Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2 (2008) 221-227

УДК 512.55

К теории моделей колец нильтреугольных матриц

Елизавета В.Минакова*
Институт математики,
Сибирский федеральный университет,
Свободный 79, Красноярск, 660041,
Россия

Получена 11.02.2008, окончательный вариант 15.03.2008, принята к печати 10.04.2008

В статье взаимосвязанно усиливаются две известные теоремы об изоморфизмах и элементарных эквивалентностях колец нильтреугольных матриц.

Ключевые слова: кольца нильтреугольных матриц, изоморфизм, автоморфизм, элементарная эквивалентность

Введение

Кольцо всех нижних нильтреугольных $n \times n$ матриц над кольцом K с единицей обозначают через $NT(n, K)$. Элементарная эквивалентность $\equiv$ колец нильтреугольных матриц над ассоциативными кольцами переносится на кольца коэффициентов, как показали Роуз [1] (случай полей коэффициентов) и Видэла [2]. Условие ассоциативности основных колец в статье ослабляется.

Теорема 1. *Пусть K, S — кольца с единицами, кольцо K ассоциативное и $n > 2$. Тогда:* $NT(m, S) \equiv NT(n, K) \Leftrightarrow n = m$ *и* $S \equiv K$.

Как и в [1], [2], в доказательстве используем мальцевское соответствие класса колец с единицей на определенные классы алгебраических систем [3] и известные описания изоморфизмов колец нильтреугольных матриц. Автоморфизмы кольца $NT(n, K)$ найдены в [4] (для K-алгебры $NT(n, K)$ они изучались в [5] и [6]), а в [7] выявлялись для более общего кольца $NT(\Gamma, K)$ всех финитарных Γ-матриц $\| a_{ij} \|_{i,j \in \Gamma}$ с произвольной цепью Γ-индексов и условием нильтреугольности $a_{ij} = 0,\ i \leq j$ (лемма 1 ниже). В исключительном кольце $NT(2, S)$ умножение нулевое, так что изоморфны кольца эндоморфизмов $End\ (NT(2, S))$ и $End\ (S^+)$.

Следующая теорема об изоморфизмах (она анонсировалась в [8]) была доказана в [9] при условии ассоциативности обоих основных колец S и K. Заметим, что каждый кольцевой изоморфизм $\theta : S \to K$ и цепной изоморфизм $' \ : \ \Omega \to \Gamma$ индуцируют изоморфизм колец

$$NT(\Omega, S) \to NT(\Gamma, K); \quad \| c_{ij} \| \to \| c^{\theta}_{i'j'} \| \quad (\| c_{ij} \| \in NT(\Omega, S)). \tag{1}$$

*e-mail: nimdar@inbox.ru

Теорема 2. *Допустим, что кольца $NT(\Gamma, K)$ и $NT(\Omega, S)$ изоморфны для некоторых цепей Ω, Γ и колец K, S с единицами, причем кольцо K ассоциативно, $|\Gamma| > 2$ и либо цепь Γ конечна, либо K — кольцо без делителей нуля. Тогда $K \simeq S$, $\Gamma \simeq \Omega$ и любой изоморфизм $NT(\Omega, S) \to NT(\Gamma, K)$ есть произведение индуцированного изоморфизма (1) на автоморфизм кольца $NT(\Gamma, K)$.*

1. Доказательство теоремы 2

Вначале выделим основные автоморфизмы кольца $R := NT(\Gamma, K)$. Автоморфизм (1) индуцируют каждый автоморфизм θ кольца K и автоморфизм $'$ цепи Γ.

Как обычно, через e_{ij} обозначим Γ-матрицу кольца R, у которой (i, j)-коэффициент равен единице, а все остальные коэффициенты равны нулю. Через p и q обозначаем, соответственно, первый и последний элементы в Γ. Пишем $j \lhd i$, если $j \in \Gamma$ и подмножество $\{k \in \Gamma \mid k > j\}$ имеет первый элемент i. Элементарные матрицы xe_{ij} $(x \in K, i, j \in \Gamma, i > j)$ порождают кольцо R, а соотношения

$$xe_{ij} + ye_{ij} = (x + y)e_{ij},\ (xe_{ij})(ye_{jm}) = xye_{im},\ (xe_{ij})(ye_{km}) = 0,\ j \neq k, \tag{2}$$

являются основными в R. Ясно, что R — локально нильпотентное кольцо.

