

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики
Базовая кафедра вычислительных и информационных технологий

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
_____ /В.В. Шайдуров
« ____ » _____ 2018 г.

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

Направление 02.03.01 Математика и компьютерные науки

**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ
ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ**

Научный руководитель
кандидат физико-математических наук,
доцент

_____ / В.Е. Распопов

Выпускник

_____ / С.В. Роднаев

Красноярск 2018

РЕФЕРАТ

Выпускная квалификационная работа по теме «Численное решение коэффициентной обратной задачи для параболического уравнения» содержит 45 страниц текста, 4 приложения, 8 использованных источников, 28 таблиц.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА, НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА, УСЛОВИЯ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЯ, НЕЛОКАЛЬНЫЕ НАЧАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ, РАЗНОСТНАЯ ЗАДАЧА, ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ.

Цель работы – численно решить обратные коэффициентные задачи для уравнения параболического типа с правой частью специального вида, разработать и реализовать алгоритм сведения обратной задачи к прямой, разработать и реализовать алгоритм численного решения прямых задач.

В результате исследований разработан алгоритм численного решения поставленных обратных задач, создан программный продукт, проведены вычислительные эксперименты.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	4
1. Численное решение обратной задачи для параболического уравнения.....	7
1.1 Постановка задачи.....	7
1.2 Сведение обратной задачи к прямой.....	8
1.3 Восстановление исходных функций	10
1.4 Алгоритм решения	14
1.5 Разностная аппроксимация	15
1.6 Результаты вычислений.....	18
2. Численное решение обратной задачи для уравнения конвекции-диффузии..	21
2.1 Постановка задачи.....	21
2.2 Сведение обратной задачи к прямой.....	22
2.3 Восстановление исходных функций	24
2.4 Алгоритм численного решения	28
2.5 Разностная аппроксимация	29
2.6 Результаты вычислений.....	32
Заключение	34
Список использованных источников	35
Приложение	36
Приложение А Результаты расчетов. Тест 1	36
Приложение Б Результаты расчетов. Тест 2.....	38
Приложение В Результаты расчетов. Тест 3	41
Приложение Г Результаты расчетов. Тест 4.....	43

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время известно немало случаев, когда потребности практики приводят к задачам определения коэффициентов дифференциальных уравнений (обыкновенных или в частных производных) по некоторым известным функционалам от его решения. Такие задачи получили название обратных задач математической физики. Прикладная значимость обратных задач настолько велика, что ставит их в ряд актуальнейших проблем современной математики. Они возникают в самых различных областях человеческой деятельности, таких как: сейсмология, разведка полезных ископаемых, биология, медицина, контроль качества промышленных изделий и т.д. Но что же такое обратные задачи и какими они бывают? Для того чтобы дать ответ на этот надо сначала договориться о том, что такое прямая задача. Рассмотрим в качестве примера задачи математической физики.

В математической физике под *прямыми задачами* обычно понимают задачи моделирования каких-либо физических полей, процессов или явлений (электромагнитных, акустических, сейсмических, тепловых и т. п.). В прямых задачах требуется найти функцию, описывающую физическое поле или процесс в каждой точке исследуемой области и в каждый момент времени (если поле нестационарное). Для решения прямой задачи задаются

1. область, в которой процесс изучается;
2. уравнение, описывающее данный процесс;
3. начальные условия (если процесс нестационарный);
4. условия на границе исследуемой области.

К обратным задачам относятся задачи, в которых необходимо определить не только основные неизвестные, но и некоторые недостающие параметры задачи и (или) условия (некоторые компоненты математической модели).[2]

Выделим коэффициентные обратные задачи, которые характеризуются тем, что коэффициенты уравнения или (и) правая часть неизвестны. В качестве примера рассмотрим параболическое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t), 0 < x < l, 0 < t \leq T. \quad (1)$$

Простейшая прямая задача состоит в нахождении функции $u(x, t)$, удовлетворяющей уравнению (1) и условиям

$$u(0, t) = \mu_1(t), u(l, t) = \mu_2(t), 0 < t \leq T, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), 0 \leq x \leq l. \quad (3)$$

