МЕТОД РЕШЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ, ОПИСЫВАЕМЫХ ЛИНЕЙНЫМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

Б А Беляев, В В Тюрнев

Предложен метод решения физических задач, в котором общее решение дифференциального уравнения в частных производных записывается в виде разложения по сферическим гармоникам с неопределенными коэффициентами. Значения этих коэффициентов находятся из сравнения записанного разложения с решением, полученным для какого-либо простейшего частного случая рассматриваемой задачи. Эффективность метода продемонстрирована на примере расчета электромагнитных полей, создаваемых проводником с током в форме окружности. Полученные формулы применимы для анализа трасс в системах ближнепольной магнитной (магнитно-индуктивной) связи, работающих и в умеренно проводящих средах, например в морской воде.

1. Введение

Хорошо известно, что для решения сложных уравнений математической физики, описывающих различные физические процессы, существует ряд методов, позволяющих в той или иной мере добиться успеха в каждом конкретном случае. В частности, метод разделения переменных, или метод Фурье, является одним из наиболее распространенных методов решения задач, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных [1–4]. В этом методе искомая функция многих аргументов представляется в виде произведения нескольких функций с меньшим числом аргументов. Наложение граничных условий на функции с меньшим числом аргументов приводит к задаче на собственные значения (для констант разделения), которую часто называют задачей Штурма – Лиувилля. В результате решение задачи в общем случае выражается бесконечной суммой частных решений, каждое из которых отвечает своей константе разделения.

Метод частичных областей, или метод сшивания, часто используется в решении различных задач электродинамики, в частности, при изучении распространения электромагнитных волн в сложных волноведущих структурах. Такие структуры разбиваются на области простой формы, в каждой из которых электрические и магнитные поля находятся решением уравнения Гельмгольца методом разделения переменных [5,6]. Для полного решения задачи используются условия непрерывности полей на общих границах частичных областей, что приводит обычно к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений для неизвестных амплитуд собственных волн. Точное решение бесконечной системы уравнений в общем случае невозможно, поэтому часто ограничиваются приближенным решением, используя метод редукции или метод последовательных приближений.

Метод Винера – Хопфа пригоден для решения краевых задач, в которых решение ищется в областях, бесконечно протяженных в двух противоположных направлениях [6]. В этом методе сначала с помощью функции Грина записывают интегральное уравнение, связывающее искомое решение с заданным внешним воздействием (характеристиками падающей волны) в одной из полубесконечных областей. Это уравнение преобразованием Фурье и введением дополнительной неопределенной функции на остальной полубесконечной области преобразуют в алгебраическое уравнение Винера – Хопфа. Затем образ функции Грина факторизуют на функции, одна из которых регулярна в верхней части комплексной плоскости, а вторая – в нижней части. Одновременно функцию внешнего воздействия, нормированную на фактор образа функции Грина, регулярный в нижней полуплоскости, разлагают на сумму функций, одна из которых регулярна в верхней части комплексной плоскости, а вторая – в нижней части. В результате получают два алгебраических уравнения, одно из которых содержит функции, регулярные в верхней части комплексной области, а второе уравнение содержит функции, регулярные в нижней части.

Метод решения уравнения Гельмгольца, описанный в [7], можно назвать автомодельным. В нем из всех аргументов строится вспомогательная функция таким образом, чтобы ее можно было выбрать в качестве единого нового аргумента, относительно которого дифференциальное уравнение в частных производных превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение.

Различные примеры решения задач электродинамики, использующие перечисленные выше методы, можно найти в [8–10]. Однако эти методы при решении некоторых задач либо слишком сложны, либо не обеспечивают достаточную точность. Поэтому создание новых высокоэффективных методов решения задач, описываемых волновыми уравнениями, является важной и актуальной проблемой.

В настоящей работе предлагается новый метод решения задач, описываемых линейными дифференциальными уравнениями, в котором решение физической задачи представляется в виде разложения по сферическим гармоникам с неопределенными коэффициентами. Значения неопределенных коэффициентов находятся из сравнения записанного разложения с известным решением этой задачи для какого-либо простейшего частного случая. Поэтому этот метод применим только в тех случаях, когда можно получить решение существенно упрощенной задачи, например в статике и на оси симметрии рассматриваемой структуры.

Детали применения предлагаемого метода раскрываются на примере решения задачи о расчете магнитных полей, порождаемых проводником в форме кругового витка с постоянным или переменным током. Практический интерес к этой задаче возник в связи с разработкой и исследованием различных систем ближнеполевой магнитной (магнито-индуктивной) связи, работающих, в том числе и в слабо проводящих средах, например в морской воде [11, 12].