Центр кольца R совпадает с Ke_{qp}, когда $p, q \in \Gamma$ (иначе центр и аннулятор в R нулевые). В этом случае любой эндоморфизм λ аддитивной группы K^+ при $j \lhd i$ определяет автоморфизм $xe_{ij} \to xe_{ij} + x^\lambda e_{qp},\ x \in K$ (другие порождающие фиксируются) кольца R. Такие автоморфизмы порождают подгруппу *центральных* автоморфизмов, то есть действующих тождественно по модулю центра кольца R.

Пусть далее кольцо K с единицей ассоциативное. Тогда в финитарной унитреугольной группе $UT(\Gamma, K) = e + R$ (e – единичная Γ-матрица) для любого элемента $\beta \in R$ элемент $e+\beta+\beta^2+\beta^3+\cdots$ является обратным к $e-\beta$. Сопряжение $\alpha \to (e-\beta)\alpha(e-\beta)^{-1}$ дает *внутренний* автоморфизм кольца R (и группы $UT(\Gamma, K)$).

К обобщению внутреннего автоморфизма приводит кольцо всех Γ-матриц над K, имеющих конечное число ненулевых элементов в каждой строке и каждом столбце (*слабо финитарных* в соответствии с [10]) с обычными операциями сложения и умножения матриц. Сопряжение произвольной обратимой треугольной Γ-матрицей γ этого кольца дает *треугольный* автоморфизм кольца R или *диагональный* автоморфизм для диагональной Γ-матрицы γ. Когда главная диагональ матрицы $\gamma - e$ нулевая, это есть *локально внутренний* автоморфизм, в соответствии с [11], он действует на любое конечное множество в R как внутренний автоморфизм.

Автоморфизмы кольца $NT(\Gamma, K)$ исследованы в [4, Теорема 1] и [7, Теорема 3].

Лемма 1. *Если Γ — конечная цепь или K — кольцо без делителей нуля, то каждый автоморфизм кольца $NT(\Gamma, K)$, $|\Gamma| > 2$, есть произведение индуцированного автоморфизма (1), треугольного и центрального автоморфизмов.*

Выделим сейчас в кольце R некоторые идеалы с нулевым умножением. Согласно [12, стр. 209], собственное подмножество X цепи Γ называется *начальным сегментом*, если для всех $x \in X$ и $y \in \Gamma$ с условием $y < x$ имеем $y \in X$. Обозначим через $\widetilde{\Gamma}$ множество всех начальных сегментов в Γ. Положим $\overline{T} = \Gamma \setminus T$, а также

$$N_{\overline{V}T} = \langle Ke_{km} \mid \ k \in \overline{V},\ m \in T,\ m < k\rangle, \quad N_T = N_{\overline{T}T} \quad (V, T \in \widetilde{\Gamma}),$$

$$N_{ij} = \langle Ke_{uv} \mid v \leq j,\ u \geq i,\ v < u\rangle \qquad (i, j \in \Gamma).$$

Для централизатора и аннулятора идеала $N_{\overline{V}T}$ в R получаем равенства

$$C(N_{\overline{V}T}) = N_{\overline{T}V} = Ann\ (N_{\overline{V}T}), \quad T, V \in \widetilde{\Gamma}.$$

Следующая лемма вытекает из [7, Теорема 2].

Лемма 2. *Пусть K — кольцо без делителей нуля. Тогда в кольце R идеалы N_T $(T \in \widetilde{\Gamma})$ исчерпывают все максимальные идеалы с нулевым умножением.*

По аналогии с R выделим идеалы $N_{ij}(S),\ N_T(S)$ кольца $NT(\Omega, S)$.

