Алгебра и логика, 55, № 4 (2016), 441—448

DOI: 10.17377/alglog.2016.55.404 УДК 512.542

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ГРУППЫ, НАСЫЩЕННЫЕ КОНЕЧНЫМИ ПРОСТЫМИ ГРУППАМИ ТИПОВ U_3 И L_3

Д. В. ЛЫТКИНА, А. А. ШЛЁПКИН

Введение

Говорят, что группа G *насыщена* группами из множества групп $\mathfrak{R}$, если любая конечная погруппа из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из $\mathfrak{R}$.

В [1] доказано, что периодическая группа, насыщенная группами из конечного множества $\mathfrak{F}$ групп, изоморфных конечным простым группам $U_3(q)$ или $L_3(q)$, изоморфна элементу $\mathfrak{F}$. В [2] показано, что периодическая группа, насыщенная простыми группами из $\mathfrak{T} = \{U_3(q), L_3(q) \mid q \text{ чётно}\}$, изоморфна унитарной или линейной группе степени 3 над некоторым локально конечным полем характеристики 2. Мы обобщаем эти результаты.

ТЕОРЕМА. *Пусть периодическая группа G насыщена группами из множества*

$$\mathfrak{M} = \{U_3(q), L_3(q) \mid q \text{ — степень простого числа, } q \geqslant 3\}.$$

Тогда G изоморфна $U_3(Q)$ или $L_3(Q)$ для некоторого локально конечного поля Q.

§ 1. Предварительные результаты

Пусть $GF(q)$ — конечное поле порядка q, $SL_3(q) = SL_3^+(q)$ — группа матриц размерности 3, определители которых равны единице, $SU_3(q) = SL_3^-(q)$ — группа унитарных матриц размерности 3 над полем $GF(q^2)$, т. е. подгруппа группы $SL_3(q^2)$, состоящая из матриц m, для которых $m\overline{m}^T$ — единичная матрица, где T означает транспонирование, а $\overline{m}$ получается из m заменой каждого её элемента m_{ij} на m_{ij}^q.

Обозначим через φ естественный гомоморфизм $SL_3(q^2)$ на $PSL_3(q^2)$ (с ядром, состоящим из скалярных матриц), так же будем обозначать и ограничение φ на $SL_3(q)$ и $SU_3(q)$.

Таким образом,

$$SL_3(q)^\varphi = PSL_3(q) = L_3(q) = L_3^+(q),$$
$$SU_3(q)^\varphi = PSU_3(q) = U_3(q) = L_3^-(q).$$

Далее, пусть q нечётно.

Положим

$$i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^\varphi, \qquad j = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^\varphi,$$
$$b = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\varphi, \qquad w = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\varphi.$$

Очевидно, $i, j, b, w \in L_3^\varepsilon(q)$, где $\varepsilon \in \{+, -\}$. Определим

$$A = \langle i, j\rangle, \quad B = \langle w, j\rangle, \quad V = \langle b, w\rangle.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Пусть $L = L_3^\varepsilon(q)$, где q нечётно, i, j, b, w, A, B, V — элементы и подгруппы L, определённые выше. Тогда*

(1) *A и B — четверные группы, т. е. элементарные абелевы подгруппы порядка 4, AB — группа диэдра порядка 8, порядок b равен 3, V изоморфна симметрической группе степени 3;*

(2) *$D = C_L(A)$ — прямое произведение циклической группы порядка $q - \varepsilon 1$ и циклической группы порядка $(q - \varepsilon 1)/(3, q - \varepsilon 1)$,*

$$N_L(A) = N_L(D) = D \leftthreetimes V;$$

(3) *порядок любого элемента из $N_L(A)$, индуцирующего при сопряжении автоморфизм порядка* 3 *подгруппы A, равен* 3;

(4) *все инволюции из L сопряжены в L, любая четверная подгруппа из L сопряжена с A, в L существует элемент порядка* 8, *и любая абелева секция силовской* 2*-подгруппы из L порождается тремя элементами*;

