

## РЕАЛИЗАЦИЯ ЧИСЛЕННОЙ МЕТОДИКИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КОНВЕКТИВНОГО ПЕРЕНОСА

Пряжников М. И.

научный руководитель канд. физ. - мат. наук Минаков А. В.

*Сибирский федеральный университет*

Наибольшую популярность и распространение для решения задач гидродинамики получил *Volume of fluid (VOF)* метод, который на сегодняшний день применяется в качестве алгоритма решения задач со свободной поверхностью в таких известных *CFD* пакетах как *FLUENT*, *Star-CD*, *CFX*, и других.

Основным недостатком и трудностью большинства методов непрерывных маркеров (в том числе и *VOF* метод) является искусственное размытие границы раздела сред, связанное с численной диффузией, возникающей при решении уравнения переноса функции маркера (объемной доли жидкости в ячейке).

Точность *VOF* метода существенно зависит от качества решения эйлера уравнения переноса. Поэтому, вопросу выбора метода решения конвективного уравнения переноса и его тестированию в данной работе было уделено большое внимание.

Метод был предложен Хиртом и Нихолсом [1]. Метод основывается на использовании специальной функции маркера  $C(x, y, z, t)$ , которая характеризует объемную долю жидкости в ячейке. Величина  $C$  задается следующим образом:

$$C(x, y, z, t) = \begin{cases} 1, & \text{если ячейка полностью заполнена жидкостью} \\ 0, & \text{если ячейка пустая} \end{cases}$$

И  $0 \leq C(x, y, z, t) \leq 1$  - если через ячейку проходит граница раздела фаз.

Отслеживание свободной поверхности осуществляется путем решения переноса объемной доли жидкости в ячейке:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla(V \cdot C) = 0 \quad (1)$$

Для решения уравнения переноса (1) в работе используется широко известный метод контрольного объема. Суть метода заключается в разбиении расчетной области на контрольные объемы и интегрировании по каждому контрольному объему для получения конечно-разностных соотношений. После такой дискретизации уравнение (1) переписется в виде:

$$\frac{\partial C_{i,j,k}}{\partial t} J + I_R - I_L + I_D - I_F + I_T - I_B = 0 \quad (2)$$

где  $J$  - объем контрольного объема;

$I$  - конвективный поток;

$i, j, k$  - индексы.

Задача нахождения конвективного потока  $I$  сводится к отысканию значений искомой функции  $C$  на гранях контрольного объема  $C_R$  по известным значениям ее в узлах сетки. Выбор способа интерполяции величины  $C$  между узлами расчетной сетки определяет свойства полученной при этом разностной схемы. В данной работе были рассмотрены следующие схемы аппроксимации.

**Противопоточные схемы:** схема первого порядка (*UDS*), линейная схема второго порядка (*LUDS*)[2], квадратичная схема (*QUICK*)[3], схема третьего порядка (*CHEN*)[4], схема третьего порядка (*KWMR*)[5].

**Противопоточные схемы с ограничением потока.** После публикации Колгана [6] в 1972 начало интенсивно развиваться новое поколение схем аппроксимации конвективного потока, которые в последствии получили названия *TVD* - схемы (*Total Variation Diminishing*). Несмотря на то, что *TVD* - схемы разрабатывались, прежде всего, для разрывных решений газовой динамики, они получили широкое распространение и в области численного моделирования гладких решений задач несжимаемой жидкости. При этом основным положительным свойством этих схем является монотонность получаемого решения. Ниже приведены схемы используемые в работе, которые можно найти в следующих работах [7], [8], [9], [10]: *MINMOD*, *UMIST*, *Superbee*, *Van Leer*, *Van Albada*, *MUSCL*, *SMART*.

Дискретизация уравнения переноса по времени осуществлялась при помощи локально-одномерного расщепление пространственного оператора. Теория локально-одномерных схем изложена в работах А.А Самарского [11].

Тестирование методов проводилось на 3 двумерных конвективных задачах.