Лемма 3. *Пусть $R = NT(\Gamma, K),\ R_S = NT(\Omega, S)$ и ψ — изоморфизм кольца R_S на R. Если K — кольцо без делителей нуля, то существует изоморфизм цепей $' : \Omega \to \Gamma$ такой, что идеал $[N_{ij}(S)]^{\psi}$ совпадает с $N_{i'j'}$ для всех $i, j \in \Omega, j < i$.*

Доказательство. В силу леммы 2, $[N_T(S)]^{\psi} = N_{T'}$ $(T \in \widetilde{\Omega})$ для некоторого биективного отображения $' : \widetilde{\Omega} \to \widetilde{\Gamma}$. Отношение $\subset$ для сегментов определяет линейный порядок на $\widetilde{\Omega}$ и $\widetilde{\Gamma}$. Включение $T \subset L$ при $T, L \in \widetilde{\Omega}$ дает равенства $N_L(S)N_T(S) = N_T(S) \cap N_L(S)$ и $N_T(S)N_L(S) = 0$, а потому ψ- инвариантно. Следовательно, $'$ — изоморфизм цепей $\widetilde{\Omega} \to \widetilde{\Gamma}$.

Сегмент $\{p\}$ для $p \in \Gamma$ — первый элемент $\widetilde{\Gamma}$. Тогда существует первый элемент r цепи Ω такой, что $[N_{rr}(S)]^{\psi} = N_{pp}$, и мы считаем $r' = p$. Аналогично определяем и образ последнего элемента Γ. Пусть T — начальный сегмент Γ с последним элементом i, который не является ни первым, ни последним в Γ. Тогда существует предшественник L для T в $\widetilde{\Gamma}$ с $\overline{L} \cap T = \{i\}$ и

$$N_{ii} = N_L \cup N_T = N_{\overline{L}T} = C(N_L \cap N_T), \quad C(N_{ii}) = N_L \cap N_T = N_{\overline{T}L}.$$

Кроме того, пересечение образов $\overline{L}$ и T в Ω содержит единственный элемент m; полагаем $m' = i$. Тогда $'$ — изоморфизм цепи Ω на цепь Γ и $[N_{mm}(S)]^{\psi} = N_{m'm'}$ для всех $m \in \Omega$. Остается заметить, что $N_{ij} = N_{ii} \cap N_{jj}$ для $j < i$. □

Лемма 4. *Пусть ψ — изоморфизм кольца $R_S = NT(\Omega, S)$ на $R = NT(\Gamma, K)$ и K — кольцо без делителей нуля или цепь Γ конечна. Тогда, с точностью до умножения ψ на цепной изоморфизм кольца R_S, верны равенства $\Omega = \Gamma$ и $\psi(N_{ij}(S)) = N_{ij}$.*

Доказательство. Пусть вначале кольцо K не содержит делителей нуля. Изоморфизм цепей $' : \Omega \to \Gamma$ из леммы 3 индуцирует кольцевой изоморфизм $\pi : NT(\Omega, S) \to$

$NT(\Gamma, S)$. Поэтому $\phi = \pi^{-1}\psi$ — изоморфизм кольца $NT(\Gamma, S)$ на $NT(\Gamma, K)$, причем $\phi[N_{ij}(S)] = N_{ij}$ для всех $i, j \in \Gamma$.

Рассмотрим случай конечной цепи Γ порядка n. Все цепи конечного порядка n изоморфны друг другу и можно считать $\Gamma = \{1, 2, \cdots, n\}$. Ступени нильпотентности R и R_S равны, а основные соотношения (2) и индукция по k дают равенства

$$R^k = N_{k+11} + N_{k+22} + ... + N_{nn-k}, \quad 1 \leq k < n, \quad R^n = 0, \tag{3}$$

откуда $\Omega = \Gamma$, с точностью до цепных изоморфизмов.