(5) *существует $v \in L$, для которого $j^v = j$, $i^v = w$*;

(6) *если $(q, \varepsilon) \notin \{(3,+),(5,-)\}$, то для любой четверной подгруппы $C \neq A$ из $N_L(A)$ выполняется $L = \langle N_L(A), C_L(C)\rangle$; если $(q,\varepsilon) = (3,+)$, то $L = \langle N_L(A), N_L(C)\rangle$; если $(q,\varepsilon) = (5,-)$, то $\langle N_L(A), N_L(C)\rangle \simeq A_7$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункты (1)–(3) проверяются непосредственными вычислениями (см., напр., [1]), п. (4) доказан в [3].

(5) По п. (4) существует такой $v_1 \in L$, что $A^{v_1} = B$. По п. (2), V^{v_1} индуцирует в B при сопряжении полную группу автоморфизмов B, которая действует дважды транзитивно на множестве инволюций B. Отсюда вытекает требуемое.

(6) Очевидно, что C содержит инволюцию t, не лежащую в $C_L(A)$, и

$$|C_{N_L(A)}(t)| = |C_{C_L(A)}(t)\langle t\rangle| = 2|C_{C_L(A)}(w)|.$$

Непосредственно проверяется, что $|C_{C_L(A)}(w)| = (q-\varepsilon 1)/(3, q-\varepsilon 1)$. Таким образом, $|C_{N_L(A)}(C)| \leqslant 2(q-\varepsilon 1)/(3, q-\varepsilon 1)$. Поскольку A и C сопряжены в L, то $|C_L(C)| = (q-\varepsilon 1)^2/(3, q-\varepsilon 1)$, откуда $C_L(C) \not\leq N_L(A)$, за исключением случая $q = 3$, $\varepsilon = +$. $N_L(A)$ не максимальна в L, только если $L \simeq U_3(5)$, [4, с. 378, 379]. Поэтому остаётся рассмотреть только случаи, когда $(q, \varepsilon) \in \{(3,+),(5,-)\}$. Для них п. (6) легко проверить с помощью [5]. Предложение доказано.

Для группы G и множества групп $\mathfrak{L}$ обозначим через $\mathfrak{L}(1)$ множество подгрупп группы G, изоморфных элементам $\mathfrak{L}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — непустые множества конечных групп чётных порядков, G — периодическая группа, насыщенная группами из $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$. Предположим, что выполнены следующие условия*:

(1) *если $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{B}$, S_A, S_B — силовские* 2*-подгруппы из A и B*

соответственно, то S_A не изоморфна никакой подгруппе из S_B, а S_B не изоморфна никакой подгруппе из S_A;

(2) $\mathfrak{A}(1) \neq \varnothing \neq \mathfrak{B}(1)$.

Тогда для любого натурального числа t существуют такие $A_t, B_t \leq G$, что $A_t \in \mathfrak{A}(1)$, $B_t \in \mathfrak{B}(1)$ и $|A_t \cap B_t|$ делится на 2^t.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведём индукцией по t. Пусть $A \in \mathfrak{A}(1)$, $B \in \mathfrak{B}(1)$, a — инволюция из A, b — инволюция из B. Тогда $\langle a, b\rangle$ — конечная группа, содержащаяся в некоторой подгруппе C из $(\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B})(1)$. Если $C \in \mathfrak{A}(1)$, то положим $A_1 = C$, $B_1 = B$; если же $C \in \mathfrak{B}(1)$, то положим $A_1 = A$, $B_1 = C$. В любом случае $|A_1 \cap B_1|$ делится на 2, и заключение предложения справедливо для $t = 1$.