2. Расчет магнитного поля витка проводника с постоянным током

Выполним расчет магнитного поля, создаваемого однородным постоянным электрическим током в кольцевом проводнике радиуса R (рис. 1). Статическое магнитное поле $\mathbf{H}$ в области пространства, не содержащей токов, является безвихревым. Поэтому его можно выразить формулой

$$\mathbf{H} = -\operatorname{grad}\psi, \tag{1}$$

где ψ – скалярный потенциал магнитного поля, удовлетворяющий уравнению Лапласа, то есть являющийся гармонической функцией. В сферической системе координат общее решение уравнения Лапласа выражается формулой [X1]

$$\psi(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{A_{nm}}{r^{n+1}} + B_{nm}r^{n}\right)P_{nm}(\cos\theta)\cos(m\varphi+\varphi_m), \tag{2}$$

где $P_{nm}(x)$ – присоединенные функции Лежандра первого рода, связанные с многочленами Лежандра $P_n(x)$ формулой [13]

$$P_{nm}(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_n(x). \tag{3}$$

Будем считать, что ось и начало системы сферических координат совпадают, соответственно, с осью и центром кругового витка. Решение задачи будем искать для области пространства за пределами сферы радиуса R. При этом коэффициенты B_{nm} в формуле Х(2) должны обращаются в нуль, а сама формула упрощается и принимает вид

$$\psi(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{r^{n+1}}P_n(\cos\theta). \tag{4}$$

Здесь также была учтена аксиальная симметрия задачи, то есть отсутствие зависимости от угла φ.

Отсюда по формуле Х(1) вычисляем компоненты магнитного поля

$$H_r=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\frac{n+1}{r^{n+2}}P_n(\cos\theta),\qquad H_\theta=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{r^{n+2}}P_{n1}(\cos\theta). \tag{5}$$

В частности, на оси витка эти компоненты выражаются формулами

$$H_r(r,\theta)\big|_{\theta=0}=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\frac{n+1}{r^{n+2}},\qquad H_\theta(r,\theta)\big|_{\theta=0}=0, \tag{6}$$

так как $P_n(1)=1$, а $P_{n1}(1)=0$.

Сравним формулу Х(6) для компоненты H_r с известной формулой [14]

$$H_r(r)=\frac{IR^2}{2(R^2+r^2)^{3/2}}, \tag{7}$$

которая при вычислении поля на оси витка легко получается интегрированием выражения из закона Био – Савара – Лапласа. Здесь I – сила тока в проводнике витка. Для удобства сравнения разлагаем формулу в ряд по обратным степеням r:

$$H_r(r)=\frac{I}{2R}\sum_{n=1}^{\infty}\binom{-3/2}{n-1}\left(\frac{R}{r}\right)^{2n+1}, \tag{8}$$

где биномиальные коэффициенты определяются формулой [15]

$$\binom{\alpha}{m}=\begin{cases}1 & \text{при } m=0,\\ \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-m+1)}{m!} & \text{при } m\ge 1.\end{cases} \tag{9}$$

Замечаем, что разложение в формуле Х(8) содержит только нечетные степени отношения R/r. Так как формулы Х(6) и Х(8) описывают одну и ту же величину, то не должно содержать четных степеней R/r. Поэтому формулу X(6), а с ней и формулы X(5), следует переписать в виде

$$H_r = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{2n}{r^{2n+1}} P_{2n-1}(\cos\theta), \quad H_\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{r^{2n+1}} P_{2n-1,\,1}(\cos\theta). \tag{10}$$

На оси витка компонента поля H_θ обращается в нуль, а компонента H_r упрощается:

$$H_r(r,\theta)\big|_{\theta=0} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{2n}{r^{2n+1}}. \tag{11}$$

Требуя почленного равенства выражений X(8) и X(11), находим коэффициенты разложения

$$A_n = \frac{I}{4R}\binom{-3/2}{n-1}\frac{R^{2n+1}}{n}. \tag{12}$$

После подстановки коэффициентов X(12) в формулы X(10), получаем искомые компоненты магнитного поля

$$\begin{aligned} H_r &= \frac{I}{2R}\sum_{n=1}^{\infty}\binom{-3/2}{n-1}\left(\frac{R}{r}\right)^{2n+1} P_{2n-1}(\cos\theta), \\ H_\theta &= \frac{I}{4R}\sum_{n=1}^{\infty}\binom{-3/2}{n-1}\left(\frac{R}{r}\right)^{2n+1}\frac{P_{2n-1,\,1}(\cos\theta)}{n}. \end{aligned} \tag{13}$$

