Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2 (2008) 188-196

УДК 519.98

Обобщенная модель нелинейных операторов вольтерровского типа и функции Ляпунова

Расул Н.Ганиходжаев*
Мансур Х.Сабуров†
Национальный университет Узбекистана,
ВУЗгородок, Ташкент, 700174,
Узбекистан

Получена 1.09.2007, окончательный вариант 3.02.08, принята к печати 10.04.2008

В задачах популяционной генетики появляется необходимость изучения асимптотического поведения траекторий нелинейных отображений конечномерного симплекса в себя. Статья посвящена исследованию гомеоморфности таких отображений и изучению поведения траекторий. Гомеоморфизм позволяет описать предысторию эволюции биологической системы.

Ключевые слова: нелинейные операторы, асимптотическое поведение, функция Ляпунова

Пусть

$$S^{m-1} = \{x = (x_1, x_2, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m : \sum_{k=1}^{m} x_k = 1, x_k \geqslant 0\}$$

$(m-1)$-мерный симплекс. Точки $e_k = (\delta_{1k}, \delta_{2k}, ..., \delta_{mk})$ называются вершинами симплекса, где δ_{ik} — символ Кронекера. Пусть $I = \{1, 2, ..., m\}$ и $\alpha \subset I$ — произвольное подмножество. Множества

$$\Gamma_\alpha = \{x \in S^{m-1} : x_k = 0,\ k \notin \alpha\}$$

называются гранями симплекса. Грань $\Gamma_\alpha = co\{e_k\}_{k \in \alpha}$ также является $(|\alpha|-1)$-мерным симплексом. Множество

$$ri\Gamma_\alpha = \{x \in \Gamma_\alpha : x_k > 0, k \in \alpha\}$$

называется относительным внутренностью грани Γ_α.

Для векторов $x, y \in \mathbb{R}^m$ положим $x\ {}_\alpha{\succ}\ y$, если $x_i > y_i$ при $i \in \alpha$ и $x_i \geqslant y_i$ при $i \notin \alpha$. Если $\alpha = \varnothing$, то мы просто пишем $x \succeq y$.

Пусть отображение $f = (f_1, f_2, ..., f_m) : S^{m-1} \to \mathbb{R}^m$ удовлетворяет следующим условиям:

1^0. Отображение $f : S^{m-1} \to \mathbb{R}^m$ непрерывно.

2^0. Для любой $x \in S^{m-1}$ выполняется $f(x) \succeq -\mathbb{I} = (-1, -1, ..., -1)$.

3^0. Для любой $x \in S^{m-1}$ выполняется $(f(x), x) = 0$.

4^0. Для любого $\alpha \subset I$ выполняется $f(x)\ {}_\alpha{\succ} -\mathbb{I}$, для любой $x \in ri\Gamma_\alpha$.

*e-mail: rganikhodzhaev@gmail.com
†e-mail: msaburov@gmail.com
© Siberian Federal University. All rights reserved

Предложение 1. *Для того чтобы линейное отображение f удовлетворяло условиям $1^0 - 4^0$, необходимо и достаточно, чтобы матрица A, соответствующая отображению f, была кососимметрической, т.е $A^T = -A$ и $|a_{ki}| \leqslant 1$ для любого $k, i = \overline{1,m}$.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть f линейное отображение удовлетворяет условиям $1^0 - 4^0$. Если $\lambda + \mu = 1$ и $0 < \lambda, \mu < 1$, то

$$(f(\lambda e_i + \mu e_k), \lambda e_i + \mu e_k) = (A(\lambda e_i + \mu e_k), \lambda e_i + \mu e_k) = \lambda\mu((Ae_i, e_k) + (e_i, Ae_k)) = 0.$$

Считая $(Ae_i, e_k) = a_{ki}$ и $(Ae_k, e_i) = a_{ki}$, мы заключаем, что $a_{ki} = -a_{ik} = 0$ или же $A^T = -A$.

Так как $f(x) \succeq -\mathbb{I}$, то $|a_{ki}| \leqslant 1$ для любого $k, i = \overline{1,m}$.

Достаточность. Пусть $f(x) = Ax$, $A^T = -A$ и $|a_{ki}| \leqslant 1$ для любого $k, i = \overline{1,m}$. Тогда $(f(x), x) = (Ax, x) = (x, A^T x) = -(Ax, x) = -(f(x), x)$. Следовательно, $(f(x), x) = 0$ для любого $x \in S^{m-1}$.

