ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОГО ПОЛОГО ЦИЛИНДРА В НАПРЯЖЕНИЯХ

Атургашева К.Ю.
научный руководитель – доцент Анферов П.И.
Сибирский федеральный университет

Рассмотрим квазистатическую задачу термоупругости для цилиндра $(1 \le r \le R$, $-\infty < z < \infty)$, свободного от внешних усилий, который на части внешней поверхности нагревается тепловым потоком $q(z)$, независящим от угла θ. Начальная температура цилиндра T принята равной нулю.

Напряженное состояние цилиндра описывается уравнениями Бельтрами-Мичела и равновесия [1].В этих уравнениях вместо напряжений $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}$ и температуры T введем в качестве новых неизвестных их линейные комбинации:

$$\sigma_1 = \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \beta T; \qquad \sigma_1 = \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \beta T; \qquad g = \nu^{-1}(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz} + 2\beta T) \tag{1}$$

Тогда

$$\sigma_{rr} = 0{,}5(\sigma_1 + \sigma_2); \qquad \sigma_{\theta\theta} = 0{,}5(\sigma_1 - \sigma_2 - \beta T); \qquad \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = \sigma_2 + \beta T. \tag{2}$$

Величины β и ν равны: $\beta = \alpha E(1-\mu)^{-1}$, $\nu = 2(1+\mu)$, где α – коэффициент линейного расширения, E – модуль Юнга, μ – коэффициент Пуассона. Перечисленные параметры полагаются независящими от температуры.

Из условий совместимости деформаций в напряжениях и формул (1) для функций $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_{rz}, g$ получены дифференциальные уравнения:

$$\nabla^2 \sigma_1 = 2g_{,zz} - \beta T_{,zz}; \tag{3}$$

$$\nabla^2 \sigma_2 - 4r^{-2}\sigma_2 = 4r^{-1}g_{,r} + 2g_{,zz} - \beta(r^{-1}T_{,r} + T_{,zz}) + 4r^{-2}\beta T; \tag{4}$$

$$\nabla^2 \sigma_{rz} - r^{-2}\sigma_{rz} = -(g - \beta T)_{,rz}; \tag{5}$$

$$\nabla^2 g = 0; \tag{6}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Запятые на уровне индексов означают частное дифференцирование по координатам, указанным после них.

Граничные условия для (3) – (5) таковы:

$$\sigma_1(R,z) + \sigma_2(R,z) = 0; \qquad \sigma_{rz}(R,z) = 0. \tag{7}$$

$$\sigma_1(1,z) + \sigma_2(1,z) = 0; \qquad \sigma_{rz}(1,z) = 0. \tag{8}$$

Функции $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_{rz}, g$, найденные из (3) – (6) должны тождественно удовлетворять равенствам:

$$(\sigma_1 + \sigma_2)_{,r} + 2r^{-1}\sigma_2 + 2\sigma_{rz,z} = -2\beta r^{-1}T; \tag{9}$$

$$\sigma_{rz,z} + r^{-1}\sigma_{rz} + \nu g_{,z} - \sigma_{1,z} = \beta T_{,z}; \tag{10}$$

которые следуют из уравнений равновесия при осесимметричном деформировании.

Температура определяется из начально-краевой задачи:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\nabla^2 T; \qquad T(r,z,0) = 0; \qquad \frac{\partial T}{\partial r}(R,z,t) = \frac{1}{\lambda} q(z,t); \qquad \frac{\partial T}{\partial r}(0,z,t) = 0; \tag{11}$$

где λ – коэффициент теплопроводности, a - коэффициент температуропроводности.