Формулы X(13) совпадают с известными формулами [X14]

$$H_r = \frac{I}{2R}\left(\frac{R}{r}\right)^3 \cos\theta, \quad H_\theta = \frac{I}{4R}\left(\frac{R}{r}\right)^3 \sin\theta, \tag{14}$$

полученными в магнитодипольном приближении для случая $r >> R$, если в формулах X(13) сохранить только один член $(n=1)$, который медленнее всех других членов убывает с увеличением расстояния r.

3. Расчет электромагнитного поля витка проводника с переменным током

Рассчитаем компоненты полей, порождаемых витком с переменным током, когда размеры витка много меньше длины волны. Запишем в сферической системе координат общее выражение для произвольного высокочастотного электромагнитного поля в области пространства $r > R$. Как известно [X1, X2], компоненты электромагнитного поля могут быть выражены через два скалярных потенциала Дебая $U(\mathbf{r}, k)$ и $V(\mathbf{r}, k)$. Потенциал $U(\mathbf{r}, k)$ используют для описания волн электрического типа, которые могут иметь продольную компоненту электрического поля E_r, но не имеют продольной компоненты магнитного поля H_r. Потенциал $V(\mathbf{r}, k)$, напротив, используют для описания волн магнитного типа, которые могут иметь продольную компоненту магнитного поля H_r, не имеют продольной компоненты электрического поля E_r. Эти потенциалы являются решениями уравнения Гельмгольца

$$\Delta U + k^2 U = 0, \qquad \Delta V + k^2 V = 0, \tag{15}$$

где волновое число

$$k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_r + \frac{i\sigma}{\varepsilon_0 \omega}}, \tag{16}$$

ω – круговая частота, присутствующая во временной зависимости $\exp(-i\omega t)$; ε_r – относительная диэлектрическая проницаемость среды; σ – проводимость среды.

Компоненты произвольного поля выражаются через потенциалы Дебая формулами [X1, X2]

$$\begin{aligned}
E_r &= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2\right)(rU), & H_r &= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2\right)(rV),\\
E_\theta &= \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\theta\,\partial r}(rU) + \frac{iZ_c k}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}V, & H_\theta &= \frac{-ik}{\sin\theta\, Z_c}\frac{\partial}{\partial\varphi}U + \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\theta\,\partial r}(rV),\\
E_\varphi &= \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi\,\partial r}(rU) - iZ_c k\frac{\partial}{\partial\theta}V, & H_\varphi &= \frac{ik}{Z_c}\frac{\partial}{\partial\theta}U + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi\,\partial r}(rV),
\end{aligned} \tag{17}$$

где характеристическое сопротивление среды

$$Z_c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0\left(\varepsilon_r + \dfrac{i\sigma}{\varepsilon_0\omega}\right)}}. \tag{18}$$

Общее решение уравнения Гельмгольца X(15) в области, включающей бесконечно удаленную точку и не содержащую точку начала координат, имеет вид [X1, X2]

$$U, V = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} A_{nm}(k)\, h_n^{(1)}(kr) P_{nm}(\cos\theta)\cos(m\varphi + \varphi_m), \tag{19}$$

где $h_n^{(1)}(x)$ – сферическая функция Бесселя третьего рода [X13].

Так как круговой виток проводника обладает осевой симметрией, а текущий по нему электрический ток однороден, то порождаемое током электромагнитное поле будет иметь осевую симметрию. В этом случае формула X(19) упрощается и принимает вид

$$U,V = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(k)\, h_n^{(1)}(kr) P_n(\cos\theta). \tag{20}$$

Упрощаются также и формулы X(17)

$$\begin{aligned}
E_r &= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2\right)(rU), \quad & H_r &= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2\right)(rV),\\
E_\theta &= \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\theta\,\partial r}(rU), & H_\theta &= \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\theta\,\partial r}(rV),\\
E_\varphi &= -iZ_c k\frac{\partial}{\partial\theta}V, & H_\varphi &= \frac{ik}{Z_c}\frac{\partial}{\partial\theta}U.
\end{aligned} \tag{21}$$