Так как $f_k(x) = (Ax)_k = \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ki} x_i$, то

$$1 + f_k(x) = \sum_{i=1}^{m} x_i + \sum_{i=1}^{m} a_{ki} x_i = \sum_{i=1}^{m} (1 + a_{ki}) x_i \geqslant 0.$$

Значит, $f(x) \succeq -\mathbb{I}$ для любого $x \in S^{m-1}$. □

Замечание 1. *В этом случае условие 4^0 следует из остальных.*

Определение 1. *Оператор вольтерровского типа $V : S^{m-1} \to \mathbb{R}^m$ определяется следующей формулой для всех $x \in S^{m-1}$*

$$(Vx)_k = x_k' = x_k(1 + f_k(x)), \ k = \overline{1,m} \ , \tag{1}$$

где отображение $f = (f_1, f_2, ..., f_m) : S^{m-1} \to \mathbb{R}^m$ удовлетворяет условиям $1^0 - 4^0$.

Замечание 2. *В случае когда f_k — линейные функционалы, динамика траекторий оператора вольтерровского типа изучена в [1].*

Отметим некоторые свойства операторов вольтерровского типа.

(i) оператор вольтерровского типа отображает симплекс в себя.

Действительно, из 2^0 и 3^0 следует, что

$$x_k' = x_k(1 + f_k(x)) \geqslant 0 \ k = \overline{1,m},$$

$$\sum_{k=1}^{m} x_k' = \sum_{k=1}^{m} x_k(1 + f_k(x)) = \sum_{k=1}^{m} x_k + \sum_{k=1}^{m} x_k f_k(x) = \sum_{k=1}^{m} x_k + (f(x), x) = 1.$$

(ii) Любая грань симплекса инвариантна относительно оператора вольтерровского типа.

Действительно, пусть Γ_α — грань симплекса S^{m-1}. Тогда из (1) ясно, что при $x_k = 0$ имеем $x_k' = 0$. Поэтому $V(\Gamma_\alpha) \subset \Gamma_\alpha$.

(iii) Вершины симплекса являются неподвижными точками оператора вольтерровского типа.

Действительно, поскольку вершина e_k — нульмерная грань симплекса S^{m-1}, то $(Ve_k)_i = 0$ при $i \neq k$. Из 3^0 следует, что $f_k(e_k) = 0$, тогда $(Ve_k)_k = 1$. Таким образом $Ve_k = e_k$.

(iv) Относительная внутренность любой грани симплекса инвариантна относительно оператора вольтерровского типа. Это следует из 4^0.

(v) Сужение оператора вольтерровского типа на любую грань является оператором вольтерровского типа.

Действительно, ясно, что сужение $f_\alpha = f\big|_{\Gamma_\alpha}$ отображения f на грань Γ_α снова удовлетворяет условиям 1^0–4^0. Поэтому сужение $V_\alpha = V\big|_{\Gamma_\alpha}$ оператора вольтерровского типа V на грань Γ_α является оператором вольтерровского типа.

Пусть x^0 — начальная точка и $\{x^0, x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(n)}, ...\}$ — траектория, начинающаяся в точке x^0 $(x^{(n+1)} = Vx^{(n)}, n = 0, 1, 2, ...)$. Обозначим через $\omega(x^0)$ множество предельных точек траектории. Поскольку $\{x^{(n)}\} \subset S^{m-1}$ и S^{m-1} компактен, то $\omega(x^0) \neq \varnothing$. Очевидно, если $\omega(x^0)$ состоит из одной точки, то траектория сходится, причем $\omega(x^0)$ — неподвижная точка оператора V.

