Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики
Кафедра алгебры и математической логики

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
________/В. М. Левчук
«____» ______ 2018 г.

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

НЕАССОЦИАТИВНЫЕ ОБЕРТЫВАЮЩИЕ АЛГЕБРЫ И СТАНДАРТНЫЕ ИДЕАЛЫ НИЛЬТРЕУГОЛЬНОЙ ПОДАЛГЕБРЫ АЛГЕБРЫ ШЕВАЛЛЕ

Направление 01.04.01 Математика

Магистерская программа 01.04.01.02 Алгебра, логика и дискретная математика

Научный руководитель
доктор физико-математических наук
профессор ____________/ В. М. Левчук

Выпускник ____________/ Н. Д. Ходюня

Красноярск 2018

АННОТАЦИЯ

Нильтреугольную подалгебру $N\Phi(K)$ выделяют в алгебре Шевалле над полем K с базой Шевалле e_r $(r \in \Phi), \ldots$, где Φ – произвольная неразложимая система корней. Для алгебры Ли $N\Phi(K)$ в работе взаимосвязано исследуются вопрос построения ее (неассоциативной) обертывающей алгебры и задача перечисления ее стандартных идеалов, записанная в 2001 году для классических типов как проблема 1 в обзоре Г. П. Егорычева и В. М. Левчука (ACM SIGSAM Bulletin, 2001, no. 2, p. 20-34).

Ключевые слова: алгебра Шевалле, нильтреугольная подалгебра, неассоциативная обёртывающая алгебра, интегральные представления комбинаторных сумм, q-биномиальный коэффициент.

ABSTRACT

The niltriangular subalgebra $N\Phi(K)$ is distinguished in a Chevalley algebra over field K with a Chevalley basis e_r $(r \in \Phi), \ldots$ where Φ is an arbitrary indecomposable root system. For Lie algebra $N\Phi(K)$ we investigate mutually the problem of its (non-associative) enveloping algebra's construction and the problem of enumeration of its standard ideals written in 2001 for classical Lie types as Problem 1 by G. P. Egorychev and V. M. Levchuk (ACM SIGSAM Bulletin, 2001, no. 2, p. 20-34).

Keywords: Chevalley algebra, niltriangular subalgebra, non-associative enveloping algebra, integral representations of combinatorial sums, q-binomial coefficient.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что ассоциативное кольцо A превращается в кольцо Ли $A^{(-)}$, если, сохраняя сложение, введем новое умножение $[a, b] := ab - ba$ (коммутирование), [1, § V.9]. Сопоставим кольцо $A^{(-)}$ каждому (не обязательно ассоциативному) кольцу A. Произвольная алгебра A названа в [5] *обертывающей алгебры Ли* L, если $A^{(-)}$ и L изоморфны. А. Альберт (1948) использовал термин *Ли допустимой алгебры*.

Нильтреугольную подалгебру $N\Phi(K)$ выделяют в алгебре Шевалле над полем K с базой Шевалле e_r $(r \in \Phi)$, $\cdots$, [2, § 4.2], где Φ – произвольная неразложимая система корней. Для алгебры Ли $N\Phi(K)$ в работе взаимосвязано исследуются вопрос построения ее обертывающей алгебры и задача перечисления ее стандартных идеалов, записанная в 2001 году для классических типов как проблема 1 в обзоре Г.П. Егорычева и В.М. Левчука (ACM SIGSAM Bulletin, 2001, no. 2, p. 20-34).

Алгебра $NT(n, K)$ нильтреугольных $n \times n$ матриц над K представляет ассоциативную обертывающую алгебру алгебры Ли $N\Phi(K)$ типа A_{n-1}. В предложении 1.1 (§ 1) построены обертывающие алгебры R всех алгебр Ли $N\Phi(K)$. Они зависят от выбора знаков структурных констант базиса Шевалле и, для Φ типа $\neq A_n$, неассоциативны. Алгебру R называют *стандартной*, если все ее идеалы стандартны. Показывается, что стандартная обертывающая алгебра R существует для всех типов алгебр Ли $N\Phi(K)$, кроме типа D_n $(n > 3)$ и E_n $(n = 6, 7, 8)$. Такой выбор алгебры $R = RA_n(K), RB_n(K)$ и $RC_n(K)$ соответственно типа A_n, B_n и C_n обеспечивает их известное специальное матричное представление. См. § 1.

Естественно возникают следующие две задачи.

(A) *Найти число всех стандартных идеалов алгебры Ли $N\Phi(K)$ над конечным полем K.*

(B) *Выявить все обертывающие алгебры R алгебры Ли $N\Phi(K)$ классического типа, которые для типа $\neq D_n$ стандартны, а для типа D_n являются подалгеброй какой-либо стандартной алгебры R типа B_n.*

Решению задачи **(B)** для классических типов посвящены теорема 1.1 (тип A_n), теорема 1.7 (типы B_n и C_n) и ее следствие. Известно, что все обертывающие алгебры R типа G_2 стандартны.

Все стандартные обертывающие алгебры R оставшегося типа F_4 дает теорема 2.2 в § 2.

В 2015 году В. П. Кривоколеско и В. М. Левчук [14] исследовали проблему 1 из [13] в частном случае — для типа A_n — с использованием комбинаторного выражения числа $\widetilde{V}(m, t, q)$ всех собственных t-мерных подпространств в пространстве K^m при $K = GF(q)$.

Используя методы интегрального представления комбинаторных сумм, Г. П. Егорычев [16] нашел формулу для числа $\widetilde{V}(m,t,q)$ в замкнутом виде. Там же он отметил задачу об алгебраически-комбинаторном истолковании (прямом доказательстве) этих формул. В § 3 задачу решает лемма 3.5, приводящая также к некоторому упрощению формулы числа $\widetilde{V}(m,t,q)$.

Найденная недавно теорема Г. П. Егорычева, В. М. Левчука и автора (анонсирована в [5]) дает полное решение проблемы 1 из [13], т.е. задачи **(A)** для классических типов. Теорема 3.2 решает аналог проблемы для исключительных типов, завершая решение задачи **(A)**.

Решение проблемы 1 из [13] для типов A_n, B_n и C_n, очевидно, равносильно перечислению всех идеалов обертывающих алгебр $RA_n(K)$, $RB_n(K)$ и $RC_n(K)$. Теоремы 4.2 и 5.1 завершают нахождение числа всех идеалов выделенных в задаче **(B)** обертывающих алгебр.

В статье используем стандартные обозначения [2], [3]: Φ^+ — система положительных корней, Π — ее база, ρ — максимальный в Φ^+ корень, $ht(r)$ — высота корня r. Число Кокстера $h = h(\Phi)$ системы Φ равно $ht(\rho) + 1$.

1 Обертывающие алгебры $N\Phi(K)$ классических типов

Алгебра Шевалле над полем K характеризуется системой корней Φ и базой Шевалле, состоящей из элементов e_r $(r \in \Phi)$ и подходящей базы подалгебры Картана, [2, § 4.2]. Подалгебру $N\Phi(K)$ с базой $\{e_r \mid r \in \Phi^+\}$ называем *нильтреугольной*.

Произвольную (не обязательно ассоциативную) алгебру A называем *обертывающей* алгебры Ли L, если $A^{(-)} \simeq L$. В этом случае обе алгебры можем построить на одном линейном пространстве. См. также Ли-допустимые алгебры [4].

Идеалы произвольного кольца A всегда есть идеалы также кольца $A^{(-)}$, в силу производности его основных операций от операций в A. Верно и обратное, если умножение в A также производно от операций в $A^{(-)}$, например, когда $L = (L, +, [,])$ – произвольная алгебра Ли над полем характеристики $\neq 2$ и A ее обертывающая алгебра с умножением $\alpha \cdot \beta = [\alpha, \beta]/2$.

