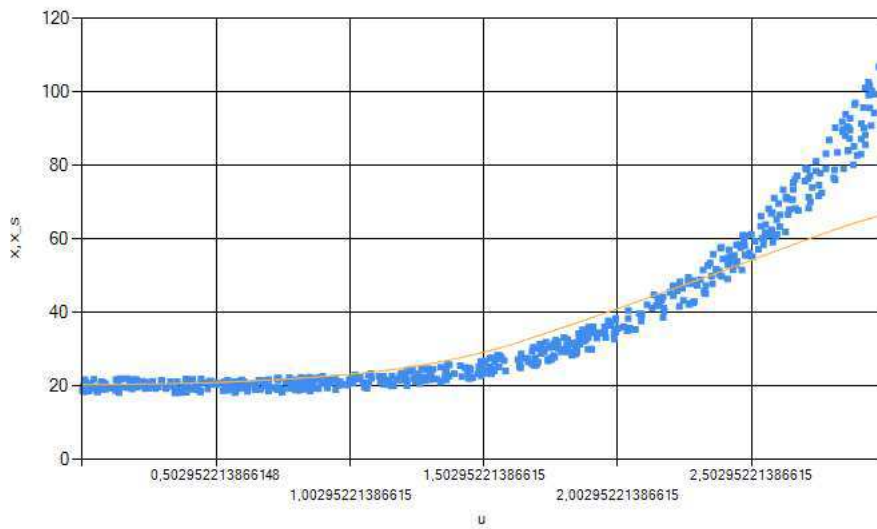


Рисунок 36 – Срез по переменной  $u_5$ , когда параметр размытости скалярная величина

Отформатировано: Шрифт: (по умолчанию) Times New Roman, 14 пт

Отформатировано: Шрифт: (по умолчанию) Times New Roman, 14 пт

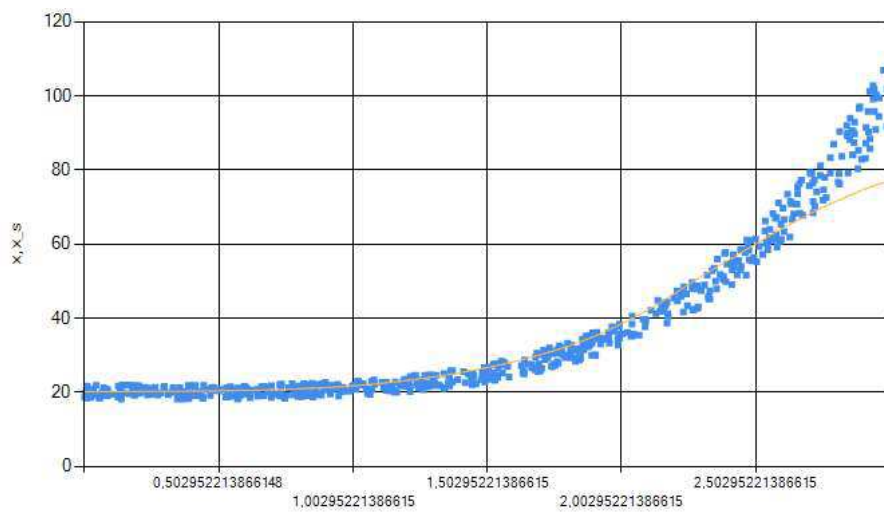


Рисунок 37 – Срез по переменной  $u_5$ , когда параметр размытости векторная величина

### Двенадцатимерный объект

Имеется двенадцатимерный объект, который описывается уравнением:

$$x(u) = 3 \cdot \sin(u_1) + u_2^2 + \cos(u_3) + u_4 + u_5^4 + 3 \cdot \cos(u_6) + 7 \cdot \sin(u_7) + 4 \cdot u_8 + \sqrt{u_9} + \frac{u_{10}^7}{5} + \frac{u_{11}}{9} + 4 \cdot u_{12} + \theta, \quad (35)$$

где  $\theta$  – нормально распределенная помеха с нулевым математическим ожиданием и конечной дисперсией.