Пусть уже найдены $A_m \in \mathfrak{A}(1)$, $B_m \in \mathfrak{B}(1)$, такие что $n = |A_m \cap \cap B_m|$ делится на 2^{t-1}. Если n делится на 2^t, то заключение предложения справедливо для $A_t = A_m$, $B_t = B_m$. Пусть n не делится на 2^t, и S — силовская 2-подгруппа из $A_m \cap B_m$. По условию S не является силовской 2-подгруппой ни в A_m, ни в B_m, поэтому в $N_{A_m}(S)$ существует такой элемент x, что Sx — инволюция в $N(S)/S$, а в $N_{B_m}(S)$ такой y, что Sy — инволюция в $N(S)/S$. Подгруппа $\langle S, x, y\rangle$ конечна, и поэтому содержится в $C \in \mathfrak{A}(1) \cup \cup \mathfrak{B}(1)$. Если $C \in \mathfrak{A}(1)$, то положим $A_t = C$, $B_t = B_m$; а если $C \in \mathfrak{B}(1)$, то положим $A_t = A_m$, $B_t = C$. В любом случае $|A_t \cap B_t|$ делится на 2^t. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3 (В. Д. Мазуров). *Пусть H — собственная нормальная подгруппа группы G. Если $x^3 = 1$ для любого элемента из $G \setminus H$, то H нильпотентна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in G \setminus H$. Тогда $(hx^{-1})^3 = 1$ для любого $h \in H$. Так как

$$(hx^{-1})^3 = hh^x h^{x^2} x^{-3} = hh^x h^{x^2},$$

то x индуцирует в H расщепляющий автоморфизм порядка 3. По лемме 6 [6], доказанной В. Д. Мазуровым, верно требуемое.

§ 2. Доказательство теоремы

Предположим, что теорема неверна. Положим $\mathfrak{A} = \{L_3(q), U_3(q) \mid q \text{ нечётно}\}$, $\mathfrak{B} = \{L_3(2^m), U_3(2^m) \mid m \geqslant 2\}$.

ЛЕММА 1. *G насыщена группами из $\mathfrak{A}$, т. е. $\mathfrak{B}(1) = \varnothing$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. В силу [1] имеем $\mathfrak{A}(1) \neq \varnothing$. Покажем, что выполняются условия предложения 2. Действительно, силовские подгруппы групп из $\mathfrak{A}$ содержат по предложению 1(4) элементы порядка 8, а период силовских 2-подгрупп из $\mathfrak{B}$ равен 4. С другой стороны, группы из $\mathfrak{B}$ содержат элементарные абелевы секции порядка 16, а силовские 2-подгруппы групп из $\mathfrak{A}$ такими секциями не обладают.

По предложению 2 в $\mathfrak{M}(1)$ найдутся подгруппы A и B, где $A \in \mathfrak{A}(1)$, $B \in \mathfrak{B}(1)$, такие что $|A \cap B|$ делится на 2^{12}. Это невозможно, поскольку силовская 2-подгруппа из $A \cap B$, с одной стороны (как подгруппа B), содержит элементарную абелеву секцию порядка 2^4, а с другой стороны, ранг любой элементарной абелевой 2-секции из A не превосходит трёх. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. *Пусть $\mathfrak{A}_0$ — множество групп, изоморфных группам из $\mathfrak{A}(1)$. Тогда $\mathfrak{A}_0$ бесконечно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\mathfrak{A}_0$ конечно, то, по [1], G — конечная группа из $\mathfrak{M}$, что противоречит предположению. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. *Все инволюции в G сопряжены. Все четверные подгруппы в G сопряжены.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если a и b — инволюции из G, то $\langle a, b\rangle$ — конечная подгруппа в $R \in \mathfrak{M}(1)$ и a, b сопряжены в R по предложению 1(4). Если K_1, K_2 — четверные подгруппы из G, то по уже доказанному найдётся $g \in G$, для которого $K_1 \cap K_2^g \neq 1$. Тогда $\langle K_1, K_2^g\rangle$ — конечная подгруппа, и снова требуемое вытекает из предложения 1(4). Лемма доказана.

По лемме 2 в $\mathfrak{A}(1)$ найдётся группа L_0, изоморфная $U_3(q)$, где $q > 5$ и нечётно, или $L_3(q)$, где $q > 3$ и нечётно. Отождествим L_0 с L из предложения 1 и будем использовать обозначения этого предложения. Пусть $N = N_G(A)$, $C_A = C_G(A)$, $C_B = C_G(B)$.