Теорема 1. *Если отображение* $f : S^{m-1} \to \mathbb{R}^m$ *удовлетворяет условиям* $1^0 - 4^0$, *тогда*

$$\mathbb{P} = \{x \in S^{m-1} : \quad f(x) \succeq 0\} \neq \varnothing, \quad \mathbb{Q} = \{x \in S^{m-1} : \quad f(x) \preceq 0\} \neq \varnothing.$$

Доказательство. Если мы докажем, что множество $\mathbb{P}$ не пусто, то аналогично можно доказать, что множество $\mathbb{Q}$ не пусто. Рассмотрим следующие множества:

$$\mathbb{F}_k = \{x \in S^{m-1} : f_k(x) \geq 0\}.$$

Очевидно, что каждое множество $\mathbb{F}_k$ замкнуто. Если мы докажем, что для любого $\alpha \subset I$ выполняется

$$\Gamma_\alpha \subset \bigcup_{k \in \alpha} \mathbb{F}_k, \tag{2}$$

тогда (см. [2]) получим, что множество

$$\mathbb{P} = \bigcap_{k=1}^{m} \mathbb{F}_k$$

не пусто. Чтобы доказать включение (2), воспользуемся индукцией относительно мощности $|\alpha|$ множества α.

Пусть $|\alpha| = 1$, т.е. $\alpha = \{k\}$, тогда $\Gamma_\alpha = e_k$. Так как $f_k(e_k) = (f(e_k), e_k) = 0$, то $e_k \in \Gamma_\alpha$.

Предположим для мощности $|\alpha| \leqslant n$ включение (2) верно и докажем в случае $|\alpha| = n + 1$, т.е. $\alpha = \{i_1, i_2, ..., i_{n+1}\}$. По предположению индукции верно, что

$$\partial\Gamma_\alpha \subset \bigcup_{k=1}^{n+1} \mathbb{F}_{i_k}.$$

Поэтому мы докажем, что
$$ri\Gamma_\alpha \subset \bigcup_{k=1}^{n+1} \mathbb{F}_{i_k}.$$
Предположим обратное, т.е. существует
$$x^0 = (0, ..., 0, x^0_{i_1}, 0, ..., 0, x^0_{i_2}, 0, ..., 0, x^0_{i_{n+1}}, 0, ..., 0) \in ri\Gamma_\alpha,$$
такое что $x^0 \notin \bigcup\limits_{k=1}^{n+1} \mathbb{F}_{i_k}$ или же $f_{i_k}(x^0) < 0$ для любого $k = \overline{1, n+1}$. Тогда
$$0 = (f(x_0), x_0) = x^0_{i_1} f_{i_1}(x^0) + x^0_{i_2} f_{i_2}(x^0) + ... + x_{i_{n+1}} f_{i_{n+1}}(x^0) < 0,$$
получим противоречие. □

Следствие 1. *$\mathbb{P}$ и $\mathbb{Q}$ состоят из неподвижных точек оператора вольтерровского типа.*

Доказательство. Пусть $p \in \mathbb{P}$, тогда из $f_k(p) \geqslant 0,\ k = \overline{1, m}$ следует, что
$$(Vp)_k = p_k(1 + f_k(p)) \geqslant p_k,\ k = \overline{1, m}.$$
Поскольку $\sum\limits_{k=1}^{m} (Vp)_k = \sum\limits_{k=1}^{m} p_k = 1$, то получаем $(Vp)_k = p_k,\ k = \overline{1, m}$, т.е. $Vp = p$. В случае $q \in \mathbb{Q}$ доказательство проводится аналогично. □

Пусть отображение $f : S^{m-1} \to \mathbb{R}^m$ удовлетворяет следующему условию:

5^0 Для любой $x, y \in S^{m-1}$ выполняется $(f(x), y) + (x, f(y)) \leqslant 0$.

Определение 2. *Непрерывный функционал $\varphi : S^{m-1} \to \mathbb{R}$ называется функцией Ляпунова, если для любой начальной точки $x^0 \in S^{m-1}$ существует $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(x^{(n)})$.*

Ясно что, если $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(x^{(n)}) = C$, то $\omega(x^0) \subset \varphi^{-1}(C)$.

Теорема 2. *Если $p \in \mathbb{P}$, то $\varphi(x) = x_1^{p_1} x_2^{p_2} ... x_m^{p_m}$ является функцией Ляпунова.*

Доказательство. Будем считать, что $x \in riS^{m-1}$ (см. свойства **(ii)**и **(iv)**). Так как $p \in \mathbb{P}$ и $(x, f(p)) \geqslant 0$, то из неравенства Юнга и учитывая условие 5^0 получаем
$$\varphi(x^{'}) = \varphi(x) \prod_{k=1}^{m} (1 + f_k(x))^{p_k} \leqslant \varphi(x) \sum_{k=1}^{m} p_k(1 + f_k(x)) = \varphi(x)(1 + (f(x), p)) \leqslant$$
$$\leqslant \varphi(x)(1 - (x, f(p))) \leqslant \varphi(x).$$
Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(x^{(n)})$ существует и $\varphi(x)$ является функцией Ляпунова. □

Пусть $p \in S^{m-1}$ и $\psi(x) = \prod\limits_{k=1}^{m} (1 + f_k(x))^{p_k}$.