Из таблицы 11 видно, что при итеративном методе не удалось посчитать ошибку, так как при большом объеме выборки ширина окна уменьшается и это приводит к машинному нулю. Так же не удалось посчитать значения при проценте помехи 50.

Таблица 11 – Двенадцатимерный объект

$N_0$	$S$	$K$	$\varepsilon$	$W1$	$t1$	$W2$	$t2$	$W3$
1	600	0	0,005	85,25%	168,285	Null	105,35	71,30%
2	600	0	0,05	85,25%	94,53	Null	112,69	76,15%
3	600	0	0,5	88,38%	25,09	Null	92,33	82,5%
4	600	10	0,5	86,34%	22,11	Null	85,08	83,69%

5	600	25	0,5	91,69%	25,62	Null	108,85	86,42%
6	600	50	0,5	Null	29	Null	110,21	Null
7	1000	10	0,5	82,56%	73,36	Null	286,34	74,12%
8	1500	10	0,5	80,26%	151,25	Null	633,25	65,45%
9	2000	10	0,5	75,26%	281,49	Null	1195,03	50,67%

Таблица 12 – Данные для построения графиков для двенадцатимерного объекта

<i>S</i>	<i>K</i>	<i>E</i>	<i>W1</i>	<i>W2</i>	<i>W3</i>	<i>cs1</i>	<i>cs2</i>	<i>cs3</i>
600	10	0.5	89,63%	135,94%	80,78%	1,325	0,3	1,325
								1,325
								1,325
								1,325
								1,325
								1,325
								1,325
								1,325
								1,325
								0,8
								1,325
								1,325

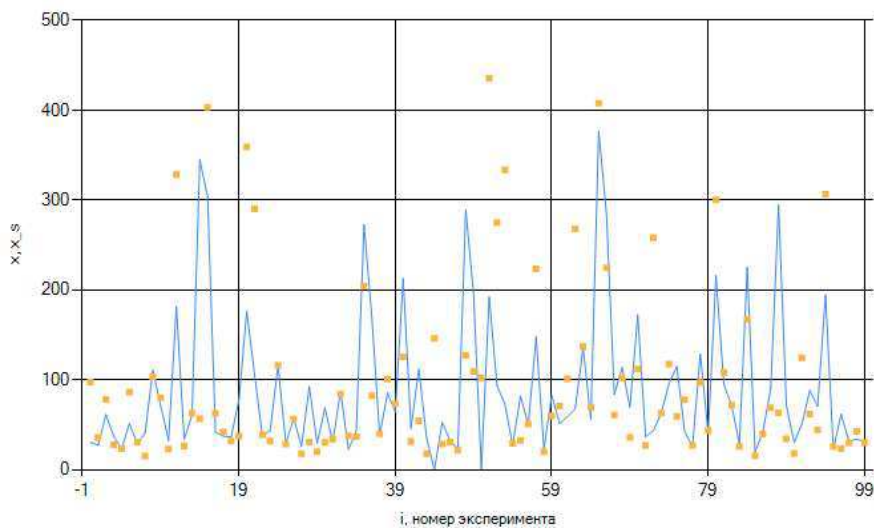


Рисунок 38 – Метод деления отрезка пополам при скалярной величине параметра размытости