Для нильпотентных колец целесообразно следующее обобщение ассоциативности. Кольцо A называем *аннуляторно ассоциативным*, если все ассоциаторы $a(bc) - (ab)c \;\; (a, b, c \in A)$ лежат в его аннуляторе

$$Ann\ (A) = \{\alpha \in A \mid \alpha A = 0 = A\alpha\}.$$

Исследуем обертывающие алгебры нильтреугольных подалгебр $N\Phi(K)$ алгебр Шевалле. По теореме Шевалле о базисе, если $r, s \in \Phi^+$, то

$$[e_r, e_s] = N_{rs}e_{r+s}, \quad N_{sr} = -N_{rs} \;\; (r + s \in \Phi), \qquad [e_r, e_s] = 0 \; (r + s \notin \Phi),$$

где $N_{rs} = \pm 1$ или $|r| = |s| < |r + s|$ и $N_{rs} = \pm 2$ или Φ типа G_2 и $N_{rs} = \pm 2$ или ± 3. Согласно [5, Предложение 1], справедливо

Предложение 1.1. *Обертывающей для алгебры Ли $N\Phi(K)$ является K-алгебра R с базой $\{e_r \mid r \in \Phi^+\}$ и умножением: $e_re_s = 0$ при $r+s \notin \Phi$, а если $r+s \in \Phi^+$ и $N_{rs} \geq 1$, то $e_re_s = e_{r+s}$ и $e_se_r = (1 - N_{rs})e_{r+s}$.*

Доказательство. Достаточно заметить, что таблицы умножения в выбранной базе алгебр $R^{(-)}$ и $N\Phi(K)$ совпадают. $\square$

Для корней считаем $s \geq r$, когда в разложении $s - r$ по базе Π в Φ^+ все коэффициенты неотрицательны. Корни r и s в Φ^+ назовем *инцидентными*, если $s \geq r$ или $r \geq s$. Любое множество $\mathcal{L}$ попарно неинцидентных корней в Φ^+ называем *множеством углов в* Φ^+. Выделим в $N\Phi(K)$ идеалы

$$T(r) = \sum_{s \geq r} Ke_s, \quad Q(r) = \sum_{s > r} Ke_s \quad (r \in \Phi^+), \quad Q(\mathcal{L}) = \sum_{r \in \mathcal{L}} Q(r).$$

Когда $H \subseteq T(\mathcal{L}) := \sum_{r \in \mathcal{L}} T(r)$ и любая замена $T(r)$ на $Q(r)$ в сумме нарушает включение, назовем $\mathcal{L} = \mathcal{L}(H)$ *множеством углов в* H. Идеал H кольца Ли $N\Phi(K)$ называем *стандартным*, если $Q(\mathcal{L}(H)) \subset H$.

Выявим *стандартные обёртывающие алгебры* R, у которых все идеалы стандартны, по определению. Отметим, что алгебра R зависит от выбора знаков структурных констант N_{rs}, определенного в [2, Предложение 4.2.2].

Алгебра $NT(n, K)$ нильтреугольных $n \times n$ матриц над K представляет ассоциативную обёртывающую алгебру R алгебры Ли $N\Phi(K)$ типа A_{n-1}; все идеалы даже кольца R здесь стандартны [6, 7]. Обычные матричные единицы e_{ij} $(1 \leq j < i \leq n)$ составляют базу алгебры R, а также базу Шевалле $\{e_r \mid r \in \Phi^+,\ e_r = e_{ij}\}$ алгебры Ли $R^{(-)} = N\Phi(K)$ после соответствующей нумерации корней $r = r_{ij}$.

Перечислим стандартные обертывающие алгебры типа A_n. По модулю аннулятора Ke_{n1} изоморфны алгебра $NT(n, K)$ и алгебра $NT'(n, K)$, полученная заменой в $NT(n, K)$ соотношений $e_{nj}e_{j1} = e_{n1}$ и $e_{j1}e_{nj} = 0$ новыми

$$e_{nj}e_{j1} = 0, \quad e_{j1}e_{nj} = e_{n1} \qquad (j = 2, 3, ..., n-1).$$

Теорема 1.1. *Любая стандартная обертывающая алгебра R алгебры Ли $N\Phi(K)$ типа A_{n-1} $(n > 3)$ изоморфна алгебре $NT(n, K)$ или неассоциативной, но аннуляторно ассоциативной алгебре $NT'(n, K)$.*

В [8, Лемма 1.1] алгебры Ли $N\Phi(K)$ типа B_n, C_n и D_n аналогично заданы в базе из "матричных единиц" e_{iv} с ограничениями, соответственно,

$$-i < v < i \leq n, \quad -i \leq v < i \leq n,\ v \neq 0, \quad 1 \leq |v| < i \leq n.$$

Любой элемент из $N\Phi(K)$ представляют Φ^+-матрицей $||a_{iv}|| = \sum a_{iv}e_{iv}$ соответствующего типа. Так, D_n^+-матрица имеет вид

$$\begin{array}{c}
a_{2,-1}\ a_{21} \\
a_{3,-2}\ a_{3,-1}\ a_{31}\ a_{32} \\
\cdots\ \ \cdots\ \ \cdots\ \cdots\ \cdots \\
a_{n,-n+1}\ \cdots\ a_{n,-1}\ a_{n1}\ \cdots\ a_{n,n-1}.
\end{array}$$

К суммам двух корней, являющихся корнем, помимо сумм $r_{ij}+r_{jv}=r_{iv}$ (аналогично типу A_n) здесь относят еще $r_{kv}+r_{m,-v}=r_{k,-m}$ при $k>m>|v|$, а для типа C_n также при $k=m>|v|$.

Зафиксированный в [8, Лемма 2] выбор знаков структурных констант и предложение 1.1 определяют однозначно обертывающую алгебру R_Φ.

Лемма 1.2. *Умножение в обертывающей алгебре R_Φ классического типа определяют правила $e_{ij}e_{jv}=e_{iv}$, $e_{iu}e_{jv}=0$ ($u\neq j$, $u\neq -v$) и, кроме того,*

$$\Phi=C_n:\quad e_{ij}e_{i,-j}=e_{i,-i}=-e_{i,-j}e_{ij}\quad (i>j\geq 1),$$

$$e_{jm}e_{i,-m}=e_{im}e_{j,-m}=e_{i,-j},\quad e_{i,-m}e_{jm}=e_{j,-m}e_{im}=0\quad (i>j>m\geq 1);$$

$$\Phi=B_n,D_n:\ e_{iv}e_{j,-v}=0\ (i\geq j>\mid v\mid>0),\quad e_{jv}e_{i,-v}=e_{i,-j}\ (i>j>\mid v\mid>0);$$

$$\Phi=B_n:\qquad e_{i0}e_{j0}=e_{i,-j}=-e_{j0}e_{i0}\qquad (i>j\geq 1).\qquad \blacksquare$$

Алгебры R_Φ обозначаем через $RA_n(K)$, $RB_n(K)$, $RC_n(K)$ и $RD_n(K)$ соответственно типу Ф. Ясно, что $RD_n(K)$ есть подалгебра в $RB_n(K)$.

K-подмодуль M_Φ с базой $\{e_{iv}\mid 1\leq|v|<i\leq n\}$, как и в $RD_n(K)$, существует также и в алгебре $RC_n(K)$, но подалгеброй он не является.

Замечание 1. *Алгебры Ли $N\Phi(K)$ типа A_3 и D_3 изоморфны, так как их системы корней эквивалентны. В отличие от $RA_3(K)=NT(4,K)$, алгебра $RD_3(K)$ неассоциативна (в ней $e_{2,-1}(e_{32}e_{21})=e_{3,-2}$ и $(e_{2,-1}e_{32})e_{21}=0$) и имеет нестандартный идеал $\sum_{m=2}^{3}K(e_{m1}+e_{m,-1})+Ke_{3,-2}$.*

Стандартность алгебр R_Φ исследовалась в [5, Теорема 4].