Далее. Левый аннулятор k-й степени R^k состоит из матриц в R, имеющих нулевые столбцы с номерами $> k$, т.е. равен N_{1k}. Аналогично, правый аннулятор в R степени R^k равен $N_{n-k+1,n}$. Кроме того, $N_{ij} = N_{1j} \cap N_{in}$. Аналогичные соотношения выполняются для идеалов $N_{ij}(S)$ кольца R_S, откуда $\psi(N_{ij}(S)) = N_{ij}$. □

Лемма 5. *Пусть ψ — изоморфизм кольца $R_S = NT(\Gamma, S)$ на $R = NT(\Gamma, K)$, причем K — кольцо без делителей нуля или цепь Γ конечна. Тогда $K \simeq S$.*

Доказательство. Обозначим через Q_{ij} идеал $RN_{ij} + N_{ij}R$. Тогда

$$(xe_{ij})^{\psi} = x^{\sigma_{ij}} e_{ij} \ (mod\ Q_{ij}), \quad x \in S, \ i, j \in \Gamma, i > j,$$

для некоторых изоморфизмов $\sigma_{ij} : S^+ \to K^+$ аддитивных групп. Из ψ-инвариантности соотношений $xye_{ik} = (xe_{ij})(ye_{jk}) \ (mod\ Q_{ik})$ следует

$$(xy)^{\sigma_{ik}} = x^{\sigma_{ij}} y^{\sigma_{jk}}, \quad K = K^{\sigma_{ik}} = d_{ij}K = Kd_{jk},$$

где $d_{ij} = (1)^{\sigma_{ij}}, \ j < i$. Отсюда получаем обратимость элементов d_{ij} в кольце K. С точностью до умножения ψ на диагональный автоморфизм для фиксированного $m \in \Gamma$ можно предполагать, что $d_{im} = d_{mk} = 1$. В силу соотношений $d_{im}d_{mk} = d_{km}$, отсюда следует, что все элементы d_{ij} равны 1. Поэтому все отображения σ_{ij} попарно совпадают и являются изоморфизмом θ кольца S на K. □

Леммы 4 и 5 показывают, что для изоморфных колец $R_S = NT(\Omega, S)$ и $R = NT(\Gamma, K)$ из теоремы B имеем $K \simeq S$, $\Gamma \simeq \Omega$ и любой изоморфизм $NT(\Omega, S) \to NT(\Gamma, K)$ есть произведение индуцированного изоморфизма (1) на автоморфизм кольца $NT(\Gamma, K)$. Тем самым, теорема 2 полностью доказана.

2. Доказательство теоремы 1

Далее нам потребуется мальцевское соответствие [3] между классом всех колец с единицами и классом определенных алгебраических систем с выделенными элементами. В соответствии с общей теорией моделей, кольца с выделенными элементами считаются изоморфными, если между ними найдется изоморфизм, переводящий выделенный элемент одного кольца в соответствующий ему выделенный элемент другого кольца [13]. К теориям моделей колец нильтреугольных матриц над ассоциативными кольцами с единицей мальцевское соответствие применяли Роуз [1] (случай полей коэффициентов) и Видэла [2], используя сигнатуры

$$\mathfrak{L} = \{+, \cdot, 0, 1\}, \quad \mathfrak{L}' = \{+, \cdot, 0, c_1, \ldots, c_{m-1}\}$$

с выделенными константами $c_1, \ldots, c_{m-1}$. Мы рассматриваем также случай неассоциативных колец коэффициентов S с единицей.