От уравнений (3) – (6), (8), (9) перейдем к соответствующим равенствам для Фурье-образов и введем новую независимую переменную $\rho = \omega r$:

$$\bar{\sigma}_1'' + \rho^{-1}\bar{\sigma}_1' - \bar{\sigma}_1 = -2\bar{g} + \beta\bar{T}; \tag{12}$$

$$\bar{\sigma}_2'' + \rho^{-1}\bar{\sigma}_2' - (1 + 4\rho^{-2})\bar{\sigma}_2 = 4\rho^{-1}\bar{g}' - 2\bar{g} - 2\beta(\rho^{-1}\bar{T}') + (1 + 2\rho^{-2})\beta\bar{T}; \tag{13}$$

$$\bar{\sigma}_{rz}'' + \rho^{-1}\bar{\sigma}_{rz}' - (1 + \rho^{-2})\bar{\sigma}_{rz} = -2i\bar{g} + i\beta\bar{T}; \tag{14}$$

$$\bar{g}'' + \rho^{-1}\bar{g}' - \bar{g} = 0; \tag{15}$$

$$\rho\bar{\sigma}_1' + \rho\bar{\sigma}_2' + 2\bar{\sigma}_2 + 2\rho i\bar{\sigma}_{rz} = -2\beta\bar{T}; \tag{16}$$

$$i\rho\nu\bar{g} - i\rho\bar{\sigma}_1' - i\rho\beta\bar{T} + \rho\bar{\sigma}_{rz}' + \bar{\sigma}_{rz} = 0; \tag{17}$$

$$\bar{\sigma}_{zz} = \nu\bar{g} - \bar{\sigma}_1 - \beta\bar{T}; \tag{18}$$

$$\frac{\partial\bar{T}}{\partial\tau} = \frac{\partial^2\bar{T}}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\bar{T}}{\partial\rho} - \bar{T}; \tag{19}$$

где $\tau = ta\omega^2$, ω - параметр преобразования Фурье.Здесь и далее штрихи означают дифференцирование по ρ, черта над символами означает преобразование Фурье.

Граничные условия для (12) – (14) таковы:

$$\bar{\sigma}_{rz}(R\omega) = 0; \qquad \bar{\sigma}_1(R\omega) + \bar{\sigma}_2(R\omega) = 0. \tag{20}$$

$$\bar{\sigma}_{rz}(0) = 0; \qquad \bar{\sigma}_1(0) + \bar{\sigma}_2(0) = 0. \tag{21}$$

Начальные и граничные условия для (19):

$$\bar{T}(\rho,0) = 0; \qquad \frac{\partial\bar{T}(R\omega)}{\partial\rho} = \lambda^{-1}\omega^{-1}\bar{q}(\tau); \qquad \frac{\partial\bar{T}(0)}{\partial\rho} = 0. \tag{22}$$

Решение уравнения (15) $\bar{g}(\rho) = AI_0(\rho) + BK_0(\rho)$ подставим в уравнения (12) – (14) и, применив метод вариации произвольных постоянных, запишем их общие решения:

$$\bar{\sigma}_1 = A_1 I_0(\rho) + B_1 K_0(\rho) - A\rho I_1(\rho) + B\rho K_0(\rho) + s_1(\rho); \tag{23}$$

$$\bar{\sigma}_2 = A_2 I_2(\rho) - B_2 K_2(\rho) - A\rho I_1(\rho) + B\rho K_1(\rho) + s_2(\rho); \tag{24}$$

$$\bar{\sigma}_{rz} = A_3 I_1(\rho) - B_3 K_1(\rho) - Ai\rho I_0(\rho) + Bi\rho K_0(\rho) + s_3(\rho). \tag{25}$$

$$s_1(\rho) = \beta\left[-\bar{T}(\rho) + I(\rho)R_1(\rho) + K_0(\rho)R_2(\rho)\right]; \tag{26}$$

$$s_1(\rho) = \beta\left[I_2(\rho)R_1(\rho) + K_2(\rho)R_2(\rho) - \bar{T}(\rho)\right]; \tag{27}$$

$$s_3(\rho) = i\beta\left[I_1(\rho)R_1(\rho) - K_1(\rho)R_2(\rho)\right]; \tag{28}$$

где $I_n(\rho), K_n(\rho), n = 0,1,2.$ - модифицированные функции Бесселя.