Теорема 1.3. *Пусть s – угол идеала H кольца R_Φ классического типа над полем K. Если $Q(s)\not\subseteq H$, то R_Φ типа D_n ($n\geq 3$), а H имеет p-связанный с s симметричный угол $\bar{s}\neq s$ и не содержит идеалы $T(s+p)$, $T(\bar{s}+p)$.*

Корни r,s в [9] названы *p-связанными* для простого корня p или *связанными*, если $r+p,\ s+p\in\Phi^+$. Наименьшая подсистема $\Psi(r,p,s)$ системы корней Ф, содержащая $\Phi\cap(Zr+Zp+Zs)$, единственна. Подалгебра $R(\Psi):=\sum_{a\in\Psi^+}Ke_a$ в R есть одна из обёртывающих алгебры Ли $N\Psi(K)$.

Лемма 1.4. *Стандартность обёртывающей алгебры R алгебры Ли $N\Phi(K)$ равносильна стандартности ее подалгебр $R(\Psi)$ при любом выборе в Φ подсистемы корней $\Psi = \Psi(r,p,s)$ с p-связанными корнями r,s и базой $\{r,p,s\}$.*

Лемма 1.5. *Если подсистема корней $\Psi = \Psi(r,p,s)$ в Φ для p-связанных корней r,s типа A_3 и подалгебра $R(\Psi)$ в R стандартна, то*

$$N_{p,r}N_{s,p} = 1 = N_{s,r+p}N_{s+p,r}.$$

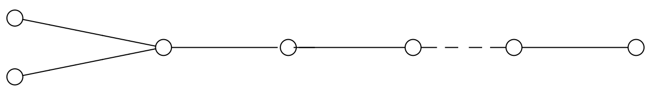
Доказательство. В кольце $R(\Psi)$ имеем $Ann(R(\Psi)^2) = Ann(T(p)) = T(p)$. Если односторонний аннулятор по модулю $R(\Psi)^3$ идеала $T(p)$ (равносильно, элемента e_p) совпадает с $R(\Psi)$ и, скажем, $e_pe_r = e_{r+p}$, то $K(e_p + e_s)$ порождает в $R(\Psi)$ нестандартный идеал. Таким образом, элементы e_r, e_s лежат в разных односторонних аннулляторах элемента e_p; один из них лежит только в $Ann^{(l)}(e_p)$, а другой — в $Ann^{(r)}(e_p)$. Это означает, что совпадают знаки структурных констант $N_{p,r}$ и $N_{s,p}$, а потому и сами константы, так что $N_{p,r}N_{s,p} = 1$. С помощью тождества Якоби, находим также равенства

$$[e_s,[e_p,e_r]] = [[e_s,e_p],e_r], \quad N_{pr}N_{s,r+p} = N_{sp}N_{s+p,r},$$

откуда $N_{s,r+p} = N_{s+p,r}$ и $N_{s,r+p}N_{s+p,r} = 1$. $\square$

Лемма 1.6. *Для алгебр Ли $N\Phi(K)$ типа D_n $(n \geq 4)$ и E_n $(n = 6,7$ и $8)$ стандартная обертывающая алгебра R не существует.*

Доказательство. Граф Кокстера системы корней типа D_n имеет вид

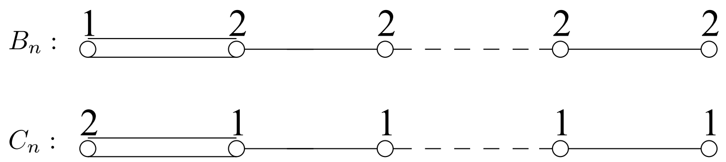
$D_n :$  (n вершин).

Достаточно доказать лемму для типа D_4, поскольку все системы корней Φ указанных в лемме типов содержат подсистему типа D_4. Пусть корень p соответствует в графе Кокстера вершине, связанной с тремя вершинами, a_1 и a_2 — двум крайним слева вершинам, а q — оставшейся вершине.

Допустим противное: стандартная обертывающая алгебра R алгебры Ли $N\Phi(K)$ типа D_4 существует. Выделим подсистемы корней $\Psi = \Psi(a_1, p, a_2)$ и $\Psi_i = \Psi_i(a_i, p, q)$ $(i = 1, 2)$ типа A_3 системы корней Φ. Тогда соответствующие подалгебры в R, по лемме 1.4, стандартны.

В силу стандартности подалгебры $R(\Psi)$, два ее элемента e_s при $s = a_1$ и $s = a_2$, по лемме 1.5, лежат в разных односторонних аннуляторах элемента e_p. Но это противоречит стандартности подалгебр $R(\Psi_1)$ и $R(\Psi_2)$. $\square$

Исследуем произвольную стандартную обертывающую алгебру R алгебры Ли $N\Phi(K)$ типа B_n или C_n. Когда подсистема корней $\Psi = \Psi(r, p, s)$ имеет корни разных длин, с точностью до перехода от подалгебры $R(\Psi)$ к $R(\Psi)^{(op)}$, можно считать, что $|p| = |s|$ и либо Ψ типа B_3 и $2r + p \in \Psi$, либо Ψ типа C_3 и $2p + r \in \Psi$. Схема Дынкина системы корней Φ ([9, 10])



здесь однозначно определяет простые корни a, b такие, что $a + b, 2a + b \in \Phi$. Один из них соответствует крайней вершине. Очевидно, фактор-алгебра $N\Phi(K)/T(2a + b)$ изоморфна алгебре Ли $N\Phi(K)$ типа A_n, [9].

Обозначим через g корень, соответствующий оставшейся крайней вершине, через f и d – корни наибольшей высоты, неинцидентные $2a + b$ и g, соответственно. Ясно, что $T(f) + T(2a + b)$ – прообраз аннулятора фактор-алгебры $R/T(2a + b)$. Фактор-алгебра $N\Phi(K)/T(g)$ изоморфна алгебре Ли $N\Phi(K)$ исходного типа, но ранга $n - 1$. С другой стороны, $T(g) + T(d)$ — это прообраз аннулятора фактор-алгебры $R/T(g)$ и, кроме того,

$$[T(2a + b) + T(f)] \cap [T(g) + T(d)] = T(f) + T(d).$$

Следующая теорема В.М. Левчука и автора, использующая леммы 1.4 и 1.5, завершает описание стандартных обертывающих алгебр R классических типов. Пусть $RB_n'(K)$ — алгебра, полученная заменой соотношений $e_{i0}e_{j0} = e_{i,-j} = -e_{j0}e_{i0}$ $(i > j \geq 1)$ в $RB_n(K)$ новыми

$$e_{j0}e_{i0} = e_{i,-j} = -e_{i0}e_{j0} \qquad (i > j \geq 1).$$

Теорема 1.7. *Пусть R – произвольная стандартная обёртывающая алгебра алгебры Ли $N\Phi(K)$. Тогда для типа B_n фактор-алгебра алгебры R или $R^{(op)}$ по идеалу $T(f)$ изоморфна фактор-алгебре по $T(f)$ алгебры $RB_n(K)$*

или $RB'_n(K)$. *Для типа* C_n *фактор-алгебра алгебры* R *или* $R^{(op)}$ *по идеалу* $T(f)+T(d)$ *изоморфна* $RC_n(K)/[T(f)+T(d)]$.

Сейчас легко описать подалгебру M_Φ с базой $\{e_{iv} \mid 1 \leq |v| < i \leq n\}$ в стандартной обёртывающей алгебре R алгебры Ли $N\Phi(K)$ типа B_n. Идеал $M_\Phi \cap T(f)$ в матричных обозначениях здесь записывается как $T(n,-1)$.