Предложение 2. *Если $p \in \mathbb{P}$, то $1 = \max\limits_{x \in S^{m-1}} \psi(x) = \psi(\overline{x})$ тогда и только тогда, когда $\overline{x} \in \mathbb{P}$.*

Доказательство. *Достаточность.* Пусть $x \in S^{m-1}$. Тогда из неравенства Юнга и из условия 5^0

$$\psi(x) = \prod_{k=1}^{m}(1+f_k(x))^{p_k} \leqslant \sum_{k=1}^{m} p_k(1+f_k(x)) = 1+(f(x),p) \leqslant 1-(x,f(p)) \leqslant 1. \qquad (3)$$

Если $\overline{x} \in \mathbb{P}$, то $f_k(\overline{x}) \geqslant 0,\ k=\overline{1,m}$ и

$$\psi(\overline{x}) = \prod_{k=1}^{m}(1+f_k(\overline{x}))^{p_k} \geqslant 1.$$

Учитывая (3), находим $1 = \max\limits_{x \in S^{m-1}} \psi(x) = \psi(\overline{x})$ для всех $\overline{x} \in \mathbb{P}$.

Необходимость. Пусть $1 = \max\limits_{x \in S^{m-1}} \psi(x) = \psi(\overline{x})$. Тогда в (3) все знаки неравенства превращаются в знак равенства, т.е.

$$\prod_{k=1}^{m}(1+f_k(\overline{x}))^{p_k} = \sum_{k=1}^{m} p_k(1+f_k(\overline{x})) \qquad (4)$$

и

$$1+(f(\overline{x}),p) = 1-(\overline{x},f(p)) = 1. \qquad (5)$$

Тогда из (4) получим

$$f_1(\overline{x}) = f_2(\overline{x}) = ... = f_m(\overline{x})$$

и из (5)находим

$$f_k(\overline{x}) = (f(\overline{x}),p) = 0,\ k=\overline{1,m}.$$

Следовательно, $\overline{x} \in \mathbb{P}$. □

Теорема 3. *Если $x^0 \in riS^{m-1}$ и $Vx^0 \neq x^0$, то:*

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(x^{(n)}) = 0$, более того $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \varphi(x^{(n)}) < +\infty$, где $p \in \mathbb{P}$, $\varphi(x) = x_1^{p_1} x_2^{p_2} ... x_m^{p_m}$;

b) $\omega(x^0) \subset \partial S^{m-1}$.

Доказательство. a). Проверим, что $\mathbb{P} \cap \omega(x^0) = \varnothing$.

Действительно, пусть $\overline{p} = (\overline{p}_1, \overline{p}_1, ..., \overline{p}_m) \in \mathbb{P}$. Тогда $\overline{\varphi}(x) = x_1^{\overline{p}_1} x_2^{\overline{p}_2} ... x_m^{\overline{p}_m}$ есть функция Ляпунова и достигает наибольшего значения только лишь в точке $\overline{p}$, причем $V\overline{p} = \overline{p}$. Поэтому из $x^0 \neq \overline{p}$ следует, что

$$\varphi(x^0) < \varphi(\overline{p}).$$

Учитывая, что $\varphi(x)$ монотонно убывающая вдоль любой траектории, находим, что

$$\varphi(y) = \lim_{k\to\infty} \varphi(x^{n_k}) < \varphi(\overline{p})$$

для любого $y \in \omega(x^0)$. Следовательно, $\overline{p} \notin \omega(x^0)$. Поскольку $p \in \mathbb{P}$ произвольно, то

$$\mathbb{P} \cap \omega(x^0) = \varnothing.$$

b). Докажем, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\varphi(x^{(n)})<+\infty$ для любого $\varphi(x)=x_1^{p_1}x_2^{p_2}...x_m^{p_m}$, где $p\in\mathbb{P}$. Согласно a) $\mathbb{P}\cap\omega(x^0)=\varnothing$. Функционал $\psi(x)=\prod\limits_{k=1}^{m}(1+f_k(x))^{p_k}$ достигает своего наибольшего значения равного 1 только лишь на $\mathbb{P}$. Поэтому для некоторой окрестности U компакта $\omega(x^0)$ имеем $\psi(x)\leqslant C<1$ для всех $x\in U$. Траектория $\{x^{(n)}\}$ начиная с некоторого номера m_0 содержится в U.