Подставляя выражение X(20) в формулу X(21) для компоненты H_r, получаем

$$H_r = \sum_{n=0}^{\infty} kA_n(k)\left[\left(\frac{d^2}{dx^2}+1\right)\left(xh_n^{(1)}(x)\right)\right]_{x=kr} P_n(\cos\theta). \tag{22}$$

Для нахождения неопределенных коэффициентов $A_n(k)$ рассмотрим частный случай, а именно, рассчитаем поля на оси витка, то есть при $\theta = 0$. В этом случае формула X(22) становится проще

$$H_r(r,\theta,k)\big|_{\theta=0} = \sum_{n=0}^{\infty} kA_n(k)\left[\left(\frac{d^2}{dx^2}+1\right)\left(xh_n^{(1)}(x)\right)\right]_{x=kr}, \tag{23}$$

так как для любой степени n полинома $P_n(x)$ выполняется равенство $P_n(x)\big|_{x=1} = 1$.

Для дальнейшего упрощения рассматриваемого частного случая вычислим статический предел для формулы X(23). С этой целью необходимо выделить главный член выражения в квадратных скобках формулы X(23) при $x \to 0$. Очевидно, что он будет отвечать главному члену функции $x\,h_n^{(1)}(x)$. Используя формулы

$$xh_0^{(1)}(x) = -i\exp(ix), \quad xh_1^{(1)}(x) = -\left(1+\frac{i}{x}\right)\exp(ix) \tag{24}$$

и рекуррентную формулу

$$xh_n^{(1)}(x) = (2n-1)\cdot h_{n-1}^{(1)}(x) - xh_{n-2}^{(1)}(x), \tag{25}$$

приведенные в [X13], для $n \geq 1$ находим

$$xh_n^{(1)}(x) = -i\cdot 1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)\, x^{-n}\left[1+O(x)\right], \tag{26}$$

где $O(x)$ обозначает малую величину порядка x. Подставляя выражение X(26) в формулу X(23) и сохраняя в ней только главные члены, получаем

$$H_r(r,\theta,k)\big|_{\theta=0} = -i\sum_{n=0}^{\infty} kA_n(k)\cdot 1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)\cdot\frac{n(n+1)}{(kr)^{n+2}}, \tag{27}$$

Так как разложение компоненты H_r, согласно формуле X(8), не должно содержать четные степени отношения R/r, то формулы X(20) и X(27) перепишем в виде

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(k)\, h_{2n-1}^{(1)}(kr) P_{2n-1}(\cos\theta), \tag{28}$$

$$H_r(r,\theta,k)\big|_{\theta=0} = -i\sum_{n=1}^{\infty} kA_n(k)\cdot 1\cdot 3\cdot 5\ldots(4n-3)\cdot\frac{(2n-1)\,2n}{(kr)^{2n+1}}. \tag{29}$$

Требуя почленного равенства выражений X(8) и X(29) для компоненты H_r на оси симметрии витка, находим коэффициенты разложения потенциала Дебая V в формуле X(20)

$$A_n(k) = i\frac{I}{4n(2n-1)kR}\binom{-3/2}{n-1}\frac{(kR)^{2n+1}}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(4n-3)}. \tag{30}$$

а вместе с ними находим и сам потенциал Дебая

$$V = i\frac{I}{4kR}\sum_{n=1}^{\infty}\binom{-3/2}{n-1}\frac{(kR)^{2n+1}}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(4n-3)} h_{2n-1}^{(1)}(kr)\frac{P_{2n-1}(\cos\theta)}{n(2n-1)}. \tag{31}$$

Напомним, что в рассматриваемой задаче размеры витка с током много меньше длины волны ($|k|R \ll 1$), а значит, он не может излучать электромагнитные волны электрического типа. Поэтому считаем, что потенциал Дебая U равен нулю.

Подставляя потенциал X(31) в формулы X(17), находим ненулевые компоненты высокочастотного электромагнитного поля, создаваемого круговым витком проводника с однородным переменным током

$$H_r = i\frac{I}{4R}\sum_{n=1}^{\infty}\binom{-3/2}{n-1}\frac{(kR)^{2n+1}}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(4n-3)}\left[\left(\frac{d^2}{dx^2}+1\right)\left(xh_{2n-1}^{(1)}(x)\right)\right]_{x=kr}\frac{P_{2n-1}(\cos\theta)}{n(2n-1)},$$

$$H_\theta = -i\frac{I}{4R}\sum_{n=1}^{\infty}\binom{-3/2}{n-1}\frac{(kR)^{2n+1}}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(4n-3)}\left[\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(xh_{2n-1}^{(1)}(x)\right)\right]_{x=kr}\frac{P_{2n-1,1}(\cos\theta)}{n(2n-1)}, \qquad (32)$$

$$E_\varphi = -Z_c\frac{I}{4R}\sum_{n=1}^{\infty}\binom{-3/2}{n-1}\frac{(kR)^{2n+1}}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(4n-3)}h_{2n-1}^{(1)}(kr)\frac{P_{2n-1,1}(\cos\theta)}{n(2n-1)}.$$