Следствие 1.7.1. *С точностью до перехода от* R *типа* B_n *к* $R^{(op)}$*, имеем*

$$M_\Phi \;/\; T(n,-1) \simeq RD_n(K) \;/\; T(n,-1).$$

2 Обертывающие алгебры типа F_4

В этом параграфе дано описание стандартных обертывающих алгебр типа F_4. Для системы корней Φ типа F_4 нам понадобятся обозначения из [11]. Системы положительных корней типов B_n и C_n [3, таблицы I-IV] могут быть записаны, соответственно, как

$$C_n^+ = \{p_{iv} \mid 0 < |v| \leq i \leq n, v \neq i\}, \qquad B_n^+ = \{q_{ij} \mid 0 \leq |j| < i \leq n\}.$$

Система положительных корней типа F_4^+ представляется как объединение $C_4^+ \cup B_4^+$ с пересечением

$$B_4^+ \cap C_4^+ = \{q_{i0}, p_{i,-i} \ (1 \leq i \leq 4)\}.$$

Мы используем также следующую диаграму из [11]. (Для корней используется обозначение (abcd) из [3, таблица VIII].)

В [12] автором доказана

Лемма 2.1 ([12, Лемма 1.3])**.** *Идеалы обертывающего кольца* R *типа* F_4 *стандартны, если выполняются следующие равенства:*

$$\begin{aligned}
N(q_{32},q_{21}) = N(q_{21},q_{10}), &\quad N(q_{32},q_{21}) = N(q_{21},p_{31}),\\
N(q_{10},p_{32}) = N(q_{21},q_{10}), &\quad N(q_{10},p_{32}) = -N(q_{10},q_{31}),\\
N(q_{10},p_{3,-1}) = -N(q_{10},q_{31}), &\quad N(q_{21},q_{3,-1}) = -N(q_{21},p_{31}),\\
N(p_{32},q_{30}) = -N(p_{32},q_{2,-1}), &\quad N(q_{32},q_{2,-1}) = -N(q_{32},p_{3,-1}).
\end{aligned} \tag{1}$$

Заметим, что равенства (1) также необходимы для стандартности обертывающей алгебры R.

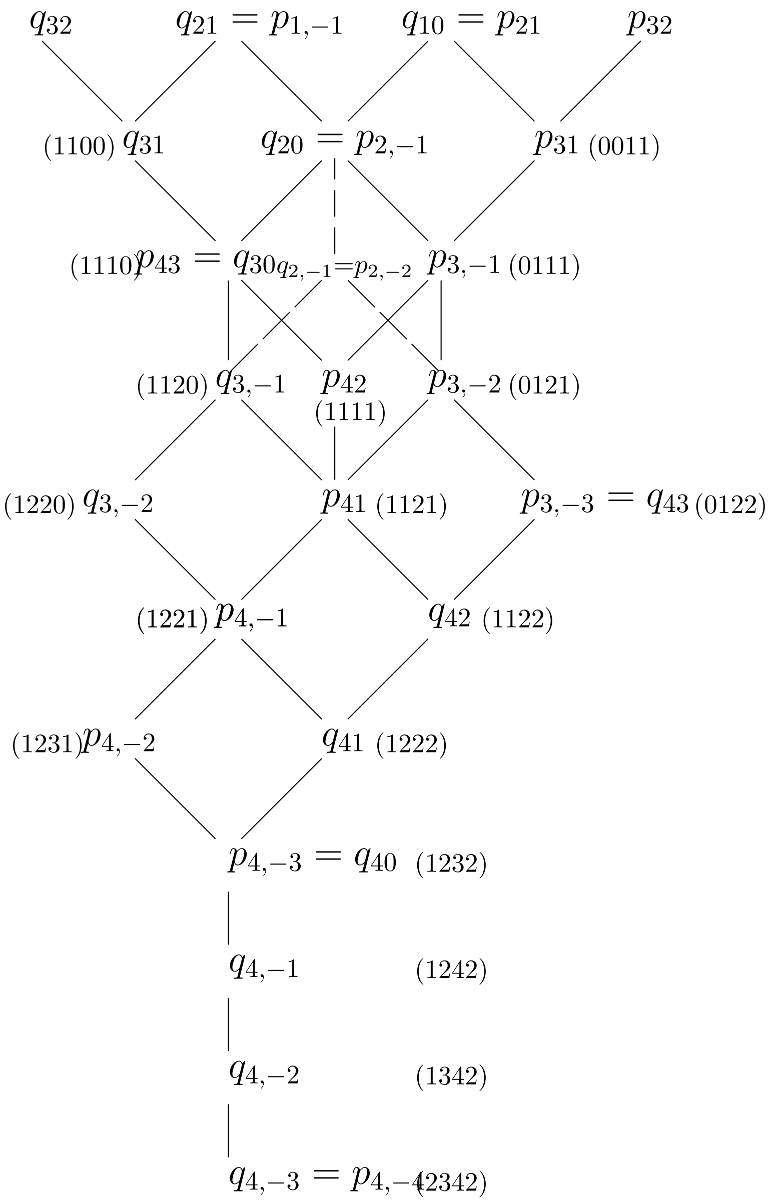


Рисунок 1- Положительные корни системы F_4

Теорема 2.2. *Пусть R_1 и R_2 – стандартные обертывающие алгебры типа F_4. Фактор-алгебра R_1 или $R_1^{(op)}$ по идеалу $T(q_{2,-1}) + T(p_{42})$ изоморфна $R_2/[T(q_{2,-1}) + T(p_{42})]$.*

Доказательство. С точностью до перехода от R_1 к противоположному кольцу $R_1^{(op)}$, можем полагать $N(q_{32}, q_{21}) = 1$. Тогда равенства (1) дают

$$\begin{gathered} N(q_{32}, q_{21}) = N(q_{21}, q_{10}) = N(q_{21}, p_{31}) = N(q_{10}, p_{32}) = 1, \\ N(q_{31}, q_{10}) = N(q_{10}, p_{3,-1}) = N(q_{3,-1}, q_{21}) = 1. \end{gathered} \tag{2}$$

Пользуясь тождеством Якоби, находим $[e_{q_{10}}, [e_{q_{32}}, e_{q_{21}}]] = -[e_{q_{32}}, [e_{q_{21}}, e_{q_{10}}]]$,

$[e_{p_{32}}, [e_{q_{21}}, e_{q_{10}}]] = [e_{q_{21}}, [e_{p_{32}}, e_{q_{10}}]]$ и

$$N(q_{32}, q_{20}) = N(q_{20}, p_{32}) = 1. \tag{3}$$

Равенства (2) и (3) однозначно определяют фактор-алгебру произвольной обертывающей алгебры R по идеалу $T(q_{2,-1}) + T(p_{42})$. $\square$

3 Перечисление стандартных идеалов

Задача **(A)** комбинаторного перечисления стандартных идеалов алгебр Ли $N\Phi(q) := N\Phi(GF(q))$ для классических типов была решена (как проблема 1 из [13]) теоремой Г. П. Егорычева, В. М. Левчука и автора и ее решение анонсировано в [5].

Теорема 3.1. *Число стандартных идеалов алгебры Ли $N\Phi(K)$ классического типа над конечным полем $K = GF(q)$ равно*

$$\Omega(\Phi, q) = \sum_{m=0}^{n} B(m, \Phi) \sum_{t=1}^{m} \sum_{k=0}^{m-t} (-1)^{m-t-k} q^k \binom{m-1}{t+k-1} \begin{bmatrix} t+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q,$$

где $B(m, \Phi) = \binom{n}{m}^2$ для типа B_n и C_n, а также

$$B(m, A_{n-1}) = \frac{1}{n}\binom{n}{m}\binom{n}{m+1}, \quad B(m, D_n) = \binom{n}{m}\left(\binom{n-1}{m} + \binom{n-2}{m-2}\right).$$

Следующая теорема дает решение задачи **(A)** для исключительных типов.