**Задача о конвективном переносе квадрата.** Начальное распределение и решение разными схемами представлено на рисунке 1. Функция  $C$  в квадрате равна 1, а вне – 0. Квадрат переносится потоком вверх по диагонали расчетного поля, скорость потока  $V=1.41\text{м/с}$ . Точным решением будет смещение квадрата по диагонали на расстояние, пропорциональное времени расчета. Размер расчетной области  $1\text{м}\times 1\text{м}$ , сторона квадрата  $a=0.15\text{м}$ . Для расчета использовалась равномерная ортогональная сетка, состоящая из  $100\times 100$  узлов. Время переноса  $T=0.55\text{с}$ . Число *CFL* для *TVD* схем задавалось равным 0.7, для конечно-разностных схем 0.15.

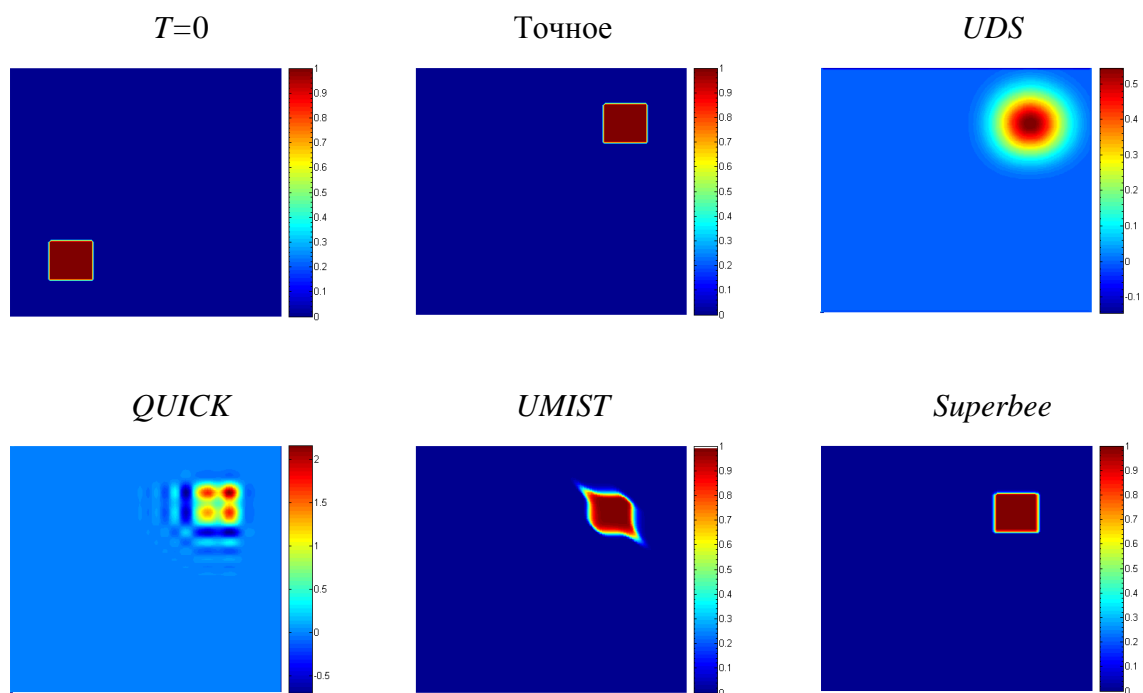


Рисунок 1 - Задача о переносе квадрата

**Задача о конвективном переносе кольца.** В рассматриваемой задаче, осуществляется перенос начального распределения (рисунок 2) в форме кольца, внутренний радиус 0.1, внешний радиус 0.2. Объемная доля жидкости в ячейках  $C$  внутри кольца равна 1, а вне – 0. Смещение происходит также, что и в предыдущей задаче. В момент времени  $T=0$  центр кольца расположен в точке с координатами  $x=0.25\text{м}$ ,  $y=0.25\text{м}$ . Для расчета этой задачи использовалась равномерная ортогональная

сетка, состоящая из  $100 \times 100$  узлов. Так как форма распределения ограничена криволинейными линиями, то их перенос на равномерной декартовой сетке представляет дополнительную трудность. В этом состоит основное отличие данной задачи от предыдущей. Расчетное время  $T=0.5$ с. Число  $CFL$  для  $TVD$  схем задавалось равным 0.7 (для  $MUSCL$  0.5,  $UMIST$  0.3), для конечно-разностных схем 0.15.