Следовательно,

$$\frac{\varphi(x^{(m+1)})}{\varphi(x^{(m)})}=\psi(x^{(m)})\leqslant C<1,\ m\geqslant m_0.$$

Поэтому $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\varphi(x^{(n)})<+\infty$, отсюда $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(x^{(n)})=0$. Наконец, если $x\in riS^{m-1}$, то $\varphi(x)=x_1^{p_1}x_2^{p_2}...x_m^{p_m}>0$, т.е. равенство $\varphi(x)=0$ может выполняться только на ∂S^{m-1}.

Следовательно, $\omega(x^0)\subset\partial S^{m-1}$. □

Следствие 2. *Справедливо включение*

$$\omega(x^0)\subset\bigcap_{p\in\mathbb{P}}\Big\{x\in S^{m-1}:\quad x_1^{p_1}x_2^{p_2}...x_m^{p_m}=0\Big\}.$$

Теорема 4. *Множество $\omega(x^0)$ либо состоит из одной точки, либо бесконечно.*

Доказательство. Допустим, что $\omega(x^0)=\{y^1,y^2,...,y^r\}$, где $1<r<\infty$. Тогда $y^1,y^2,...,y^r$ образуют цикл, т.е. с точностью до нумерации имеем

$$Vy^1=y^2,\ \ Vy^2=y^3,\ \dots\ ,\ Vy^{r-1}=y^r,\ Vy^r=y^1.$$

Так как $r>1$, то $Vx^0\neq x^0$. Поэтому согласно теореме 3 имеем $\omega(x^0)\subset\partial S^{m-1}$. Поскольку любая грань симплекса инвариантна относительно V, то все $y^i(i=\overline{1,r})$ принадлежат одной и той же $(m-2)$-мерной грани, которую обозначим через Γ_1. Пусть V_1 — сужение оператора V на Γ_1.

По построению $V_1:\Gamma_1\to\Gamma_1$, где Γ_1- $(m-2)$-мерный симплекс, и V_1 также является оператором вольтерровского типа на симплексе Γ_1. Так как

$$Vy^1=y^2,\ \ Vy^2=y^3,\ \dots\ ,\ Vy^{r-1}=y^r,\ Vy^r=y^1,$$

то $V_1(\omega(x^0))=\omega(x^0)$, поэтому $\omega(y)=\omega(x^0)$ для любого $y\in\omega(x^0)$.

Вторично используя теорему 3, получаем $\omega(x^0)\subset\partial\Gamma_1$. Любая грань симплекса Γ_1 инвариантна относительно V_1, поэтому все $y^i(i=\overline{1,r})$ принадлежат одной и той же $(m-3)$-мерной грани Γ_2. Пусть V_2 сужение V_1 на Γ_2. Понижая размерность Γ_j на каждом шаге, через $m-1$ шаг подобных рассуждений получаем $\omega(x^0)\subset\partial\Gamma_{m-1}$, поскольку Γ_{m-1} состоит из одной точки (одна из вершин S^{m-1}), то $\partial\Gamma_{m-1}=\Gamma_{m-1}$ и это противоречит допущению $1<r<\infty$. □

Следствие 3. *Оператор вольтерровского типа не имеет периодических траекторий.*

Теорема 5. *Пусть $x^0\in riS^{m-1}$, $Vx^0\neq x^0$ и траектория $\{x^{(n)}\}$ сходится. Тогда предельная точка траектории принадлежит множеству $\mathbb{Q}$.*

Доказательство. Пусть $x^{(n)}$ сходится к $q = (q_1, q_2, ..., q_m)$. Согласно теореме 3 имеем $q \in \partial S^{m-1}$. Пусть

$$I_0 = \{i \in I : \ q_i = 0\}, \ \ I_+ = \{i \in I : \ q_i > 0\}.$$

Очевидно, что q — неподвижная точка оператора V. Поэтому

$$q_k = q_k(1 + f_k(q)), \ k \in I.$$

Ясно, что если $k \in I_+$, то $f_k(q) = 0$. Значит, $f_k(q) = 0$ для всех $k \in I_+$.