Величины $R_1(\rho), R_2(\rho)$ в формулах (26) – (28) равны:

$$R_1(\rho) = \int \rho K_1(\rho) \bar{T}'(\rho) d\rho; \qquad R_2(\rho) = \int \rho I_1(\rho) \bar{T}'(\rho) d\rho. \qquad (29)$$

Функции $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_{rz}, \bar{g}$ будут тождественно удовлетворять уравнениям (15), (16), если константы $A, B, A_k, B_k,\ k = 1,2,3$ связаны равенствами:

$$A_2 = A_1 + 2A(3+\nu); \qquad B_2 = B_1 + 2B(3+\nu). \qquad (30)$$

$$A_3 = iA(2+\nu) + iA_1; \qquad B_3 = iA(2+\nu) - iB_1; \qquad (31)$$

С учетом (31) и рекурентных соотношений[2], перепишем $\bar{\sigma}_{rz}$ в виде

$$\bar{\sigma}_{rz} = i\left[A_1 I_1(\rho) - B_1 K_1(\rho) - Af_1(\rho) - Bf_2(\rho) + s_3(\rho)\right] \qquad (32)$$

где $\quad f_1(\rho) = \rho I_2(\rho) - \nu I_1(\rho), \qquad f_2(\rho) = \rho K_2(\rho) + \nu K_1(\rho).$

Константы из (30) подставим в (23), (24) и с учетом (2), запишем для $\bar{\sigma}_{rr}(\rho)$

$$\bar{\sigma}_{rr} = A_1 g_1(\rho) + B_1 g_2(\rho) - Ag_3(\rho) + Bg_4(\rho) + \frac{1}{2}\left[s_1(\rho) + s_2(\rho)\right] \qquad (33)$$

Здесь обозначено

$$g_1(\rho) = \rho^{-1} I_1(\rho) + I_2(\rho); \qquad g_3(\rho) = \rho I_1(\rho) - (3+\nu) I_2(\rho);$$

$$g_2(\rho) = \rho^{-1} K_1(\rho) + K_2(\rho); \qquad g_4(\rho) = \rho K_1(\rho) + (3+\nu) K_2(\rho).$$

Еще четыреалгебраических уравнения для вычисления этих констант получаются из равенств (32), (33), если $\bar{\sigma}_{rz}$ и $\bar{\sigma}_{rr}$ подчинить граничным условиям (20) – (21).

$$A_1 I_1(R\omega) - B_1 K_1(R\omega) - Af_1(R\omega) - Bf_2(R\omega) + s_3(R\omega) = 0; \qquad (34)$$

$$A_1 g_1(R\omega) + B_1 g_2(R\omega) - Ag_3(R\omega) + Bg_4(R\omega) + \frac{1}{2}\left[s_1(R\omega) + s_2(R\omega)\right] = 0; \qquad (35)$$

$$A_1 I_1(\omega) - B_1 K_1(\omega) - Af_1(\omega) - Bf_2(\omega) + s_3(\omega) = 0; \qquad (36)$$

$$A_1 g_1(\omega) + B_1 g_2(\omega) - Ag_3(\omega) + Bg_4(\omega) + \frac{1}{2}\left[s_1(\omega) + s_2(\omega)\right] = 0; \qquad (37)$$

Чтобы вычислить интегралы в (29), нужно прежде из (19),(22) найти преобразование Фурье температуры, вычисление которых целесообразно проводить методом прогонки.

Определив числа $A, B, A_k, B_k, k = 1,2,3,$ из системы (34) – (37) находимвеличины $\overline{\sigma}_1, \overline{\sigma}_2, \overline{\sigma}_{rz}$ из уравнений (23) – (25),через которые выражаются Фурье-образы напряжений $\overline{\sigma}_{jk}$. Теперь, совершая обратные преобразования Фурье, получим искомые напряжения:

$$\sigma_{jk}(r, z, t) = \frac{1}{r\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\sigma}_{jk}(\rho, t) \exp(i\rho r^{-1} z)\, d\rho; \; j, k = r, \theta, z. \quad (38)$$

Интегралы (38) вычисляются численно.

Литература

1. Колтунов М.А., Васильев Ю.Н., Черных В.А., Упругость и прочность цилиндрических тел. М.: Высш. шк., 1975. 526 с.

2. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции/ Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М.: Наука, 1974. – 296 с.