

ПРИМЕНЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Математические методы являются важнейшим инструментом анализа экономических явлений и процессов, построения теоретических моделей, позволяющих отобразить существующие связи в экономической жизни, прогнозировать поведение экономических субъектов и экономическую динамику. Математическое моделирование становится языком современной экономической теории, одинаково понятным для учёных всех стран мира.

В свою очередь, математическая модель — это приближенное описание какого-либо явления или объекта реального мира на языке математики. Основная цель моделирования — исследовать эти объекты и предсказать результаты будущих наблюдений, но это еще и метод познания окружающего мира, дающий возможность управлять им. Следовательно, экономический процесс будет описан с помощью математического языка.

- Начнем исследование в экономике с применения линейной алгебры. Наиболее точно данная тема развернута в теоретической модели Василия Леонтьева. Это один из выдающихся экономистов, разработчик системы межотраслевых балансов «затраты – выпуск», используемых в практике моделирования национальной и мировой экономик. Родился в Петербурге, учился в Петроградском университете, работал в Китае, Германии. Теоретическая модель «затраты – выпуск» послужила основой для построения многоотраслевой модели экономики США.

Разработка динамических моделей межотраслевого баланса использовалась для анализа последствий различных вариантов экономической политики. Правительство Рузвельта привлекло В. Леонтьева к разработке системы балансовых взаимосвязей, что, в частности, позволило достаточно четко регулировать массовое производство вооружений в годы Второй мировой войны.

Межотраслевой баланс (МОБ, метод «затраты-выпуск») — экономико-математическая балансовая модель, характеризующая межотраслевые производственные взаимосвязи в экономике страны. Характеризует связи между выпуском продукции в одной отрасли и затратами, расходом продукции всех участвующих отраслей, необходимым для обеспечения этого выпуска. Межотраслевой баланс составляется в денежной и натуральной формах.

Межотраслевой баланс представлен в виде системы линейных уравнений. Он представляет собой таблицу, в которой отражен процесс формирования и использования совокупного общественного продукта в отраслевом разрезе. Таблица показывает структуру затрат на производство каждого продукта и структуру его распределения в экономике. По столбцам отражается стоимостный состав выпуска, по строкам отражаются направления использования ресурсов каждой отрасли.

В качестве примера на экономической почве рассмотрим задачу:

Пусть экономика страны насчитывает n отраслей промышленности, каждая из которых производит свою продукцию. Часть продукции идёт на внутривыпускное потребление данной отраслью и другими отраслями, а другая часть предназначена для целей конечного (вне сферы материального производства) личного и общественного потребления.

Рассмотрим процесс производства за некоторый период времени

(например, год). Введём следующие обозначения:

x_i общий (валовой) объём продукции i -й отрасли;

a_{ij} коэффициенты прямых затрат, показывающие затраты продукции

i -й отрасли на производство единицы продукции j -й отрасли;

y_i объём конечного продукта i -й отрасли для непроеизводственного потребления.

Так как валовой объём продукции i -й отрасли равен суммарному объёму её продукции, потребляемой всеми отраслями, и конечного продукта, то

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} * x_j + y_i, (i=1,2,\dots,n)$$

Это уравнение называется соотношениями баланса и задают модель многоотраслевой экономики.

Основная задача межотраслевого баланса состоит в отыскании такого валового объёма продукции для каждой из отраслей, который при известных прямых затратах обеспечивает заданный конечный продукт. Для её решения достаточно решить систему линейных алгебраических уравнений.

- Аналитическая геометрия довольно распространена при решении и визуализации экономических задач на производстве.

Математическое моделирование экономических процессов – это система математических выражений, включающая переменные величины и параметры. Параметры – это количественные связи между экономическими величинами, а переменные – это значения, которых должны быть найдены в результате анализа системы уравнений. Система уравнений образует математическую модель экономического процесса. Такие модели делятся на статические и динамические. В статических моделях все экономические показатели привязываются к определенному моменту времени и не рассматривается связь между показателями разных периодов развития экономического объекта. В динамических моделях развитие экономического процесса рассматривается во времени и определяется временная взаимосвязь экономических показателей. Математическое решение задачи оптимального функционирования экономического объекта означает нахождение критерия оптимальности деятельности экономического объекта.

Рассмотрим пример, показывающий, как вычислить наиболее экономичное расстояние для перевозок.

Издержки перевозки двумя транспортными средствами выражаются функциями $y = 20x + 100$ и $y = 25x + 70$, где x — это дальность перевозки в сотнях километров, а y — транспортные расходы в денежных единицах. Определить, начиная с какого расстояния более экономичным становится первое транспортное средство.

Для нахождения требуемого расстояния приравняем транспортные расходы:

$$20x + 100 = 25x + 70, 5x = 30, x = 6.$$

Итак, при перевозке на $x=6$ сотен километров транспортные расходы

совпадают и составляют $y = 20 \cdot 6 + 100 = 220$ денежных единиц. Поэтому, начиная с 600км, более экономичным становится первый вид транспорта. Это видно на рисунке 1.