ЛЕММА 4. *$N = C_A \cdot V$ и C_A — абелева группа ранга 2. В частности, N счётна и локально конечна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $d \in C_A$. Тогда $db \in N_G(A)$ и $\langle A, db\rangle$ содержится в конечной подгруппе L_1 из $\mathfrak{M}(1)$. Произведение db индуцирует в A при сопряжении автоморфизм порядка 3, и по предложению 1(3), применённому к L_1 вместо L, имеет место $(db)^3 = 1$. По предложению 3, C_A нильпотентна и поэтому локально конечна. Если теперь $d_1, d_2 \in C_A$, то $K = \langle A, d_1, d_2\rangle$ содержится в $C_R(A)$ для некоторой подгруппы $R \in \mathfrak{M}(1)$. По предложению 1(2), K абелева ранга не выше двух. Поэтому C_A абелева группа ранга не выше двух и счётна. Так как N — конечное расширение C_A, то N локально конечна и счётна. Лемма доказана.

По лемме 4, N счётна, т. е. $N = \{n_1, n_2, n_3, \dots\}$. Построим теперь две последовательности подгрупп

$$N_0, N_1, N_2, \dots; \quad L_0, L_1, \dots$$

по следующим правилам. Пусть $L_0 = L$, $N_0 = N \cap L_0 = N_{L_0}(A)$. Если $N_0 = N$, то на этом процесс построения заканчивается. В противном случае полагаем, что L_1 — подгруппа из $\mathfrak{A}(1)$, содержащая N_0 и первый по номеру элемент n_i, не содержащийся в N_0. Пусть $N_1 = N \cap L_1 = N_{L_1}(A)$. Если $N_1 = N$, то процесс заканчивается. В противном случае выберем в $\mathfrak{A}(1)$ подгруппу L_2, содержащую N_1 и первый по номеру элемент из N, не содержащийся в N_1. Полагаем $N_2 = N \cap L_2 = N_{L_2}(A)$. В результате очевидного продолжения этого процесса возникает совокупность $L_0, L_1, L_2, \dots$ подгрупп из $\mathfrak{A}(1)$, для которой объединение последовательности

$$N_0 < N_1 < N_2 < \dots,$$

где $N_l = N \cap L_l$, совпадает с N.

ЛЕММА 5. *Имеет место $L_{l-1} \leq L_l$ для любого $l = 1, 2, \dots$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предложению 1, $V, A, B \leq N_0 \leq N_0 \cap L_1$. Пусть $v \in L_0$, $j^v = j$, $i^v = w$, и $v_1 \in L_1$, $j^{v_1} = j$, $i^{v_1} = w$. Тогда $c = v_1 v^{-1} \in C$, т. е. $v_1 = cv$. Так как C_A абелева, $L_1 \geq C_{L_1}(A)^{v_1} = C_{L_1}(A)^{cv} = C_{L_1}(A)^v = C_{N_1}(A)^v \geq C_N(A)^v = C_{L_0}(A)^v = C_{L_0}(A^v) = C_{L_0}(B)$. Таким образом, $C_{L_0}(B) \leq L_1$, и по предложению 1 верно

$$L_0 = \langle N_0, C_{L_0}(B)\rangle \leq \langle N_1, L_1\rangle = L_1.$$

Если уже показано, что $L_{l-1} \geq L_0$ и $N_{l-1} \neq N_l$, то те же самые рассуждения показывают, что $L_{l-1} = \langle N_{l-1}, C_{L_{l-1}}(B)\rangle \leq \langle N_l, L_l\rangle = L_l$. Лемма доказана.

Объединение X возрастающей цепочки $L_0, L_1, \ldots$ является локально конечной группой, которая по [7] будет группой лиева типа над некоторым локально конечным полем Q. Ясно, что $X \simeq U_3(Q)$ или $L_3(Q)$. Кроме того, $N \leq X$.