Теорема 3.2. *Число стандартных идеалов алгебры Ли $N\Phi(q)$ исключительного типа равно*

$$G_2: \ q + 7; \qquad F_4: \ q^4 + 3\,q^3 + 44\,q^2 + 32\,q + 25;$$

$$E_6: \ q^9 + 3\,q^8 + 4\,q^7 + 67\,q^6 + 69\,q^5 + 230\,q^4 + 306\,q^3 + 94\,q^2 + 22\,q + 37;$$

$$E_7: \ 2\,(q^{12} + q^{11} + 3\,q^{10} + 32\,q^9 + 90\,q^8 + 118\,q^7 + 394\,q^6 + 449\,q^5 +$$
$$+ 708\,q^4 + 300\,q^3 - 79\,q^2 + 31\,q + 32);$$

$$E_8: \ q^{16} + 3\,q^{15} + 4\,q^{14} + 7\,q^{13} + 237\,q^{12} + 239\,q^{11} + 693\,q^{10} + 1647\,q^9 + 3554\,q^8 +$$
$$+ 4283\,q^7 + 5829\,q^6 + 7055\,q^5 + 3773\,q^4 - 2361\,q^3 - 244\,q^2 + 239\,q + 121.$$

Доказательство. Согласно [9], стандартный идеал H в $N\Phi(K)$ характеризуют множество углов $\mathcal{L} = \mathcal{L}(H)$ и *фрейм* $\mathcal{F}(H)$, определяемый условиями

$$\mathcal{F}(H) \subseteq \sum_{s \in \mathcal{L}} Ke_s, \quad \mathcal{F}(H) = H \mod Q(\mathcal{L}).$$

Более точно, стандартность H равносильна условию $H = Q(\mathcal{L}) + \mathcal{F}(H)$.

Пусть K^m – пространство строк длины m над полем K. Его подпространство S называем *собственным*, если при любом i, $1 \leq i \leq m$, в S существует элемент с ненулевой i-той координатой. Ясно, что любой стандартный идеал H алгебры Ли $N\Phi(K)$ с $\mathcal{L} = \mathcal{L}(H)$ порядка m имеет вид

$$H(\mathcal{L}, S) = Q(\mathcal{L}) + \{a_1 e_{r_1} + a_2 e_{r_2} + \cdots + a_m e_{r_m} \,|\, (a_1, a_2, \ldots, a_m) \in S\} \qquad (4)$$

для однозначно определенного собственного подпространства S в K^m.

Число всех собственных t-мерных подпространств пространства K^m при $K = GF(q)$ обозначим через $\tilde{V}(m, t, q)$, а через $B(\Phi, m)$ — число всех m-элементных множеств углов $\mathcal{L}$ в Φ^+. Из биективности соответствия (4) между стандартными идеалами и парами $(\mathcal{L}, S)$ сразу же вытекает

Лемма 3.3. *Число всех стандартных идеалов алгебры Ли $N\Phi(q)$ ранга n равно*

$$\Omega(\Phi, q) = 1 + \sum_{m=1}^{n} B(\Phi, m) \sum_{t=1}^{m} \widetilde{V}(m, t, q). \qquad (5)$$

Наряду с решением задачи **(B)** для типа A_n, в [14] установлена формула

$$\widetilde{V}(m, t, q) = \sum_{1 = j_1 < j_2 < \ldots < j_t \leq m} \frac{(q^t - 1)^{m - j_t}}{(q-1)^{t - j_t}} \cdot \prod_{k=2}^{t-1} \left(\frac{q^k - 1}{q - 1} \right)^{j_{k+1} - j_k - 1}.$$

Для ее исследования Г. П. Егорычев распространил разработанный [15] метод интегрального представления комбинаторных сумм на случаи, когда суммы включают q-биномиальные коэффициенты

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q := \prod_{i=0}^{k-1} \frac{1 - q^{n-i}}{1 - q^{i+1}}.$$

Он доказал [16, Леммы 3 и 4] следующую лемму, вместе с рекуррентным соотношением

$$\widetilde{V}(m,t,q) = \sum_{k=0}^{m-t} (q^t - 1)^k \times \widetilde{V}(m-1-k, t-1, q). \tag{6}$$

Лемма 3.4. *Справедлива следующая формула*

$$\widetilde{V}(m,t,q) = \sum_{k=0}^{m-t} (-1)^{m-t-k} q^k \binom{m-1}{t+k-1} \begin{bmatrix} t+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q . \tag{7}$$

В связи с отмеченной в [16, заключение] задачей об алгебраически-комбинаторном истолковании (прямом доказательстве) формул (6) и (7), установлена следующая лемма.

Лемма 3.5. *Справедлива следующая формула*

$$\widetilde{V}(m,t,q) = \sum_{k=0}^{m-t} (-1)^k \binom{m}{k} \begin{bmatrix} m-k \\ t \end{bmatrix}_q . \tag{8}$$

Доказательство. Рекуррентную формулу (6) позволяет получить перенесение схемы перечисления в [14] канонических баз. К формуле (8) несложно приводят подстановка в (7) тождества

$$q^k \begin{bmatrix} t+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} t+k \\ t \end{bmatrix}_q - \begin{bmatrix} t+k-1 \\ t \end{bmatrix}_q$$

и q-аналог $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right]_q = \left[\begin{smallmatrix} n \\ n-k \end{smallmatrix}\right]_q$ известной комбинаторной формулы.

Докажем формулу (8) для числа $\widetilde{V}(m,t,q)$ всех собственных t-мерных подпространств в K^m при $K = GF(q)$.

Известно, что число всех t-мерных подпространств в K^m равно $\left[\begin{smallmatrix} m \\ t \end{smallmatrix}\right]_q$. Пусть U_i $(1 \leq i \leq m)$ – подпространство размерности $m-1$ всех векторов в K^m с нулевой i-й координатой. Ясно, что любое подпространство в U_i является несобственным в K^m, а каждое несобственное в K^m подпространство содержится хотя бы в одном подпространстве U_i.

Обозначим через $\hat{U}_i$ множество всех t-мерных подпространств в U_i. Пользуясь также формулой включений-исключений, находим формулу (8):

$$\widetilde{V}(m,t,q) = \begin{bmatrix} m \\ t \end{bmatrix}_q - \sum_i |\hat{U}_i| + \sum_{i \neq j} |\hat{U}_i \cap \hat{U}_j| - \sum_{i \neq j \neq k} |\hat{U}_i \cap \hat{U}_j \cap \hat{U}_k| + \dots =$$

$$\begin{bmatrix} m \\ t \end{bmatrix}_q - \binom{m}{1} \begin{bmatrix} m-1 \\ t \end{bmatrix}_q + \binom{m}{2} \begin{bmatrix} m-2 \\ t \end{bmatrix}_q + \dots + (-1)^{m-t} \binom{m}{m-t} \begin{bmatrix} m-(m-t) \\ t \end{bmatrix}_q .$$

□

Используя лемму 3.3, немедленно получаем $\Omega(\Phi, q) = q + 7$ для типа G_2. В оставшихся случаях числа $B(\Phi, m)$ получаем, используя представления Φ^+ типа F_4 в [11] и типов E_n $(n = 6, 7, 8)$ в [17]. Таблица 1 отражает результаты вычислений. (См. также [18, замечание 5.2].)

Таблица 1 - Значения $B(\Phi, m)$ для типов F_4 и E_n

Φ/m	0	1	2	3	4	5	6	7	8
F_4	1	24	55	24	1				
E_6	1	36	204	351	204	36	1		
E_7	1	63	546	1470	1470	546	63	1	
E_8	1	120	1540	6120	9518	6120	1540	120	1

Подстановка соответствующих значений из таблицы 1 и (8) вместо $B(\Phi, m)$ и $\widetilde{V}(m,t,q)$ в (5) завершает доказательство теоремы 3.2. □

4 Канонический базис идеала

В связи с проблемой 2 из [13] перечисления всех идеалов алгебр Ли $N\Phi(q)$ классических типов, в [19, § 4] рассматривались специальные базисы лиевых идеалов алгебр $NT(n, K)$ — с термином канонический базис.