Отформатировано: Шрифт: (по умолчанию) Times New Roman, 14 пт

Отформатировано: Шрифт: (по умолчанию) Times New Roman, 14 пт

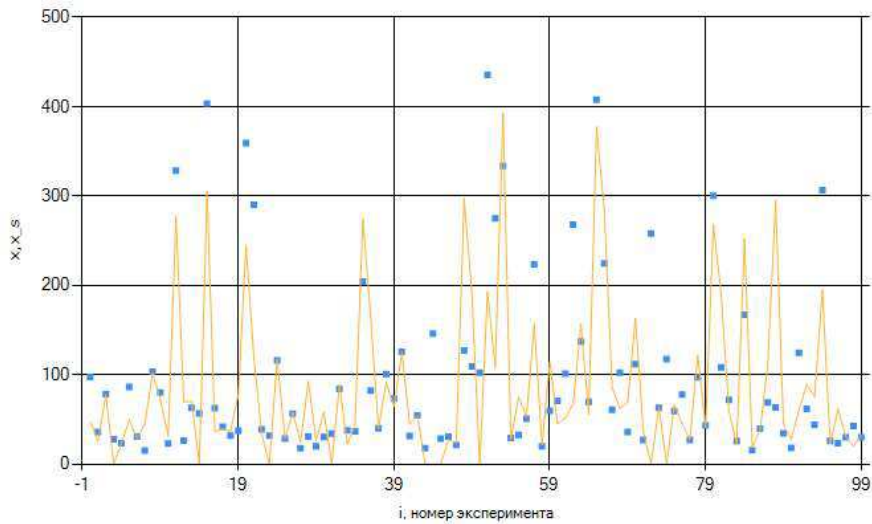


Рисунок 39 – Метод деления отрезка пополам при векторной величине параметра размытости