ЛЕММА 6. *Если T — подгруппа диэдра порядка 8 из X, то $N_G(T) \leq$ $\leq X$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что $T \geq A$, и поэтому $T \leq N$. Следовательно, $T \leq N_l \leq L_l$ для некоторого l. Если C — вторая четверная подгруппа из T, то в L_l есть элемент v, переводящий A в C. Если теперь $x \in N(T)$, то либо $A^x = A$ и $x \in N(A) \leq N \leq X$, либо $A^x = C$ и $x = nv$, где $n \in N(A)$. В любом случае $x \in X$. Лемма доказана.

ЛЕММА 7. *Имеет место $X = G$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Если все инволюции из G лежат в X, то $X \trianglelefteq G$ и $G = XN_G(A) \leq X$. Поэтому существуют инволюция $g \in G \setminus X$ и конечная подгруппа, содержащая $\langle j, g\rangle$ и не лежащая в X. Таким образом, существует подгруппа $M \in \mathfrak{A}(1)$, не лежащая в X и содержащая j. Покажем, что M можно выбрать так, чтобы $M \cap X$ содержала четверную подгруппу. В противном случае $i \notin M$, и в $C_M(j) \setminus X$ найдётся инволюция $m \notin X$. Теперь можно заменить M на подгруппу $M_1 \in \mathfrak{A}(1)$, содержащую $\langle i, j, m\rangle$. Не нарушая общности, можно считать, что M содержит A. По предложению 1, $N_M(A)$ содержит четверную подгруппу C, отличную от A, и $A^x = C$ для некоторого $x \in M$. С другой стороны, $C \leq N \leq X$, поэтому найдётся $y \in X$, для которого $A^y = C$, т. е. $x = ny$, где $n \in N$. Следовательно, $x \in X$.

Таким образом, $S = \langle N_M(A), N_M(C)\rangle \leq X$. Поскольку $S \neq M$ и по предложению 1(6), $M \simeq U_3(5)$ и $S \simeq A_7$ — максимальная подгруппа в M.

Теперь силовская 2-подгруппа T из S является группой диэдра порядка 8. По лемме 6 её нормализатор $R = N_M(T)$ в M содержится в X, но не содержится в S. Поэтому $M = \langle R, S\rangle \leq X$; противоречие. Лемма и теорема доказаны.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Д. В. Лыткина, Л. Р. Тухватуллина, К. А. Филиппов*, О периодических группах, насыщенных конечным множеством конечных простых групп, Сиб. матем. ж., **49**, № 2 (2008), 395—400.
2. *Д. В. Лыткина*, О группах, насыщенных конечными простыми группами, Алгебра и логика, **48**, № 5 (2009), 628—653.
3. *J. L. Alperin, R. Brauer, D. Gorenstein*, Finite groups with quasi-dihedral and wreathed Sylow 2-subgroups, Trans. Am. Math. Soc., **151**, No. 1 (1970), 1—261.
4. *J. N. Bray, D. F. Holt, C. M. Roney-Dougal*, The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups (London Math. Soc. Lecture Note Ser., **407**), Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2013.
5. *J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker, R. A. Wilson*, Atlas of finite groups, Oxford, Clarendon Press, 1985.
6. *А. Х. Журтов*, О регулярных автоморфизмах порядка 3 и парах Фробениуса, Сиб. матем. ж., **41**, № 2 (2000), 329—338.
7. *А. В. Боровик*, Вложения конечных групп Шевалле и периодические линейные группы, Сиб. матем. ж., **24**, № 6 (1983), 26—35.

Поступило 11 июля 2016 г.

Адреса авторов:

ЛЫТКИНА Дарья Викторовна,

Сибирский гос. ун-т телекоммун. информ., ул. Кирова, 86, г. Новосибирск, 630102,

Новосибирский гос. ун-т, ул. Пирогова, 2, г. Новосибирск, 630090,

РОССИЯ.

e-mail: daria.lytkin@gmail.com

ШЛЁПКИН Алексей Анатольевич, Сибирский федерал. ун-т, Свободный пр., 79, г. Красноярск, 660041, РОССИЯ. e-mail: shlyopkin@mail.ru.