

## АННОТАЦИЯ

В работе рассматриваются вырожденные амёбы комплексных прямых в  $\mathbb{C}^3$ , то есть те, контур которых не пуст. Исследованы геометрические характеристики таких амёб – площадь и кривизна. Получено представление для полной кривизны в виде одномерного интеграла.

Ключевые слова: комплексная прямая, амёба, полная кривизна.

## ABSTRACT

In the thesis we consider degenerate amoebas of complex lines in  $\mathbb{C}^3$ , that is with non empty contour. We study geometrical characteristics of such amoebas such as area and total curvature and obtain a representation for the latter in the form of one-dimensional integral.

Keywords: complex line, amoeba, total curvature.

# СОДЕРЖАНИЕ

Введение . . . . .	3
1 Амёбы комплексных прямых в $\mathbb{C}^3$ . . . . .	5
1.1 Параметризация прямой . . . . .	5
1.2 Контур амёбы . . . . .	6
1.3 Свойства параметризации $\mathcal{A}_L$ . . . . .	9
2 Площадь и полная кривизна вырожденных амёб . . . . .	10
2.1 Площадь вырожденной амёбы . . . . .	13
2.2 Полная кривизна вырожденной амёбы . . . . .	14
Заключение . . . . .	18
Список использованных источников . . . . .	20

# ВВЕДЕНИЕ

Одним из методов исследования алгебраических множеств является изучение их амёб, то есть их изображений при логарифмической проекции. Как любая проекция, такое изображение не полностью передает свойства исходного множества, но амёбы алгебраических гиперповерхностей достаточно точно отражает их структуру.

Пусть  $V$  — алгебраическое множество в  $(\mathbb{C}^\times)^n = (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$ .

**Определение 1** ([4]). Амёбой  $\mathcal{A}_V$  алгебраического множества  $V$  называется его образ относительно отображения  $\text{Log} : (\mathbb{C}^\times)^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , действующего по формуле:

$$\text{Log} : (z_1, \dots, z_n) \rightarrow (\log |z_1|, \dots, \log |z_n|).$$

Основание логарифма в определении отображения можно выбирать любым, амёбы тогда различаются только растяжением, одинаковым во всех направлениях. Обычно для вычислений выбирается натуральный логарифм.

К настоящему времени наиболее изучены структура и свойства амёб алгебраических гиперповерхностей и кривых в  $\mathbb{C}^2$ .

Пусть  $V$  — алгебраическая кривая в  $\mathbb{C}^2$ , заданная уравнением

$$P(z, w) = 0,$$

где

$$P(z, w) = \sum_{(m,n) \in A \subset \mathbb{Z}^2} c_{mn} z^m w^n$$

многочлен. Множество  $A$  можно считать конечным.

**Определение 2.** Выпуклая оболочка  $N_P$  множества  $A$  называется многогранником Ньютона многочлена  $P$ .

Амёба  $\mathcal{A}_V$  кривой  $V$  — замкнутое подмножество  $\mathbb{R}^2$ . Известно, что пло-

щадь  $\mathcal{A}_V$  конечна, более того, верно неравенство [9]

$$Area(\mathcal{A}_V) \leq \pi^2 Area(N_P).$$

Это неравенство точное, в том смысле, что верхняя оценка достигается [5]. А именно, неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда  $P(z, w)$  — так называемый гарнаковский многочлен (см. [10]).

Интересно отметить, что похожее неравенство возникает [11] при исследовании амёбы вещественной части кривой  $V$ , а именно

$$k \leq 2\pi Area(N_P),$$

где  $k$  — полная кривизна  $\text{Log}(\text{Re}V)$ . Кроме того, это неравенство так же переходит в равенство тогда и только тогда, когда  $P(z, w)$  — гарнаковский многочлен.

Случай поверхностей более высокой коразмерности оказался гораздо сложнее. Известны отдельные результаты о  $k$ -выпуклости дополнения [1], свойствах амёб поверхностей половинной размерности и меньше, например [7],[8], [6]. Простейшим примером поверхности коразмерности больше 1 являются комплексные прямые в  $\mathbb{C}^3$ : с одной стороны они являются кривыми, с другой — их коразмерность равна 2.

Цель настоящей работы — исследовать геометрические характеристики амёб комплексных прямых в  $\mathbb{C}^3$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получены следующие результаты:

1. уточнено условие, при котором амёба комплексной прямой в  $\mathbb{C}^3$  вырождена;
2. получено представление полной кривизны вырожденной амёбы прямой в виде одномерного интеграла.

Полученные результаты имеют теоретическое значение и могут быть использованы при дальнейшем изучении амёб алгебраических множеств высокой коразмерности.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Бушуева, Н.А. Об амебах алгебраических множеств высших коразмерностей / Н. А. Бушуева, А. К. Цих. // Труды Математического института им В.А. Стеклова РАН. — 2012. — №279. — С. 59–71.
- 2 Кузвесов, К.В. Амёбы комплексных плоскостей и разностные уравнения, дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.01 / Кузвесов Константин Валерьевич. — Красноярск, 2007. — 27 с.
- 3 Позняк, Э.Г. Дифференциальная геометрия: первое знакомство: науч. изд. / Э.Г. Позняк, Е.В. Шишкин. Москва: МГУ, 1990. — 117 с.
- 4 Gelfand, I. Resultants, and Multidimensional Determinants (что это) / I. Gelfand, М. Капранов, А. Зелевинский. — Boston: Birkhäuser, 1994. — 194 p.
- 5 Mikhalkin, G. Amoebas of maximal area / G. Mikhalkin, Н. Rullgård // International Mathematics Research Notices. — 2001. — №9. — P. 441–451.
- 6 Mikhalkin, G. Amoebas of half-dimensional varieties [Electronic resource]: article / G. Mikhalkin // Cornell University Library. — 2015. — Access mode: <https://arxiv.org/abs/1412.4658>.
- 7 Nisse, M. On the volume of complex amoebas / M. Nisse, F. Madani // Proceedings of the AMS. — 2013. — №141. — P. 1113–1123.
- 8 Nisse, M. Analytic varieties with finite volume amoebas are algebraic / M. Nisse, F. Madani // J. reine angew. Math. Volume 706. — 2015. — №706. — P. 67–81.
- 9 Passare, M. Amoebas, Monge-Ampere measures, and triangulations of the Newton polytope / M. Passare, Н. Rullgård // Duke Mathematical Journal. Volume 121. — 2004. — №3. — P. 481–507.

- 10 Passare, M. The trigonometry of Harnack curves / M.Passare// Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. —2016. — №9:3.— С. 347–352 .
- 11 Passare, M. On the curvature of the real amoeba / M.Passare, J.-J. Risler // Proceedings of 17th Gökova Geometry-Topology Conference — 2011. — P. 129 – 134.
- 12 Passare, M. Amoebas: their spines and contours / M. Passare, A. Tsikh // Contemporary maths. — 2005. — №377. — P. 275–288.



Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики  
Кафедра теории функций

**УТВЕРЖДАЮ**

Заведующий кафедрой

 / А.К. Цих

« 08 » июня 2017г.

**МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ**  
**ВЫРОЖДЕННЫЕ АМЁБЫ КОМПЛЕКСНЫХ ПРЯМЫХ В  $\mathbb{C}^3$**

**Направление** 01.04.01 Математика

**Магистерская программа** 01.04.01.01 Комплексный анализ

Научный руководитель  
кандидат физико-математических наук  
доцент

 / А.В. Щуплев  
08.06.17

Выпускник

 / А.А. Броско  
08.06.17

Красноярск 2017