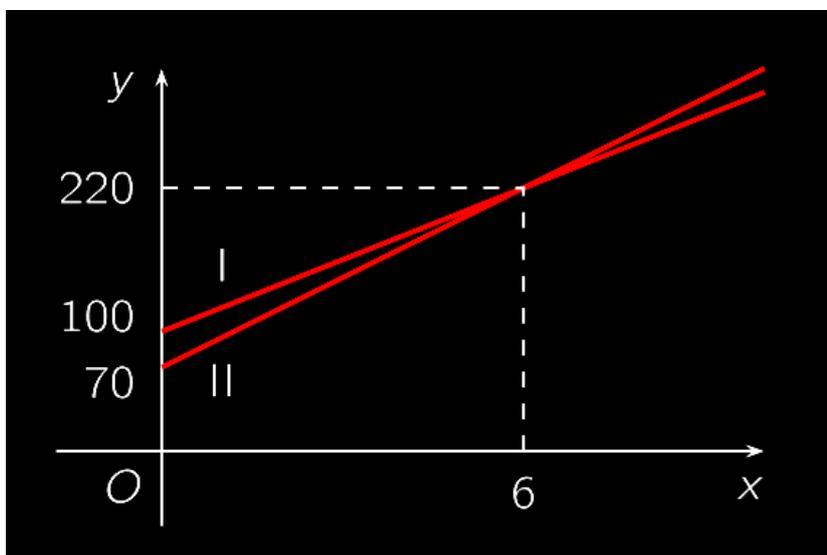


Рисунок 1

Рассмотрим вторую задачу, чтобы выяснить разницу между выручкой и издержками. Точка безубыточности - это такой объём производства, начиная с которого выручка покрывает издержки.

Мебельная фабрика продаёт каждый изготовленный стул по 64 тыс. руб. При этом издержки составляют 635 тыс. руб. за 8 стульев и 750 тыс. руб. за 13 стульев. Найдите точку безубыточности, если функция издержек линейная.

Построим функцию издержек $C(x)$ как прямую, проходящую через точки $M_1(8, 635)$ и $M_2(13, 750)$.

$$\frac{C(x)-635}{750-635} = \frac{x-8}{13-8}, \quad \frac{C(x)-635}{115} = \frac{x-8}{5}, \quad \frac{C(x)-635}{23} = \frac{x-8}{1},$$

$$C(x)-635=23(x-8), \quad C(x)=23x-184+635=23x+451.$$

Функция выручки по условию имеет вид $R(x) = 64x$. Находим точку безубыточности как абсциссу точки пересечения линий издержек и выручки, как на рисунке 2. ($23x+451=64x$, $41x=451$, $x=11$.)

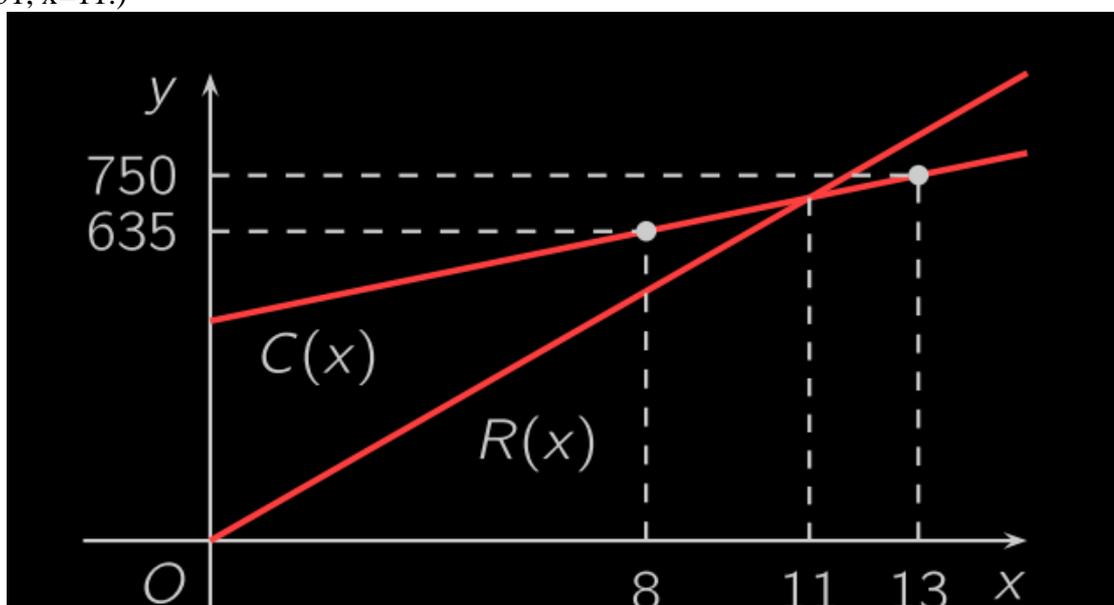


Рисунок 2

Вывод: экономико-математическое моделирование является особой наукой, предназначенной не только для экономистов и математиков. Моделирование — это, прежде всего, умение формулировать и решать проблемы, касающиеся каждого человека. Необходимо оценить роль математических методов в экономических исследованиях - они полно описывают все возможные решения и предсказывают наилучшее. Например, нахождение точки безубыточности.

Что касается модели «затраты-выпуск», она представляет собой метод систематического количественного отражения экономических связей между секторами хозяйственной системы. Ее используют для анализа как мировой, так и национальной экономики, а также для анализа хозяйства столицы или отдельного предприятия. Простая система алгебраических уравнений служит основой для государственной экономики страны.