Аналогичные базисы подалгебр в алгебрах Ли $N\Phi(K)$ выявляет

Лемма 4.1. *Пусть H – ненулевая подалгебра алгебры Ли $N\Phi(K)$ над полем K и $\mathcal{L} = \mathcal{L}(H) = \{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$. Тогда любую базу пересечения $Q(\mathcal{L}) \cap H$ можно дополнить до базы в H элементами*

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} e_{r_j} + \alpha_i', \quad i = 1, 2, \ldots, t, \quad t = \dim_K \ H/H \cap Q(\mathcal{L}), \tag{9}$$

где $||a_{ij}||$ – $t \times m$-матрица ранга t над K $(t \leq m)$ и $\alpha_i' \in Q(\mathcal{L})$. Кроме того, при фиксированном упорядочении $\mathcal{L}$ для однозначно определенных номеров $j_1 = 1 < j_2 < \cdots < j_t \leq m$ можно считать

$$a_{i,j_i} = 1 \ (1 \leq i \leq t), \quad a_{ik} = 0 \ (k < j_i), \quad a_{i,j_k} = 0, \ 1 \leq i < k \leq t. \tag{10}$$

Доказательство. Ясно, что $Q(\mathcal{L}) + H = Q(\mathcal{L}) + \mathcal{F}(H)$ есть стандартный идеал в $N\Phi(K)$, имеющий вид $H(\mathcal{L}, S)$ из (4). Элементы $\alpha_i \in H$ и равенства (10) получаем, используя изоморфизм

$$(H + Q(\mathcal{L}))/Q(\mathcal{L}) \simeq H/H \cap Q(\mathcal{L}).$$

Уточним матрицу $||a_{ij}||$ из (9). Очевидно, базисный элемент $\alpha_1 \in H$ всегда можно выбрать так, что $a_{11} = 1$; положим $j_1 = 1$ и обозначим через H_1 подалгебру элементов из H с нулевым коэффициентом при e_{r_1}. Если α_i, j_i и H_i уже определены при $1 \leq i < t$, то элемент $\alpha_{i+1} \in H_i$ выбираем с наименьшим возможным номером j_{i+1} первой ненулевой координаты; можно считать $a_{i+1,k} = 1$ при $k = j_{i+1}$. Через H_{i+1} обозначаем подалгебру элементов из H_i с нулевым коэффициентом при $e_{r_k}, \ k = j_{i+1}$.

Продолжая аналогично, на t-м шаге выбираем в H_{t-1} элемент α_t с коэффициентом $a_{t,j_t} = 1$ и $H_t = H \cap Q(\mathcal{L})$. Элементарные преобразования дают сейчас оставшиеся в (10) равенства $a_{i,j_k} = 0$ последовательно для $i = 1, 2, \cdots, t-1$ и $i < k \leq t$. Это завершает доказательство леммы. □

Уточним базу (9) для нестандартного идеала H обертывающей алгебры $RD_n(K)$. По теореме 1.3, $Q(r) \subset H$ для всех его углов r, кроме двух симметричных углов s и $\bar{s}$. Простой корень $p \neq \bar{p}$, инцидентный с s, и простой корень

$p_0 = \bar{p}_0$ такой, что $p + p_0 \in \Phi^+$, определены однозначно, причем $T(s_0 + \bar{p}) \subset H$, где полагаем $s_0 = s + p_0$ при $s = p$ и $s_0 = s$ при $s \neq p$.

Если неинцидентные с s и $\bar{s}$ простые корни $p_j = \bar{p}_j$ выберем так, что

$$s_i = s + p_1 + p_2 + \cdots + p_i \in \Phi^+, \quad 1 \leq i < n - ht(s), \tag{11}$$

то $Q(s_i) \subseteq H$ при $i = n - 1 - ht(s)$. Поэтому существует наименьший номер k с условиями $Q(s_k) \subseteq H$ и $1 \leq k \leq n - 1 - ht(s)$. Записывая $\mathcal{L}$ в виде

$$\mathcal{L} = \{r_1 = s, r_2 = \bar{s}, r_3, \ldots, r_m\} \quad (2 \leq m = |\mathcal{L}| < n), \tag{12}$$

при $3 \leq j \leq m$ имеем $\bar{r}_j = r_j$. Сопоставим H, по лемме 4.1, $t \times m$-матрицу $||a_{ij}||$ над K ранга t $(1 \leq t < m)$ с условиями (10). Тогда $a_{12} = c \neq 0$ и

$$H \cap Q(\mathcal{L}) = T(s_0 + \bar{p}) + Q(s_k) + Q(\bar{s}_k) + \sum_{j=1}^{k} K(e_{s_j} + ce_{\bar{s}_j}) + \sum_{j=3}^{m} Q(r_j)$$

(последнее слагаемое при $m = 2$ отбрасываем). Упрощая в (9) элементы α_i по модулю $H \cap Q(\mathcal{L})$, находим $d_i \in K$ такие, что $\alpha'_i = d_i e_{s_k},\ i = 1, 2, \ldots, t$.

Таким образом, идеал H представляется в виде

$$Id\ \{\mathcal{L}, k, t, ||a_{ij}||,\ c, d_1, \cdots d_t\} := \sum_{i=1}^{t} K(d_i e_{s_k} + \sum_{j=1}^{m} a_{ij} e_{r_j}) + \tag{13}$$

$$+T(s_0 + \bar{p}) + Q(s_k) + Q(\bar{s}_k) + \sum_{j=1}^{k} K(e_{s_j} + ce_{\bar{s}_j}) + \sum_{j=3}^{m} Q(r_j),$$

где корни s_i определены в (11). Его однозначно характеризуют множество углов $\mathcal{L} = \mathcal{L}(H)$ вида (12), параметры k, t с условиями

$$1 \leq k \leq n - 1 - ht(s), \quad 1 \leq t = \dim_K\ H/H \cap Q(\mathcal{L}) < |\mathcal{L}| = m < n,$$

элементы $c \neq 0,\ d_1, \cdots, d_t$ из K и $t \times m$-матрица $||a_{ij}||$ над K ранга t с условиями $a_{12} = c$ и (10). Тем самым, доказана

Теорема 4.2. *В обертывающей алгебре $RD_n(K)$ всякий нестандартный идеал H имеет множество углов $\mathcal{L} = \mathcal{L}(H)$ вида* (12) *и представляется как идеал* (13)*, однозначно характеризуемый набором $\mathcal{L}, k, t, ||a_{ij}||,\ c, d_1, \cdots d_t$.*

В заключение параграфа рассмотрим базис (9) произвольного нестандартного идеала H алгебры Ли $NA_{n-1}(K) = NT(n, K)$. Так как $Q(\mathcal{L}) \nsubseteq H$, то существует p-связанная пара углов $r, s \in \mathcal{L} = \mathcal{L}(H)$ в H с простым корнем

p, для которых $T(r+p) \nsubseteq H$ и $T(s+p) \nsubseteq H$. Множество $n(H)$ всех простых корней p с такой p-связанной парой углов в H непусто.

