Применение амплитудно-фазового синтеза диаграммы направленности для пространственного подавления помех

А. А. Ерохин, Ю. П. Саломатов
ФГАОУ ВПО СФУ, г. Красноярск
E-mail: aerokhin@ sfu-kras.ru, ysalomatov@sfu-kras.ru

Рассмотрен метод амплитудно-фазового синтеза диаграммы направленности (ДН) антенной решетки (АР) основанный на методе минимизации Гаусса-Ньютона. Данный метод позволяет синтезировать ДН заданной формы, при условии формирования провала в направлении помех (при их наличии). Приведен пример амплитудно-фазового синтеза, который показал работоспособность рассмотренного метода.

Ключевые слова: *антенная решетка, пространственное подавление помех, синтез диаграммы направленности.*

The method of amplitude-phase synthesis of the beam pattern of the antenna array based on the Gauss-Newton algorithm is considered. This method allows synthesizing the radiation pattern of given shape, also forming a “null” in the direction of the interference (if available). An example of amplitude-phase synthesis, which showed the efficiency of this method, is given.

Keywords: *antenna array, spatial selection, synthesis of beam pattern.*

Метод Гаусса-Ньютона используется для решения нелинейных задач наименьших квадратов [1] и является модификацией метода Ньютона. В отличие от метода Ньютона алгоритм Гаусса-Ньютона можно использовать для минимизации значений суммы квадратов функций, но при этом не требуется вычисление вторых производных, что, как правило, усложняет вычисления.

Для заданных M функций $\overline{r} = \left(r_1, r_2, \ldots, r_M\right)$, часто называемых невязками, и N переменных $\overline{\beta} = \left(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_N\right)$, при $M \geq N$ (N – количество элементов АР), в алгоритме Гаусса-Ньютона итеративно находятся значения переменных, минимизирующих сумму квадратов:

$$S\left(\overline{\beta}\right) = \sum_{m=1}^{M} r_m^2\left(\overline{\beta}\right).$$

Начиная с начального значения переменных ($\overline{\beta}^{(0)}$), для нахождения минимума $S\left(\overline{\beta}\right)$ выполняются итерации:

$$\overline{\beta}^{(l+1)} = \overline{\beta}^{(l)} - \left(J_r^T J_r\right)^{-1} J_r^T r\left(\overline{\beta}^{(l)}\right),$$

где $(\bullet)^T$ – транспонирование, $l = 0,1,2\ldots$, а для функций и переменных ($\overline{r}$ и $\overline{\beta}$), являющихся векторами-столбцами, вводится матрица Якоби (J_r), элементы которой равны:

$$\left(J_r\right)_{mn} = \frac{\partial r_m\left(\overline{\beta}^{(l)}\right)}{\partial \beta_n^{(l)}}. \tag{1}$$

При решении задачи, когда целью является определение таких аргументов ($\overline{\beta}$), при которых заданная функция ($y = f\left(x, \overline{\beta}\right)$) наилучшим образом аппроксимирует некоторые заданные значения $\left(x_m, y_m\right)$, функции r_m являются невязками.

$$r_m\left(\overline{\beta}\right) = y_m - f\left(x_m, \overline{\beta}\right).$$

При этом метод Гаусса-Ньютона может быть записан с использованием Якобиана J_f функции f следующим образом:

$$\overline{\beta}^{(l+1)} = \overline{\beta}^{(l)} + \left(J_f^T J_f\right)^{-1} J_f^T r\left(\overline{\beta}^{(l)}\right), \tag{2}$$

поскольку $y_m = \text{const}$, а при этом $J_r = J_f$.

Условие $M \geq N$ необходимо, поскольку в противном случае матрица ($J_r^T J_r$) станет необратимой.

Рассмотрим синтез ДН АР, используя метод Гаусса-Ньютона. Выражение для ДН АР может быть записано в виде [2]

$$y(\theta) = h_N^H x_N(\theta),$$

где h_N – матрица-столбец АФР; $x_N(\theta, \varphi)$ – вектор плоской волны, падающей на АР с направления (θ, φ), $(\bullet)^H$ – эрмитово сопряжение.