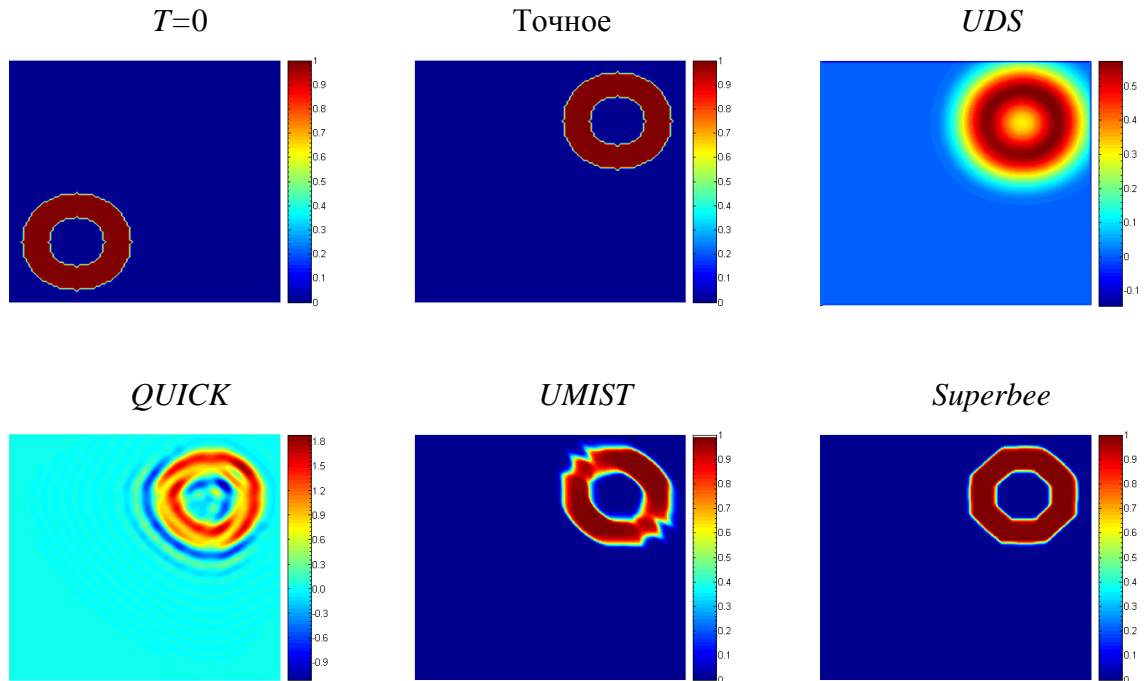
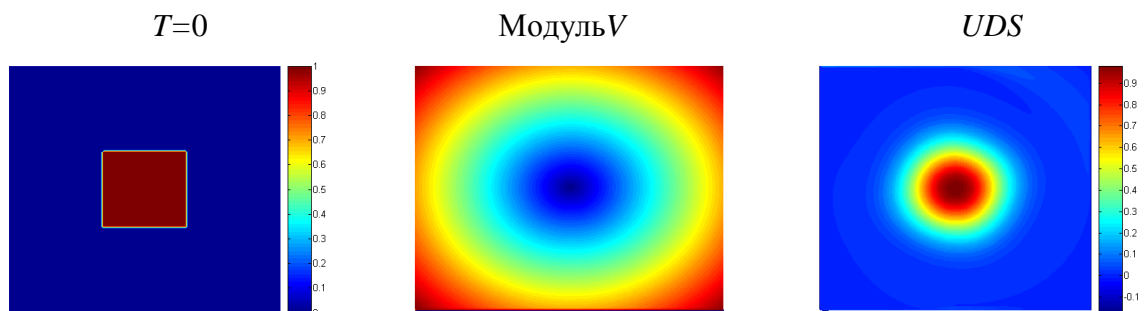


Рисунок 2 – Задача о переносе кольца

**Задача о вращении квадрата.** Начального распределения для данной задачи, поле скоростей задается формулой  $V=[\omega \times r]$ , так что квадрат вращается вокруг своей оси с частотой  $\omega$ , решение различными схемами отображено на рисунке 3. Существенное отличие данного теста от двух предыдущих заключается в том, что поле скоростей является неоднородным, что создает дополнительные трудности для численного алгоритма. Для расчета использовалась равномерная ортогональная сетка, состоящая из  $100 \times 100$  узлов. Функция  $S$  внутри квадрата равна 1, а вне – 0. В момент времени  $T=0$  центр квадрата расположен в центре расчетного поля. Расчетное время  $T=4.2$ с, за это время квадрат совершит 1.34 оборота. Число  $CFL$  для  $TVD$  схем задавалось равным 0.7 (для  $MUSCL$  0.5,  $UMIST$  0.3), для конечно-разностных схем 0.2.