Пусть $Q^*(\mathcal{L})$ – подалгебра в $Q(\mathcal{L})$, базис которой составляют все элементы e_a базиса Шевалле, лежащие в $Q(\mathcal{L}) \cap H$. Тогда, в силу [7, Теорема 2], любая база в $Q^*(\mathcal{L})$ дополняется до базы в $Q(\mathcal{L}) \cap H$ элементами

$$\beta_p = e_{r+p} - c_p e_{s+p} \in e_p * H + Q^*(\mathcal{L}) \quad (p \in n(H)), \tag{14}$$

где $r = r(p)$ и $s = s(p)$ – p-связанные углы в H, однозначно определяемые через p, причем $b_s = c_p b_r$ для всех $\sum_{v\in\Phi^+} b_v e_v \in H + Q(\mathcal{L})$ и констант $c_p \neq 0$ из K. Ясно, что по модулю $Q(\mathcal{L}) \cap H$ элементы α_i из (9) имеют вид

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} e_{r_j} + \sum_{p\in n(H)} d_{ip} e_{p+r(p)}, \quad i = 1, 2, \dots, t \ \ (d_{ip} \in K). \tag{15}$$

Таким образом, доказана (см. также [19, § 4])

Теорема 4.3. *Пусть H – идеал алгебры Ли $NA_{n-1}(K) = NT(n, K)$ $(n \geq 4)$ и $Q(\mathcal{L}) \nsubseteq H$. Тогда базу пересечения $Q(\mathcal{L}) \cap H$ образуют все элементы e_a $(a \in \Phi^+)$ из него вместе с $|n(H)|$ элементами* (14)*, которые однозначно определяют множества $\mathcal{L} = \mathcal{L}(H)$, $n(H)$ и $|n(H)|$ констант $c_p \neq 0$ из K. Базу H по модулю $Q(\mathcal{L}) \cap H$ образуют $t = \dim_K \ H/H \cap Q(\mathcal{L}) < |\mathcal{L}| = m$ элементов* (15)*, характеризуемых $t \times m$-матрицей $||a_{ij}||$ ранга t и $t \times |n(H)|$-матрицей $||d_{ip}||$ над K.*

5 Перечисление идеалов алгебры $RD_n(q)$

Теорема 9 в [5], решая проблему 1 из [13] о числе всех стандартных идеалов алгебры Ли $N\Phi(q)$ классического типа над полем $K = GF(q)$, дает и число всех идеалов ее обертывающей алгебры $R_\Phi(q)$, когда она стандартна. Поэтому, в силу теорем 1.1 и 1.7, перечисление идеалов любой стандартной обёртывающей алгебры R из предложения 1.1 типов A_n, B_n и C_n также завершено.

Учитывая лемму 1.6 и следствие 1.7.1, для классических типов нам остается перечислить нестандартные идеалы обёртывающей алгебры $RD_n(q)$.

Основной в этом параграфе является

Теорема 5.1. *Число нестандартных идеалов алгебры* $RD_n(q)$ *равно*

$$\sum_{m=2}^{n-1}\binom{n-2}{m-2}\binom{n-1}{m}\sum_{t=1}^{m-1}q^t(q-1)\sum_{j=0}^{m-1-t}(-1)^j\binom{m-1}{j}\begin{bmatrix}m-1-j\\ t\end{bmatrix}_q.$$

Доказательство. По теореме 4.2, нестандартные идеалы алгебры $RD_n(q)$ исчерпываются идеалами вида (13), которые характеризуются однозначно набором $\mathcal{L}, k, t, ||a_{ij}||,\ c, d_1, \cdots d_t$.

Далее, записывая $\mathcal{L}$ как в (12), в матричном представлении считаем

$$e_s = e_{i1}, \quad e_{\bar{s}} = e_{i,-1}, \quad e_{s_k} = e_{i+k,1} \quad (2 \le i < n-k).$$

Через $B(m,n,i,k)$ обозначим число всевозможных $(m+2)$-элементных множеств углов вида (12), у которых два угла соответствуют базисным элементам e_s и $e_{\bar{s}}$ и нет углов в строках с номерами j, $i < j \le k$. Нам потребуется

Лемма 5.2. *Число нестандартных идеалов алгебры* $RD_n(q)$ *равно*

$$\sum_{m=2}^{n-1}\sum_{i=2}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-i}B(m,n,i,k)\sum_{t=1}^{m-1}q^t(q-1)\widetilde{V}(m-1,t,q). \tag{16}$$

Доказательство. При фиксированных $\mathcal{L} = m$ и k число способов выбора параметра $c \neq 0$ в $K = GF(q)$ и наборов $(d_1, \cdots, d_t)$ над K равно $q^t(q-1)$. Согласно доказательству леммы 4.1, число возможностей выбора матриц $||a_{ij}||$, требуемых для канонических базисов идеалов, совпадает с $\widetilde{V}(m-1,t,q)$ при любых t, m. Отсюда для числа нестандартных идеалов алгебры $RD_n(q)$ получаем формулу (16). □

Пусть $B^{(-)}(u,l)$ – число l-элементных множеств углов в D_n^+-матрице таких, что последний угол расположен левее (-1)-го столбца и выше $(u+3)$-й строки и $B^{(+)}(u,n-u-1,l)$ – число l-элементных множеств углов таких, что первый угол расположен правее 1-го столбца и ниже $(n-u)$-й строки. В этих обозначениях

$$B(m,n,i,k) = \sum_{l=0}^{m} B^{(-)}(i-3,l)B^{(+)}(n-i-k,i+k-1,m-2-l).$$

Применяя [20, теорема 10.14.1], находим

$$B^{(+)}(u,v,l) = \binom{u+v}{l}\binom{u}{l} - \binom{u+v-1}{l-1}\binom{u+1}{l+1}.$$

Несложная индукция по v дает также равенство $B^{(-)}(u,v) = \binom{u+1}{2v}$.

Следующая лемма Г. П. Егорычева является основной в доказательстве теоремы 5.1.

Лемма 5.3. *Справедлива формула*

$$\sum_{i=2}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-i} B(m,n,i,k) = \binom{n-2}{m-2}\binom{n-1}{m}.$$

Доказательство. Для иллюстрации метода Г.П. Егрычева приведем доказательство полностью.

Вычисления показывают.

$$\begin{aligned}
&B^{(+)}(n-i-k, i+k-1, m-2-l)\\
=&\binom{n-1}{m-2-l}\binom{n-i-k}{m-2-l} - \binom{n-2}{m-3-l}\binom{n-i-k+1}{m-1-l}\\
=&\operatorname*{res}_{z,w}\{\frac{(1+z)^{n-1}}{z^{l+1}}\frac{(1+w)^{u}}{w^{l+1}} - \frac{(1+z)^{n-2}}{z^{(l-1)+1}}\frac{(1+w)^{u+1}}{w^{(l+1)+1}}\}\\
=&\operatorname*{res}_{z,w}\{\frac{(1+z)^{n-2}(1+w)^{u}(w-z)}{z^{l+1}w^{(l+1)+1}}\} = \operatorname*{res}_{z,w}\{\frac{(1+z)^{n-2}(1+w)^{n-i-k}(w-z)}{z^{(m-2-l)+1}w^{(m-1-l)+1}}\},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=2}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-i} B(m,n,i,k)\\
=&\sum_{i=2}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-i}\sum_{l=0}^{m} B^{(-)}(i-3,l)B^{(+)}(n-i-k,i+k-1,m-2-l)\\
=&\sum_{i=2}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-i}\operatorname*{res}_{z,w}\{\frac{(1+z)^{n-2}(1+w)^{n-i-k}(w-z)}{z^{(m-2)+1}w^{(m-1)+1}}\}\times\sum_{l=0}^{m}(zw)^l\binom{i-2}{2l}\\
=&\sum_{i=2}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-i}\operatorname*{res}_{z,w}\{\frac{(1+z)^{n-2}(1+w)^{n-i-k}(w-z)}{z^{(m-2)+1}w^{(m-1)+1}}\frac{((1+\sqrt{zw})^{i-2}+(1-\sqrt{zw})^{i-2})}{2}\}\\
=&\frac{1}{2}\operatorname*{res}_{z,w}\{\frac{(1+z)^{n-2}(1+w)^{n-2}(w-z)}{z^{(m-2)+1}w^{(m-1)+1}}\\
&\times[\sum_{i=2}^{\infty}\left(\frac{(1+\sqrt{zw})}{(1+w)}\right)^{i-2}+\sum_{i=2}^{\infty}\left(\frac{(1-\sqrt{zw})}{(1+w)}\right)^{i-2}]\times\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(1+w)}\right)^{k}\}
\end{aligned}
$$