По методу Гаусса-Ньютона среднеквадратическая разность между заданной ДН ($d(\theta)$ – рисунок 1) и синтезируемой ($y(\theta)$) запишется в виде:

$$S(h) = \sum_{m=1}^{M} \left[\dot{r}_m(h) \dot{r}_m^*(h)\right], \tag{3}$$

где $m=\overline{1,M}$, $M \ge N$, M – количество заданных точек в синтезируемой ДН,

$$r_m\left(h\right)=\dot{d}\left(\theta_m\right)-\dot{y}\left(\theta_m\right). \tag{4}$$

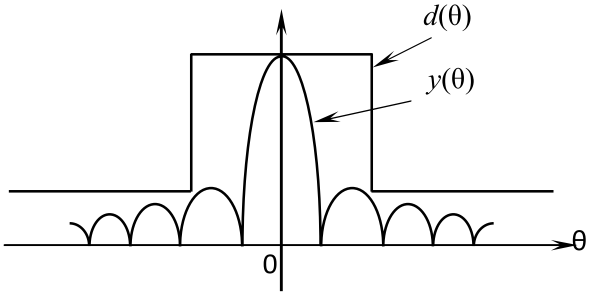

Рисунок 1 – ДН АР

Введём обозначение:

$$\dot{f}_m\left(h\right)=\dot{f}\left(\theta_m,h\right)=\sum_{n=1}^{N}\dot{h}_n \exp\left(ikz_n \sin\theta_m\right), \tag{5}$$

Необходимо определить Якобиан функции $\dot{f}\left(\theta_m,h\right)$, элементы которого будут равны

$$\left(J_f\right)_{mn}=\frac{\partial f_m\left(h^{(l)}\right)}{\partial h_n^{(l)}}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial f_m}{\partial h_n}=\exp\left(ikz_n \sin\theta_m\right).$$

Пусть $\theta_m=\theta_0+\left(m-1\right)\Delta\theta$; $\theta_0=0$, $\Delta\theta=\frac{\pi}{M-1}$; $m=\overline{1,M}$, тогда из (1) и (5) получим выражение для Якобиана, при «эквидистантном» расположении заданных точек в ДН:

$$J_f=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ e^{ikz_1\sin\left(\Delta\theta\right)} & e^{ikz_2\sin\left(\Delta\theta\right)} & \cdots & e^{ikz_N\sin\left(\Delta\theta\right)} \\ e^{ikz_1\sin\left(2\Delta\theta\right)} & e^{ikz_2\sin\left(2\Delta\theta\right)} & & e^{ikz_N\sin\left(2\Delta\theta\right)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e^{ikz_1\sin\left(M\Delta\theta\right)} & e^{ikz_2\sin\left(M\Delta\theta\right)} & \cdots & e^{ikz_N\sin\left(M\Delta\theta\right)} \end{bmatrix}. \tag{7}$$

При произвольном расположении заданных точек в ДН выражение (7) соответствующим образом изменится. Таким образом, Якобиан функции не зависит от шага итерации, то есть является постоянной матрицей при вычислениях, если ДН или направление её максимума не меняется в процессе работы АР. При использовании подобного алгоритма для «адаптации» к помеховой обстановке или в случае сканирования ДН Якобиан функции будет изменяться.

Итерационный процесс синтеза АФР в АР может быть записан в виде (2):

$$h^{(l+1)} = h^{(l)} + \left(J_f^T J_f\right)^{-1} J_f^T r\left(h^{(l)}\right),$$

где $\left(J_f^T J_f\right)^{-1} J_f^T$ – матрица размерности $N \times N$, не изменяющаяся при итерациях.

Выходной сигнал АР, когда на АР поступает несколько сигналов (полезных или помеховых), записывается в виде

$$\dot{y}_{\Sigma} = h_N^H \dot{x}_{N\Sigma}$$

где $\dot{x}_{N\Sigma} = \sum_{i=1}^{K} \dot{x}_N^i + s_N$, s_N – шумы в АР, K – количество источников сигналов и помех.

Мощность выходного сигнала АР будет равна:

$$\left|\dot{y}_{\Sigma}\right|^2 = h_N^H \dot{x}_{N\Sigma} \dot{x}_{N\Sigma}^H h_N = h_N R_N h_N^H,$$

где R_N – корреляционная матрица входных сигналов АР.

При отсутствии помех, считая, что уровень сигнала много меньше уровня шумов, будем иметь некоторый уровень мощности на выходе АР:

$$\left|\dot{y}_{\Sigma}^0\right|^2 = h_N^H R_N^0 h_N.$$

Значение $\left|\dot{y}_{\Sigma}^0\right|^2$ может быть определено за какое-то время, по крайней мере, можно определить предельное (максимальное) значение. При появлении помехи значение выходной мощности увеличится. Таким образом, необходимо минимизировать следующее значение:

$$\left|\dot{y}_{\Sigma}^2\right|^2 - \left|\dot{y}_{\Sigma}^0\right|^2 = h_N^H R_N h_N - \left|\dot{y}_{\Sigma}^0\right|^2. \quad (8)$$

Если второе слагаемое в выражении (8) взять достаточно малым (меньше уровня мощности шумов для наиболее благоприятного случая низкой шумовой температуры), то полученное выражение будет всегда положительным. Задача минимизации первого слагаемого в выражении (8) приводит к постановке «обычной» задачи адаптивной фильтрации с ограничениями (Винеровское решение [3, 4]). Необходимым условием при этом будет являться сохранение направления максимума ДН на источник полезного сигнала.