Лемма 6. *Существует рекурсивное отображение σ формул в $\mathfrak{L}$ в формулы $\mathfrak{L}'$ такое, что для любой формулы $B(x_1, \ldots, x_k) \in \mathfrak{L}$ и элементов $r_1, \ldots, r_k \in S$ имеем:*

$$S \models B(r_1, \ldots, r_k) \Leftrightarrow NT(m, S) \models \sigma(B)(r_1 e_{m1}, \ldots, r_k e_{m1}).$$

Доказательство. Вначале построим на центре $Z = Se_{m1}$ кольца $NT(m, S)$ структуру $J = \langle Z; +, \otimes, 0, 1\rangle$ с помощью выделенных констант

$$c_i = e_{i+1,i} \quad (i = 1, \ldots, m-1).$$

Интерпретируем константу 1 как элемент e_{m1}, а 0 — как нулевой элемент кольца $NT(m, S)$. Считаем, что сложение $+$ на Z совпадает со сложением в $NT(m, S)$. Для определения умножения $\otimes$ каждому элементу $x \in S$ сопоставим в кольце $NT(m, S)$ элементы

$$w_x = xe_{21}, \quad w'_x = xe_{m2} \quad (e_{m2} = e_{m,m-1} \cdot \ldots \cdot e_{43} \cdot e_{32}).$$

Они определены однозначно с помощью выделенных констант; в частности, разложение элемента e_{m2} не зависит от расстановки скобок даже в случае неассоциативного кольца S. Отсюда вытекает, что умножение

$$ye_{m1} \otimes xe_{m1} = w'_y \cdot w_x, \quad x, y \in S$$

определено на Z корректно. Замечаем, что для уравнений $e_{m2} \cdot w_x = xe_{m1}$ и $w'_y \cdot e_{21} = ye_{m1}$ можно однозначно выбрать w_x в Se_{21}, а w'_y — в Se_{m2}.

Отображение $r \to re_{m1}$ дает изоморфизм кольца S и структуры $J = \langle Z; +, \otimes, 0, 1\rangle$. С другой стороны, замена операций сложения и умножения в произвольной формуле $B(x_1, \ldots, x_k) \in \mathfrak{L}$ на построенные новые операции приводит к формуле $\sigma(B)(x_1, \ldots, x_k) \in \mathfrak{L}'$ такой, что утверждение леммы для B и $\sigma(B)$ выполняется. $\square$

Напомним понятие насыщенной алгебраической системы, используемое далее. Пусть T — полная теория. Для каждого $n > 0$ обозначим через $F_n T$ множество всех формул в языке теории T, не содержащих свободных переменных, отличных от $x_1, \ldots, x_n$. Формула $F(x_1, \ldots, x_n)$ называется *совместной* с T, если

$$T \models (\exists x_1) \ldots (\exists x_n) F(x_1, \ldots, x_n).$$

Множество формул $S \subset F_n T$ называется *совместным* с T, если конъюнкция любого конечного числа элементов из S совместна с T. Максимальное совместное подмножество $p \subset F_n T$ называется $n-$типом. Пусть $\mathfrak{A}$ — бесконечная алгебраическая система с носителем A. Система $\mathfrak{A}$ называется *насыщенной*, если каждый 1-тип p реализуется в

$\mathfrak{A}$, т.е. найдется элемент $a \in A$, удовлетворяющий каждой формуле $F \in p$. Подробнее о насыщенности и её свойствах см. [14, § 15, 16].

Доказательство теоремы 1. Числа m и n характеризуют ступени нильпотентности колец $NT(m, S)$ и $NT(n, K)$, соответственно. Поэтому достаточно рассмотреть случай $n = m$. Выберем произвольную замкнутую формулу узкого исчисления предикатов

$$A = (Q_1 x_1) \cdots (Q_k x_k) A_0(x_1, \dots x_k) \quad (Q_i = \forall, \exists),$$

у которой внелогические символы открытой части A_0 исчерпываются знаками сложения и умножения. Требование истинности формулы A на $NT(n, S)$ равносильно требованию на кольцо S, которое записывается в виде формулы узкого исчисления предикатов. При такой записи каждый квантор (Qx), примененный к матрице $x = ||x_{ij}||$, заменяется набором кванторов $(Qx_{ij}),\ 1 \leq j < i \leq n$; матричные соотношения $x \cdot y = z$ и $x + y = z$ в $NT(n, S)$ заменяются коньюнкцией формул от коэффициентов матриц. Истинность полученной новой формулы B в кольце S равносильна истинности исходной формулы A в кольце $NT(n, S)$. Следовательно, при $S \equiv K$ всякая закрытая формула языка первой ступени, истинная на одном из колец $NT(n, S)$ и $NT(n, K)$, истинна и на другом кольце, откуда $NT(n, S) \equiv NT(n, K)$.