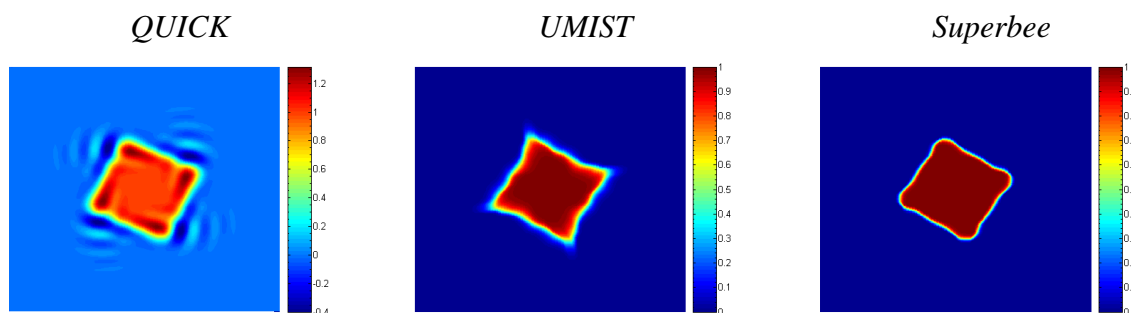


Рисунок 3 – Задача о переносе кольца

Реализована численная методика решения уравнения конвективного переноса, также проведена её верификация.

По результатам тестовых расчетов лучшим для решения конвективного уравнения переноса является численный алгоритм, основанный на TVD схеме Superbee с использованием локально-одномерного расщепления. Этот алгоритм сочетает в себе высокую разрешающую способность граничных разрывов, прост в реализации и эффективен по применению метода решения конвективного уравнения переноса.

### Список литературы

- 1 Hirt, C.W. Volume of fluid (VOF). Method for the dynamics of free boundaries. / C.W. Hirt, B.D. Nichols // Journal of computational physics. 1981. №39. P.-201-226.
- 2 Быстров, Ю.А. Численное моделирование вихревой интенсификации теплообмена в пакетах труб. / Ю.А. Быстров, С.А. Исаев, Н.А. Кудрявцев, А.И. Леонтьев // М. Судостроение. 2005. С.-389.
- 3 Leonard, B.P. A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic interpolation. / B.P. Leonard // Comp. methods appl. mech. 1979. Vol. 19. P.-59-98.
- 4 Chen; Y.S. Viscous flow computations using a second-order upwind differencing scheme. / Y.S. Chen // USRA/NASA. Marshall space flight center Huntsville. Alabama.
- 5 Kawamura, T. 1984 Computation of high Reynolds number flow around a circular cylinder with surface roughness. / T. Kawamura, K. Kuwahara // AIAA. Paper 84-0340.
- 6 Колган, В.П. Применение принципа минимальных значений производной к построению конечноразностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики / В.П. Колган // Ученые записки. ЦАГИ. 1972. Т.3. № 6. С.-68-77.
- 7 Ferziger, J.H. Computational methods for fluid dynamics. / J.H. Ferziger, M. Peric // Berlin: Springer verlag. 2002. P.-431.
- 8 Darwish, M.S. A Comparison of six high resolution schemes formulated using the NVF methodology. / M.S. Darwish // 33rd Science week, alleppo, Syria. 1993.
- 9 Leonard, B.P. The ULTIMATE conservative difference scheme applied to unsteady one-dimensional advection. / B.P. Leonard // Comp. methods applied mech. eng. 1991. Vol. 88. P.-17-74.
- 10 Moukalled, F. A new bounded-skew central difference scheme- part i: formulation and testing. / F.A. Moukalled, M.S. Darwish // Num. heat transfer, part b: fundamentals. 1996. Vol. 31. P.-91-110.
- 11 Самарский, А.А. Введение в теорию разностных схем. / А.А. Самарский // М. Наука. 1971.