Допустим, что для некоторого $k_0 \in I_0$ имеем $f_{k_0}(q) > 0$. Поскольку $x^{(n)}$ сходится к q, то начиная с некоторого n_0 выполняется неравенство

$$f_{k_0}(x^{(n)}) > 0, \ n \geqslant n_0.$$

Так как riS^{m-1} инвариантна относительно V, то $x^{(n)} \in riS^{m-1}$ при любых n. Тогда

$$x_{k_0}^{(n+1)} = x_{k_0}^{(n)}(1 + f_{k_0}(x^{(n)})) > x_{k_0}^{(n)}, \ n \geqslant n_0.$$

Последнее невозможно, так как $x_{k_0}^{(n)}$ сходится к $q_{k_0} = 0$.

Итак, для всех $k_0 \in I_0$ должно выполняться неравенство $f_k(q) \leqslant 0$. Таким образом, $f_k(q) \leqslant 0, \ k \in I$, т.е. $q \in \mathbb{Q}$. □

Теорема 6. *Оператор вольтерровского типа* $V : S^{m-1} \to S^{m-1}$ *является гомеоморфизмом.*

Доказательство. Оператор вольтерровского типа является инъективным. Предположим обратное, т.е. существуют $x, y \in S^{m-1}$ такие, что $x \neq y$, но $Vx = Vy$. Поскольку любая грань инвариантна (см.**(ii)**), то без ограничения общности будем считать, что $x, y \in riS^{m-1}$. Отсюда

$$x_k(1 + f_k(x)) = y_k(1 + f_k(y)), \ k = \overline{1, m}$$

или же

$$x_k + x_k f_k(x) - y_k f_k(x) + y_k f_k(x) - y_k - y_k f_k(x) = 0, \ k = \overline{1, m},$$
$$(x_k - y_k)(1 + f_k(x)) = -y_k(f_k(x) - f_k(y)), \ k = \overline{1, m}. \tag{6}$$

Так как $1 + f_k(x) > 0$ для всех $x \in riS^{m-1}$ и $y_k > 0$ при всех $k = \overline{1, m}$, из (6) следует, что

$$(x_k - y_k)(f_k(x) - f_k(y)) \leqslant 0, \ k = \overline{1, m},$$

то

$$\sum_{k=1}^{m}(x_k - y_k)(f_k(x) - f_k(y)) \leqslant 0$$

или же

$$(f(x), x) - (f(x), y) - (x, f(y)) + (y, f(y)) \leqslant 0,$$

так как f удовлетворяет условию 5^0, поэтому это выполняется лишь в случае, когда

$$(x_k - y_k)(f_k(x) - f_k(y)) = 0, \ k = \overline{1, m}.$$

Так как $x \neq y$, то существует k_0 такой, что $x_{k_0} \neq y_{k_0}$, тогда из предыдущего следует, что

$$f_{k_0}(x) = f_{k_0}(y)$$

или же

$$1 + f_{k_0}(x) = 1 + f_{k_0}(y).$$

Так как $x_{k_0} \neq y_{k_0}$, отсюда сдедует, что $(Vx)_{k_0} \neq (Vy)_{k_0}$; это противоречит нашему предположению.

Сюръективность оператора вольтерровского типа докажем по индукции относительно размерности симплекса. Очевидно, в случае $m = 2$ теорема верна. Предположим для размерности меньших m теорема доказана. Докажем ее в случае размерности m. Если f удовлетворяет условию 5^0, то для любого $\alpha \subset I$ сужение f_α тоже удовлетворяет условию 5^0. По предположению индукции $V(\partial S^{m-1}) = \partial S^{m-1}$, к тому же V — инъекция, то $V(S^{m-1}) = S^{m-1}$ (см. [3]).