(суммирование по индексам i и k: $|w|\gg 1, |(1+\sqrt{zw})/(1+w)|<1$, $|(1-\sqrt{zw})/(1+w)|<1$, формула геометрической прогрессии)

$$
\begin{aligned}
=&\frac{1}{2}\operatorname*{res}_{z,w}\{\frac{(1+z)^{n-2}(1+w)^{n-2}(w-z)}{z^{(m-2)+1}w^{(m-1)+1}}\\
&\times[\frac{1}{1-\frac{(1+\sqrt{zw})}{(1+w)}}+\frac{1}{1-\frac{(1-\sqrt{zw})}{(1+w)}}]\times\frac{1}{(1+w)}\times\frac{1}{1-\frac{1}{(1+w)}}\}\\
=&\frac{1}{2}\operatorname*{res}_{z,w}\{\frac{(1+z)^{n-2}(1+w)^{n-1}(w-z)}{z^{(m-2)+1}w^{(m-1)+1}}\times[\frac{1}{w-\sqrt{zw}}+\frac{1}{w+\sqrt{zw}}]\times\frac{1}{w}\\
=&\frac{1}{2}\operatorname*{res}_{z,w}\{\frac{(1+z)^{n-2}(1+w)^{n-1}(w-z)}{z^{(m-2)+1}w^{(m-1)+1}}\times\frac{2w}{w^2-zw}\times\frac{1}{w}\}\\
=&\operatorname*{res}_{z,w}\{\frac{(1+z)^{n-2}(1+w)^{n-1}(w-z)}{z^{(m-2)+1}w^{m+1}}\times\frac{w}{w(w-z)}\}\\
=&\operatorname*{res}_{z,w}\{\frac{(1+z)^{n-2}(1+w)^{n-1}}{z^{(m-2)+1}w^{m+1}}\}\\
=&\operatorname*{res}_{z}\{\frac{(1+z)^{n-2}}{z^{(m-2)+1}}\times\operatorname*{res}_{z,w}\{\frac{(1+w)^{n-1}}{w^{m+1}}\}=\binom{n-2}{m-2}\binom{n-1}{m}.
\end{aligned}
$$

□

Для завершения доказательства теоремы остается подставить полученное значение в (16). □

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для алгебры Ли $N\Phi(K)$ в работе взаимосвязано исследуются вопрос построения ее обертывающей алгебры и задача перечисления ее стандартных идеалов. Теорема 2.2 в § 2 дает описание всех стандартных обертывающих алгебр R типа F_4 и, тем самым, завершает решение задачи **(B)**.

В § 3 задачу из [16] об алгебраически-комбинаторном истолковании (прямом доказательстве) формул (6) и (7) решает лемма 3.5, приводящая также к некоторому упрощению формулы числа $\widetilde{V}(m,t,q)$. С учетом леммы 3.5 окончательная формулировка теоремы 3.1 принимает следующий вид.

Теорема. *Число стандартных идеалов алгебры Ли $N\Phi(q)$ классического типа Φ лиева ранга n равно*

$$1+\sum_{m=1}^{n} B(\Phi,m)\sum_{t=1}^{m}\sum_{k=0}^{m-t}(-1)^k\binom{m}{k}\begin{bmatrix} m-k \\ t \end{bmatrix}_q,$$

где $B(\Phi,m)=\binom{n}{m}^2$ для типов B_n и C_n, а также

$$B(A_{n-1},m)=\frac{1}{n}\binom{n}{m}\binom{n}{m+1},\quad B(D_n,m)=\binom{n}{m}\left(\binom{n-1}{m}+\binom{n-2}{m-2}\right).$$

Теорема 3.2 решает аналог проблемы для исключительных типов, завершая решение задачи **(A)**.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

[1] Курош А. Г. Лекции по общей алгебре: Учебник. — СПб. : Лань, 2005.

[2] Carter R. Simple Groups of Lie Type. — New York : Wiley, Sons, 1972.

[3] Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли: группы Кокстера и системы Титса, группы порожденные отражениями, системы корней. — Москва : Мир, 1972.

[4] Albert A. A. Power-Associative Rings // Trans. Amer. Math. Soc. — 1948. — Vol. 64, no. 3. — P. 552–593.

[5] Левчук В. М. Нильтреугольная подалгебра алгебры Шевалле: обертывающая алгебра, идеалы и автоморфизмы // Докл. Матем. — 2018. — Т. 478, № 2. — С. 137–140.

[6] Dubisch R., Perlis S. On total nilpotent algebras // Amer. J. Math. — 1951. — Vol. 73. — P. 439–452.

[7] Левчук В. М. Связи унитреугольной группы с некоторыми кольцами // Алгебра и Логика. — 1976. — Т. 15, № 5. — С. 558–579.

[8] Левчук В. М. Автоморфизмы унипотентных подгрупп групп Шевалле // Алгебра и Логика. — 1990. — Т. 29, № 3. — С. 315–338.

[9] Levchuk V. M., Suleimanova G. S. Extremal and maximal normal abelian subgroups of a maximal unipotent subgroup in groups of Lie type // Journal of Algebra — 2012. — Vol. 349, no. 1. — P. 98–116.

[10] Serre J.-P. Algebres de Lie semi-simple complexes. — New York : W.A. Benjamin, Inc., 1966.

[11] Левчук В. М. Автоморфизмы унипотентных подгрупп групп лиева типа малых рангов // Алгебра и Логика — 1990. — Т. 29, № 2. — С. 141–161.

[12] Hodyunya N. D. Enumerations of ideals in niltriangular subalgebra of Chevalley algebras // J. SFU Math. and Phys. — 2018. — Vol. 11, no. 3. — P. 271–277.

[13] Egorychev G. P., Levchuk V. M. Enumeration in the Chevalley algebras // ACM SIGSAM Bulletin. — 2001. — Vol. 35, no. 2. — P. 20–34.

[14] Кривоколеско В. П., Левчук В. М. Перечисление идеалов исключительных нильпотентных матричных алгебр // Тр. ИММ УрО РАН. — 2015. — Т. 21, № 1. — С. 166–171.

[15] Егорычев Г. П. Интегральное представление и вычисление комбинаторных сумм. — Новосибирск : Наука, 1977. — С. 271.

[16] Егорычев Г. П. Перечисление собственных t-мерных подпространств пространства V_m над полем $GF(q)$ // Известия ИркГУ, сер. матем. — 2016. — Т. 17, № 3. — С. 12–22.

[17] Сулейманова Г. С. Нормальное строение и большие абелевы подгруппы унипотентной подгруппы групп лиева типа : дис. . . . д-ра физ.-мат. наук : 01.01.06. — Красноярск, 2013.

[18] Athanasiadis C. A. On a refinement of the generalized Catalan numbers for Weyl groups // Transactions of the American Mathematical Society. — 2005. — Jan. — Vol. 357, no. 01. — P. 179–197.

[19] Нильтреугольные подалгебры алгебр Шевалле и их обобщения / В. М. Левчук [и др.] // Владикавк. матем. журн. — 2015. — Т. 17, № 2. — С. 37–46.

[20] Krattenhaler C. Lattice path enumeration // Handbook of enumerative combinatorics. — Boca Raton, FL : CRC Press, 2015.

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики
Кафедра алгебры и математической логики

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
_______/В. М. Левчук
«_7_» _июня_ 2018 г.

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

НЕАССОЦИАТИВНЫЕ ОБЕРТЫВАЮЩИЕ АЛГЕБРЫ И СТАНДАРТНЫЕ ИДЕАЛЫ НИЛЬТРЕУГОЛЬНОЙ ПОДАЛГЕБРЫ АЛГЕБРЫ ШЕВАЛЛЕ

Направление 01.04.01 Математика

Магистерская программа 01.04.01.02 Алгебра, логика и дискретная математика

Научный руководитель
доктор физико-математических наук
профессор _______/ В. М. Левчук
7 июня 2018 г.

Выпускник _______/ Н. Д. Ходюня
7 июня 2018 г.

Красноярск 2018