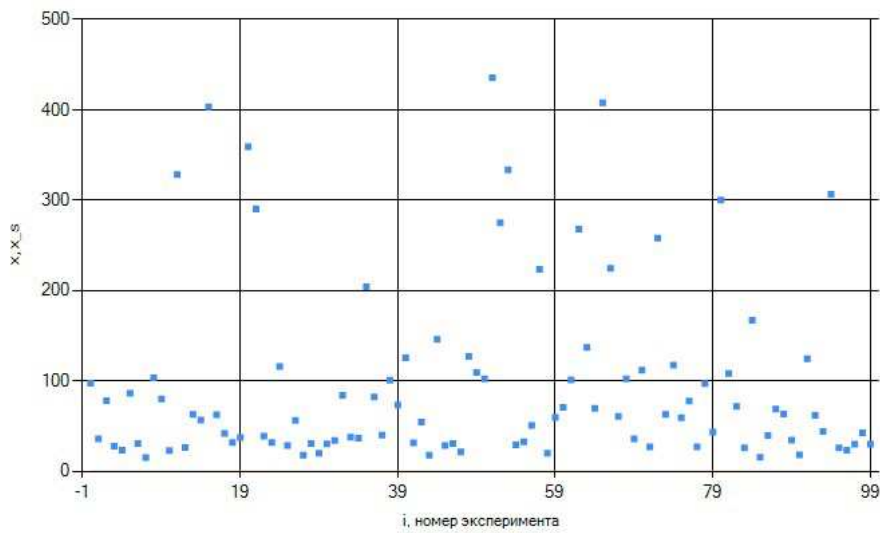


Рисунок 40 – Итеративный метод

Отформатировано: Шрифт: (по умолчанию) Times New Roman, 14 пт

Отформатировано: Шрифт: (по умолчанию) Times New Roman, 14 пт

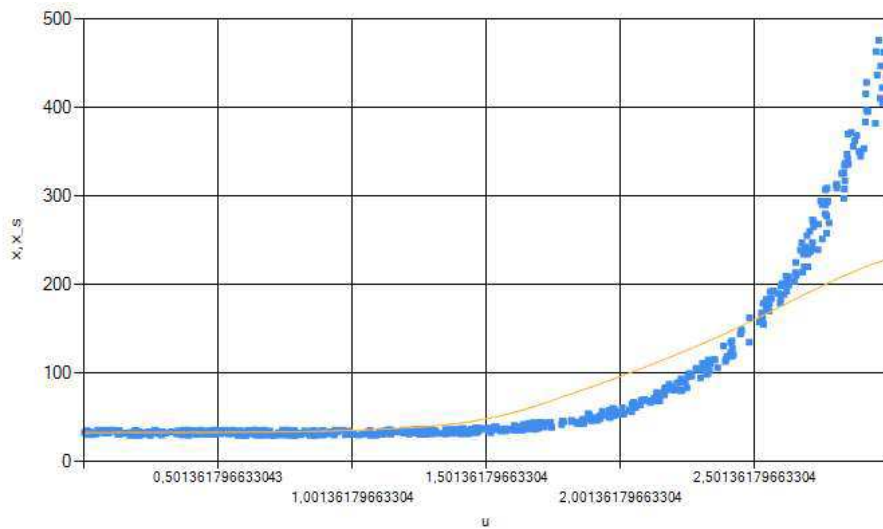


Рисунок 41 – Срез по переменной  $u$ 10, когда параметр размытости скалярная величина

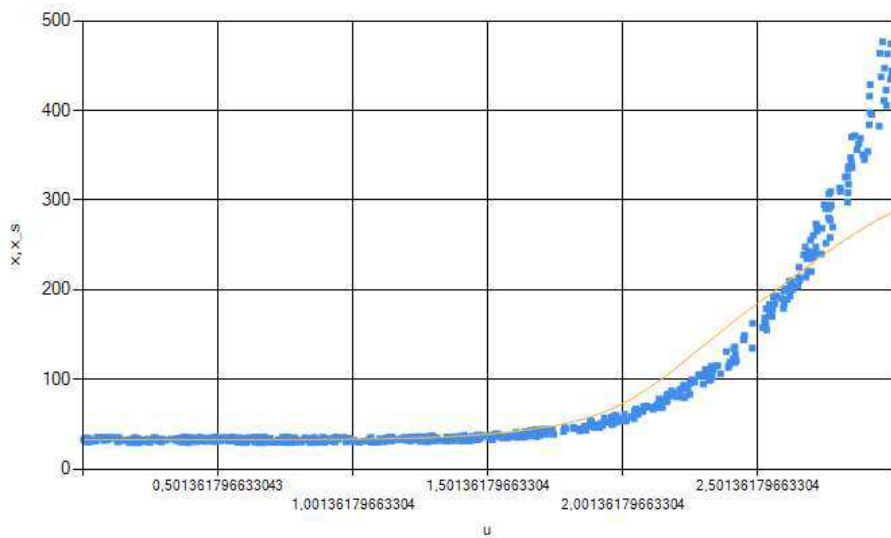


Рисунок 42 – Срез по переменной  $u$ 10, когда параметр размытости векторная величина

Отформатировано: Шрифт: (по умолчанию) Times New Roman, 14 пт

Отформатировано: Шрифт: (по умолчанию) Times New Roman, 14 пт

## Выводы по третьей главе

В главе описывались численные эксперименты и представлены результаты программы. Для объектов с малой размерностью нет разницы как настраивать ширину окна и как ее оптимизировать, одномерной или многомерной оптимизацией. Но с увеличением размерности при одномерной оптимизации метод деления отрезка пополам значительно выигрывает во времени, а при многомерной ошибка аппроксимации становится меньше почти в 3 раза. Итеративный метод дает не такие хорошие результаты, а когда объект обладает большой размерностью, то вообще не получается посчитать ошибку аппроксимации.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В выпускной квалификационной работе были рассмотрены определения идентификации в «узком» и «широком» смыслах. Рассмотрены ядерные функции и как они описывают модели в зависимости от их формы и ширины окна. Описаны методы оценивания и оптимизации ширины окна. Так же рассмотрены методы одномерной оптимизации и формализация задачи в многомерную.

Было показано, что популярный метод настройки параметра размытости является не очень эффективным и дает корректные результаты только для объектов с малой размерностью.



## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. H<sup>^</sup>ardle W., Hart J., Marron J.S., Tsybakov A.B. Bandwidth Choise for Average Derivative Est:mation // J. Amer. Statist. Assoc. 1992. V. 87. № 417. P. 218–226.
2. Bowman A. An alternative method of cross-validation for the smoothing of density estimates // Biometrika. 1984. V. 71. P. 353–360.
3. Rudemo M. Empirical choice of histograms and Kernel density estimators // Scand. J. Stat., 1982. V. 9. P. 65–78. 7. Hall P., Marron J., Park B. Smoothed cross-validation // Prob. Theory and Related Fields. 1992. V. 90. P. 1–20.
4. Park B., Marron J. Comparison of data-driven bandwidth Selectors // J. Amer. Statist. Assoc. 1990. V. 85. P. 66–72. 9. Duong T., Hazelton M.L. Cross-validation Bandwidth Martices for Multivariate Kernel density estimation // Scand. J. Statist. 2005. V. 32. P. 485–506.
5. Opsomer J., Wang Y., Yang Y. Nonparametric Regression with correlated Errors // Stat. Sci. 2001. V. 16. № 2. P. 134–153.
6. Breiman L., Friedman J., Olshen R., Stone C.. Classification and Regression Trees // Wadsworth, Belmont, CA. 1984.
7. Бугаенко А. Н., Милов А. В. Алгоритм непараметрической оценки регрессии с адаптивной шириной окна// Научный форум: технические и физико-математические науки. 2017. С. 6-13.
8. Васильев В.А., Добровидов А.В., Кошкин Г.М. Непараметрическое оценивание функционалов от распределений стационарных последовательностей. М.: Наука, 2004.
9. Гарькина И.А., Данилов А.М., Ермолаева Е.И., Зарецкий А.М. Сложные системы модульной структуры: композиты, автономные исследования сепаратных подсистем / Известия Казанского государственного архитектурно-строительного университета. – 2011. – № 1 (15). – С. 152-156.
10. Гончаров А. А., Диго Г. Б., Диго Н. Б., Торгашов А. Ю. Параметрическая идентификация динамического объекта с переменной задержкой

измерения выхода // Информатика и системы управления. – 2014. – № 2 (40). – С. 94-101.

11. Дилигенская А.Н. Идентификация объектов управления: Учебное пособие. Самара: Самарский государственный технический университет, 2009.
12. Добровидов А.В. О сходимости ядерных оценок плотности с переменной шириной окна по зависимым наблюдениям // Автоматика и телемеханика. 2007. 33. С. 113-121.
13. Добровидов А.В., Кошкин Г.М. Непараметрическое оценивание сигналов. М.: Наука, Физматлит, 1997. 336 с.
14. Кошкин Г.М. Об одном подходе к исследованию функционалов о условных распределений при статистической неопределенности // Автоматика и телемеханика. 1978. № 8. С. 53–65.
15. Льюнг Л. Идентификация систем. Теория для пользователя. -Москва: Наука. 1991.
16. Немировский А.С., Цыпкин Я.З. Об оптимальных алгоритмах адаптивного управления // АиТ. 1984. № 12. С. 64–77.
17. Рубан А. И. Методы анализа данных. Учебное пособие: В 2 ч. Красноярск: Изд-во КГТУ, 1994.
18. Хардле В. Прикладная непараметрическая регрессия. Москва: Мир. - 1994.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования


«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт космических информационных технологий

Базовая кафедра интеллектуальных систем управления

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой

 Ю.Ю. Якунин

«11» июня 2018

## БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

27.03.03 «Системный анализ и управление»

Разработка алгоритма многомерной оптимизации параметра размытости  
непараметрического алгоритма идентификации


Руководитель

 11.06.18  
подпись, дата

ст. преподаватель  
должность, учёная степень

Чжан Е. А.  
инициалы, фамилия

Выпускник

 11.06.18  
подпись, дата

Тараскина В. И.  
инициалы, фамилия

Красноярск 2018