Таким образом, непрерывное отображение $V : S^{m-1} \to S^{m-1}$, определенное на компакте, является биективным, тогда $V : S^{m-1} \to S^{m-1}$ — гомеоморфизм (см. [3]). □

Следствие 4. *Для любой начальной точки $x^0 \in S^{m-1}$ существует "отрицательная" траектория*

$$\{x^0, V^{-1}x^0, V^{-2}x^0, ..., V^{-n}x^0, ...\}.$$

Пусть $\alpha(x^0)$ — множество предельных точек "отрицательной" траектории, начинающейся в точке $x^0 \in S^{m-1}$. Ясно, что $\alpha(x^0) \neq \varnothing$ и замкнуто.

Теорема 7. *Если $x^0 \in riS^{m-1}$, то $\alpha(x^0) \subset \mathbb{P}$.*

Доказательство. Пусть $p = (p_1, p_2, ..., p_m) \in \mathbb{P}$. Тогда $\varphi(x) = x_1^{p_1}, x_2^{p_2}, ..., x_m^{p_m}$ — функция Ляпунова, монотонно убывающая вдоль любой траектории. Поэтому

$$\varphi(x^0) \leqslant \varphi(x^{(-1)}) \leqslant \varphi(x^{(-2)}) \leqslant ... \leqslant \varphi(x^{(-n)}) \leqslant ...,$$

где $x^{(-n)} = V^{-n}x^0$.

Поскольку $x^0 \in riS^{m-1}$, то $\varphi(x^0) > 0$. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(x^{(-n)}) = C > 0.$$

Так как $x^{(-n)} = Vx^{(-n-1)}$, то

$$\varphi(x^{(-n)}) = \varphi(x^{(-n-1)})\psi(x^{(-n-1)}),$$

где $\psi(x) = \prod\limits_{k=1}^{m} (1 + f_k(x))^{p_k}$.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \psi(x^{(-n)}) = 1$, т.е. для любого $y \in \alpha(x^0)$ имеем $\psi(y) = 1$. Напомним, что $\psi(y) = 1$ только при $y \in \mathbb{P}$. Поэтому $\alpha(x^0) \subset \mathbb{P}$. □

Теорема 8. *"Отрицательные" траектории всегда сходятся.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $x^0 \in riS^{m-1}$, поскольку в противном случае достаточно перейти к соответствующей грани симплекса S^{m-1} и сужению оператора V на эту грань. Поэтому из теоремы 7 следует, что $\alpha(x^0)$ состоит только из неподвижных точек оператора V.

Выбрав $p = (p_1, p_2, ..., p_m) \in \alpha(x^0)$ построим функцию Ляпунова $\varphi(x) = x_1^{p_1} x_2^{p_2} ... x_m^{p_m}$. Поскольку $p \in \alpha(x^0)$, то существует подпоследовательность "отрицательной" траектории $x^{(-n_i)}$, сходящаяся к p. Поэтому

$$\lim_{i\to\infty} \varphi(x^{(-n_i)}) = \varphi(p) = p_1^{p_1} p_2^{p_2} ... p_m^{p_m}.$$

Напомним, что монотонная последовательность будет сходящейся, если сходится некоторая ее подпоследовательность. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(x^{(-n)}) = \varphi(p) = p_1^{p_1} p_2^{p_2} ... p_m^{p_m}.$$

Учитывая, что $\max\limits_{x\in S^{m-1}} \varphi(x) = \varphi(p) = p_1^{p_1} p_2^{p_2} ... p_m^{p_m}$, причем максимум достигается лишь в точке p, находим $\alpha(x^0) = \{p\}$. Следовательно, любая "отрицательная" траектория сходится. □

Список литературы

[1] Р.Н.Ганиходжаев, Квадратичные стохастические операторы, функция Ляпунова и турниры, *Мат. сб.*, **183**(1992), №8, 121-140.

[2] Л.В.Канторович, Г.П.Акилов, Функциональный анализ, Наука, М., 1977.

[3] Э.Спеньер, Алгебраическая топология, Мир, М., 1971.

A Generalized Model of Nonlinear Operators of Volterra Type and Lyapunov Functions

Rasul N.Ganikhodzhaev
Mansoor X.Saburov

In some problems of population genetics we deal with studying asymptotic behavior of the trajectory of nonlinear mappings of a simplex into itself. The present paper is devoted to investigation of homeomorphisms of such mappings and asymptotic behavior. Such a homeomorphism allows us to determine the pre-history of a biological system.

Keywords: nonlinear operators, asymptotical behavior, Lyapunov function