В прикладных проблемах часто свойства среды неизвестны, и их нужно определять. В данном случае можно поставить задачу идентификации коэффициента $k(x)$. Характерной является задача для уравнения (1) по нахождению пары неизвестных $\{u(x, t), k(x)\}$. Основная особенность рассматриваемой обратной задачи состоит в нелинейности коэффициентной обратной задачи.[2]

Можно выделить как самостоятельную задачу определения неизвестной правой части $f(x, t)$ параболического уравнения (1). Более частные постановки связаны, например, с выбором зависимости

$$f(x, t) = \alpha(t)\beta(x). \quad (4)$$

Интерес может представлять неизвестная зависимость источника (правой части) от времени при известном распределении по пространству – в представлении (4) функция $\alpha(t)$ неизвестна, а функция $\beta(x)$ задана.[2] Для решения обратных задач необходима дополнительная информация (необходимо задавать так называемые условия переопределения).

Пусть, например, рассматривается обратная задача (1) - (4) по нахождению пары функций $\{u(x, t), \alpha(t)\}$. Помимо решения краевой задачи нужно найти зависимость от времени правой части. В этом случае дополнительная информация может иметь вид

$$u(x^*, t) = \varphi(t), 0 < x^* < l, 0 < t \leq T, \quad (5)$$

т.е. известно решение на каждый момент времени не только на границе, но и в некоторой внутренней точке расчетной области.

При рассмотрении обратных задач особое внимание должно уделяться проблемам единственности решения обратной задачи. Особенно это важно при рассмотрении нелинейных задач.[2]

Построению решений коэффициентных обратных задач посвящен ряд работ, в частности[1, 2, 6, 7, 8].

В данной бакалаврской работе численно решены две коэффициентные обратные задачи для уравнения параболического типа с неизвестной функцией источника и дополнительными условиями переопределения. Предложен алгоритм численного решения поставленных обратных задач, создан программный продукт, проведены вычислительные эксперименты.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Кабанихин, С. И. Обратные и некорректные задачи : Учебник для студентов высших учебных заведений / С. И. Кабанихин. – Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009.
2. Самарский, А. А. П. Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. : учебное пособие / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – Изд. 3-е - Москва.: ЛКИ, 2009.
3. Задорин, А. И. Кубатурные формулы для функции двух переменных с погранслойными составляющими / А. И. Задорин // Журнал вычислительной математики и математической физики – 2013. – Т. 53, № 12.
4. Распопов, В. Е. Численные методы: учебное пособие / В. Е. Распопов, М. М. Клуникова, В. А. Сапожников. – Красноярск: гос. ун-т, 2006.
5. Калиткин, Н. Н. Численные методы. : учебное пособие / Н. Н. Калиткин; под ред. А. А. Самарского . – Москва: Наука, 1978.
6. Кучунова, Е. В. Численная идентификация коэффициентов параболических уравнений / В. Е. Распопов, Е. В. Кучунова // Вестник КрасГУ. Серия «Физ.мат. Науки». – 2004. – Т. 5, №2.
7. Мандрик, Ю. В. Численная идентификация коэффициентов одного параболического уравнения / В. Е. Распопов, Ю. В. Мандрик // Вестник КрасГУ. – 2006. – №1.
8. Распопов, В. Е. Численная идентификация свободного члена специального вида в параболическом уравнении / В. Е. Распопов, Т. Ю. Жак // Международная конференция «алгебра и ее приложения»: Тезисы докладов. Красноярск, 2007.

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики
Базовая кафедра вычислительных и информационных технологий

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой

 / В.В. Шайдунов


« 4 » 06 2018 г.

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА


Направление 02.03.01 Математика и компьютерные науки

**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ
ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ**

Научный руководитель
кандидат физико-математических наук,
доцент

 / В.Е. Распопов
4 0 6 18

Выпускник

 / С.В. Роднаев
4.06.18

Красноярск 2018