Теперь пусть $NT(n, S) \equiv NT(n, K)$. Элементарная эквивалентность конечных алгебраических систем равносильна их изоморфности. Поэтому, в силу теоремы Б, можем считать далее, что кольца S и K бесконечны. Всякую бесконечную систему $\mathfrak{A}$ можно элементарно вложить в насыщенную систему $\mathfrak{A}^*$, согласно [14, § 16], кроме того (теорема Морли-Вота там же), элементарная эквивалентность насыщенных систем влечет их изоморфность. Если кольцо коэффициентов насыщено, то насыщено и кольцо нильтреугольных матриц, согласно лемме 6. Поэтому, насыщая кольца коэффициентов K и S, получаем

$$NT(n, K^*) \simeq NT(n, S^*),$$

откуда $K^* \simeq S^*$. Поскольку кольцо K элементарно вложено в K^* и, аналогично, S элементарно вложено в S^*, приходим к элементарной эквивалентности $K \equiv S$. Теорема 1 полностью доказана.

Автор благодарит В.М.Левчука за обсуждения и внимание к работе.

Исследования поддержаны грантом РФФИ (проект № 06-01-00824).

Список литературы

[1] B.I.Rose, The χ_1-categoricity of Strictly Upper Triangular Matrix Rings over Algebraically Closed Fields, *J. of Symbolic Logic*, **43**(1978), №2, 250-259.

[2] C.R.Videla, On the Model Theory of the Ring $NT(n, R)$, *J. of Pure and Appl. Algebra*, **55**(1988), 289-302.

[3] А.И.Мальцев, Об одном соответствии между кольцами и группами, *Матем. сб.*, **50**(1960), 257-266.

[4] В.М.Левчук, Связи унитреугольной группы с некоторыми кольцами. II. Группы автоморфизмов, *Сиб. матем. журн.*, **24**(1983), №4, 543-557.

[5] R.Dubish, S.Perlis, On total nilpotent algebras, *Amer. J. Math.*, (1951), №73, 439-452.

[6] Y.Cao, J.Wang, A note on algebra automorphisms of the strictly upper triangular matrices over commutative rings, *Linear Algebra Appl.*, **311**(2000), 187-193.

[7] В.М.Левчук, Некоторые локально нильпотентные матричные кольца, *Мат. заметки*, **42**(1987), №5, 631–641.

[8] E.V.Minakova, The isomorphisms of the nil-triangular matrix rings and related questions, Материалы международ. российско-китайского семинара "Алгебра и логика Иркутск, ИГПУ, 2007, 127-129.

[9] F.Kuzucuoglu, V.M.Levchuk, Isomorphisms of Certain Locally Nilpotent Finitary Groups and Associated Rings, *Acta Appl. Math.*, **82**(2004), №2, 169–181.

[10] V.M.Levchuk, Sylow subgroups of the Chevalley groups and associated (weakly) finitary groups and rings, *Acta Appl. Math.*, **85**(2005), 225-232.

[11] Ю.М.Горчаков, Группы с конечными классами сопряженных элементов, М, Наука, 1978.

[12] К.Куратовский, А.Мостовский, Теория множеств. М., Мир, 1970.

[13] А.И.Мальцев, Модельные соответствия, *Изв. АН СССР, сер. мат.*, **23**(1959), №3, 313-336.

[14] Дж.Е.Сакс, Теория насыщенных моделей, М., Мир, 1976.

On the Model Theory Niltriangular Matrix Rings

Elizaveta V. Minakova

We improve and discuss the relation between two theorems on elementary equivalence and on isomorphisms of the niltriangular matrix rings.

Keywords: niltriangular matrix rings, isomorphism, automorphism, elementary equivalence.