Если в формулах X(32) оставить только по одному первому члену ($n = 1$), то получим известные формулы для электромагнитного поля магнитного диполя, то есть для поля витка с переменным током, но при условии $kr \gg 1$ [16]

$$H_r = \frac{IR^2}{2}\left(\frac{1}{r^3}-\frac{ik}{r^2}\right)\mathrm{e}^{ikr}\cos\theta,$$

$$H_\theta = \frac{IR^2}{4}\left(\frac{1}{r^3}-\frac{ik}{r^2}-\frac{k^2}{r}\right)\mathrm{e}^{ikr}\sin\theta, \qquad (33)$$

$$E_\varphi = \frac{IR^2}{4}Z_c\left(\frac{ik}{r^2}+\frac{k^2}{r}\right)\mathrm{e}^{ikr}\sin\theta.$$

Заметим, что формулы X(33) совпадают при $kr \ll 1$ с формулами статики X(14) с точностью до малых членов порядка $(kr)^2$.

4. Заключение

В работе предложен новый метод решения физических задач, описываемых линейными дифференциальными уравнениями, в частности, различных задач электродинамики. В этом методе решение дифференциального уравнения в частных производных записывается в виде разложения по сферическим гармоникам с неопределенными коэффициентами. Значения неопределенных коэффициентов находятся из сравнения записанного разложения с решением, полученным для какого-либо простейшего частного случая рассматриваемой задачи, например в статике, и на оси симметрии рассматриваемой структуры. Поэтому предложенный метод может с успехом применяться для решения сложных физических задач, но только в тех случаях, когда возможно получение решения для какого-либо упрощенного частного случая решаемой задачи.

Эффективность метода продемонстрирована на примере расчета электромагнитных полей, создаваемых проводником в форме окружности с постоянным или переменным однородным током. Полученные формулы применимы для анализа трасс в системах ближнепольной магнитной (магнитно-индуктивной) связи, активно разрабатываемые и исследуемые в последние годы. Одним из достоинств таких систем связи является их способность работать даже в умеренно проводящих средах, например, во влажном грунте и в морской воде.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. *Уравнения математической физики* (М.: Наука, 1977).
2. Кошляков Н С, Глинер Э Б, Смирнов М М *Уравнения в частных производных математической физики* (М.: Высшая школа, 1970).
3. Никольский В В, Никольская Т И *Электродинамика и распространение радиоволн* (М.: ЛИБРОКОМ, 2010).
4. Вайнштейн Л А *Электромагнитные волны* (М.: Радио и связь, 1988).
5. Веселов Г И, Егоров Е Н, Алехин Ю Н и др. *Микроэлектронные устройства СВЧ* (Под ред. Г И Веселова) (М.: Высшая школа, 1988).
6. Митра Р, Ли С *Аналитические методы теории волноводов* (М.: Мир, 1974) [Mittra R and Lee S W Analytical techniques in the theory of guided waves (New York: The Macmillan Company, 1971)].
7. Кукушкин А И *УФН* **163** 82 (1993) [Kukushkin A V *Phys. Usp*. **36** 81 (1993)].
8. Митра Р и др. в сб. *Вычислительные методы в электродинамике* (Под ред. Р Митры) (М.: Мир, 1977) [Mittra R in International series of monographs in electrical engineering Vol. 7 *Computer techniques for electrodynamics* (Ed R Mittra) (New York: Pergamon Press, 1973)].
9. Батыгин В В, Топтыгин И Н *Сборник задач по электродинамике* (М.: Регулярная и хаотическая динамика, 2002).
10. Smythe W R *Static and dynamic electricity* (New York: McGraw-Hill Book Company, 1950).
11. Akyildiz I F, Wang P, and Sun Z, *IEEE Communications Magazine* November 42 (2015).
12. Gulbahar B and Akan O B *IEEE Transactions on Wireless Communications* **11** 3326 (2012).
13. Корн Г и Корн Т *Справочник по математике для научных работников и инженеров* (М.: Наука, 1968) [Korn G A, Korn T M *Mathematical handbook for scientists and engineers* (New York: Mc Graw-Hill Book Company, 1961)].
14. Яворский Б М, Детлаф А А *Справочник по физике для инженеров и студентов вузов* (М: Наука, 1968).