При использовании метода Гаусса-Ньютона условием сохранения направления максимума ДН (при моделировании) могут быть выражения (3) и (4) при «правильном» задании функции $d(\theta_m)$. Далее, если известно направление на помеху, то можно её «подавить», выбирая соответствующим образом функцию $d(\theta_m)$. Другим путём является совместная минимизация выражений (3) и (8).

При минимизации выражения (8) можно отбросить его второй член, поскольку он является константой. Тогда минимизации будет подлежать все тоже выражение (3):

$$S(h) = \sum_{m=1}^{M} \left[\dot{r}_m(h) \dot{r}_m^*(h) \right],$$

но при $m = \overline{1, M}$ $r_m(h)$ определяется в соответствии с выражением (3), а при $m = M + 1$:

$$\dot{r}_{M+1}(\dot{h}) = -\dot{h}_N^H \dot{x}_{N\Sigma}.$$

Из этого выражения, аналогично(6), получим

$$\frac{\partial f_{M+1}}{\partial h_n} = \dot{x}_n^*.$$

Откуда следует, что в этом случае Якобиан (7) необходимо записать в следующем виде:

$$J_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{ikz_1 \sin(\Delta\theta)} & & \dots & e^{ikz_N \sin(\Delta\theta)} \\ e^{ikz_1 \sin(2\Delta\theta)} & & \dots & e^{ikz_N \sin(2\Delta\theta)} \\ \vdots & & & \vdots \\ e^{ikz_1 \sin(M\Delta\theta)} & & \dots & e^{ikz_N \sin(M\Delta\theta)} \\ x_1^* & x_2^* & \dots & x_N^* \end{bmatrix}.$$

Выражение для $\dot{r}(h)$ теперь будет иметь вид:

$$\dot{r}(h) = \begin{bmatrix} d_1 - \sum_{n=1}^{N} \dot{h}_n e^{ikz_n \sin\theta_1} \\ \vdots \\ d_M - \sum_{n=1}^{N} \dot{h}_n e^{ikz_n \sin\theta_M} \\ -\dot{h}_n^H \dot{x}_n \end{bmatrix}.$$

Проведем моделирование описанного метода синтеза ДН. В качестве примера рассмотрим прямоугольную эквидистантную АР размерностью 10 × 10 элементов с расстоянием между элементами λ/2, при этом предполагается наличие источника помехи с направления $\theta_p = 50°$, $\varphi_p = 230°$. Маска задаваемой ДН приведена на рисунке 2.

В результате синтеза получена ДН удовлетворяющая заданной маске. На рисунке 3 приведена синтезированная ДН, а на рисунке 4 – синтезированное амплитудно-фазовое распределение.

Синтезированная ДН, как видно из рисунка 3, близка к заданной широкой секторной ДН, при этом в направлении помехи сформирован «провал».