15. *Справочник по специальным функциям* (Под ред. Абрамовица М, Стиган И) (М.: Наука, 1979) [*Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables* (Ed. M Abramowitz and I Steagun) (Washington: US Department of Commerce, National Bureau of standards, Dover Publications, 1972)].
16. Griffiths D J *Introduction to Electrodynamics. Instructor's Solutions Manual*, (New Jersey: Prentice Hall, 2004), Problem 11.5.

РИСУНКИ

к статье Б А Беляева, В В Тюрнева

Метод решения физических задач, описываемых линейными дифференциальными уравнениями

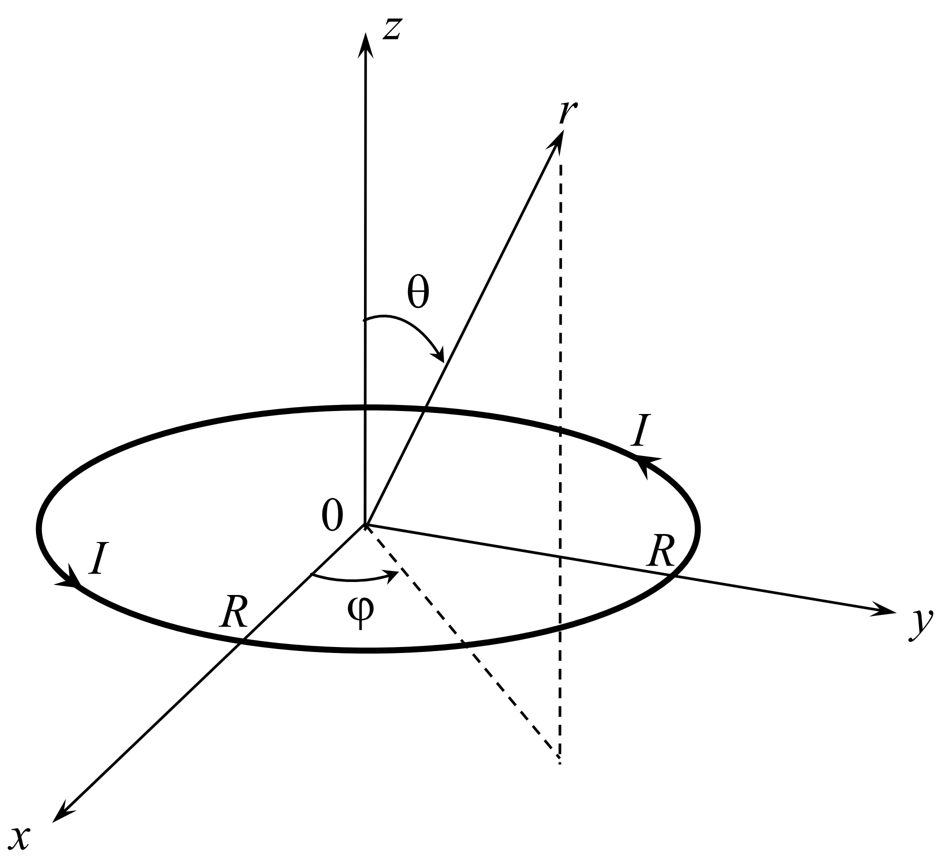

Рис. 1.

ПОДПИСЬ К РИСУНКУ

к статье Б А Беляева, В В Тюрнева

Метод решения физических задач, описываемых линейными дифференциальными уравнениями

Рис. 1. Проводник с током в форме окружности

METHOD TO SOLVE PHYSICAL PROBLEMS STATED WITH LINIER DIFFERENTIAL EQUATIONS

Belyaev B A, Tyurnev V V

We propose a method to solve physical problems in which the general solution of the partial differential equation is written in a form of the spherical harmonic expansion with undetermined coefficients. The values of these coefficients are found from comparing the written expansion with a solution obtained for any simple partial case of this problem. We demonstrate efficiency of the method on the examples of calculation of the electromagnetic field, generated by a circular conductor with the current. The derived formulas are applicable for analyzing the path trace in a near-field (magneto-inductive) communication, operating in moderately conductive media, for example in seawater.