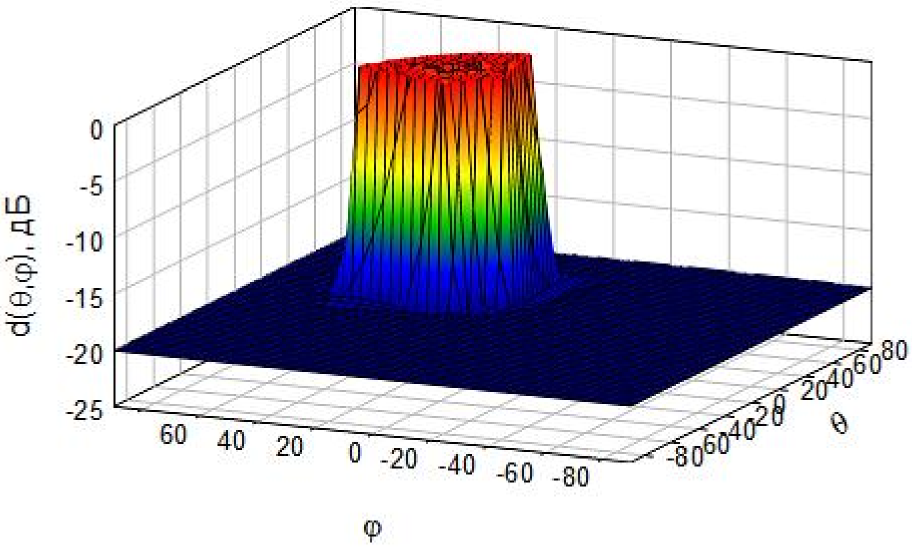

Рисунок 2 – Желаемая ДН АР

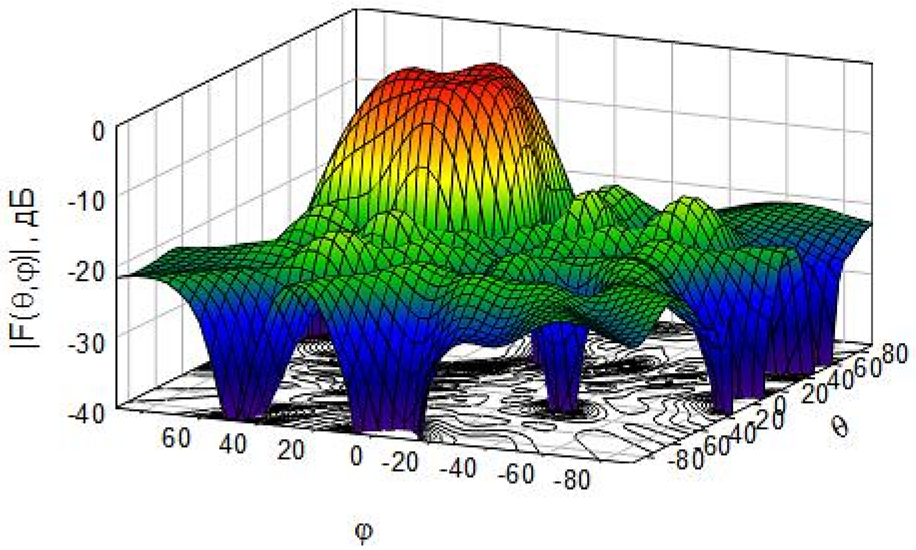

Рисунок 3 – Синтезированная ДН АР

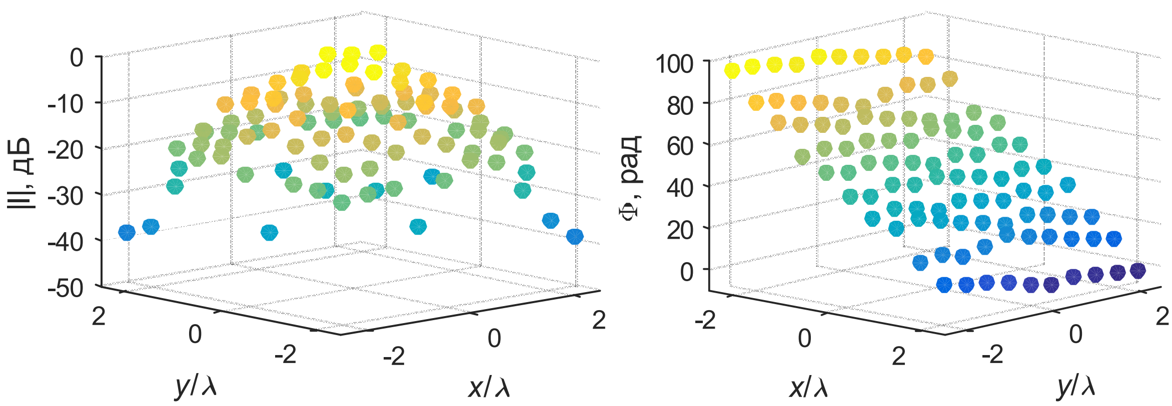

Рисунок 4 – Амплитудное (слева) и фазовое (справа) распределения

Литература

1. Jorge Nocedal, Stephen J. Wright. *Numerical Optimoxation*. *Second Edition*. Springer, 2006. 664 p.
2. Григорьев Л.Н. Цифровое формирование диаграммы направленности в фазированных антенных решётках. – М.: Радиотехника, 2010. – 144 с., ил.
3. Compton R.P. *Adaptive Antennas: Concepts and Performance*. Prentice Hall, Incorporated, 1988. 448 p.
4. Джиган В.И. Адаптивная фильтрация сигналов: теория и алгоритмы. М., Техносфера. 2013 г. – 527 с.

Amplitude-Phase Synthesis of the Beam Pattern for the Spatial Selection of Interference

A.A. Erokhin, Yu. P. Salomatov

Siberian Federal University, Krasnoyarsk

E-mail: aerokhin@ sfu-kras.ru, ysalomatov@sfu-kras.ru

Interference reduction method based on the Gauss-Newton algorithm is discussed. This method allows to obtain a beam pattern of predetermined form. Also it is possible to suppress interferences coming from random directions.

References

1. Jorge Nocedal, Stephen J. Wright. *Numerical Optimization. Second Edition*. Springer, 2006. 664 p.
2. Григорьев Л.Н. Цифровое формирование диаграммы направленности в фазированных антенных решётках. – М.: Радиотехника, 2010. – 144 с., ил.
3. Compton R.P. *Adaptive Antennas: Concepts and Performance*. Prentice Hall, Incorporated, 1988. 448 p.
4. Джиган В.И. Адаптивная фильтрация сигналов: теория и алгоритмы. М., Техносфера. 2013 г. – 527 с.