СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Исследование функций при дискретном изменении аргумента велось издавна, но в отдельную математическую дисциплину исчисление конечных разностей выделилось только в 18 веке. В этом исчислении оперируют приращениями функций, которые соответствуют конечным приращениям аргумента, и роль дифференциалов играют конечные разности функции. Вычисление конечных разностей аналогично дифференцированию, а интегрированию здесь соответствует суммирование разностей, роль дифференциальных уравнений играют конечно-разностные уравнения.

Начала исчисления конечных разностей содержатся в трудах П.Ферма, И.Барроу, Г.Лейбница. Развивалась конечно-разностная теория параллельно с основными разделами математического анализа. В 18 веке теория конечных разностей приобрела характер самостоятельной математической дисциплины, изложение начал которой принадлежит Б.Тейлору (1717г.), но подлинным основателем следует все же считать Д.Стирлинга (1730г.). Первое систематическое исследование по теории конечных разностей было написано Л.Эйлером в 1755 году, в нем впервые использовалось обозначение Δ для разностного оператора.

Сумму степеней последовательных натуральных чисел вычислил еще Я.Бернулли [14], его исследования дали толчок к возникновению целого ряда разделов комбинаторного анализа. В своей работе “Искусство предположений”, изданной в 1713 году, Я.Бернулли привел общее выражение для нахождения этой суммы. Кроме того, он вывел рекуррентное правило, позволяющее вычислять числа Бернулли.

Леонард Эйлер применил числа Бернулли в теории конечных разностей и исследовал их свойства. Некоторые из этих результатов он изложил в своем сочинении “Дифференциальное исчисление”, вышедшем в свет в 1755г. В “Дифференциальное исчисление” им предложено шесть способов нахождения чисел Бернулли.

Числа Бернулли используются в математическом анализе, теории чисел. С их помощью решается и общая задача отыскивания суммы значений функции $\varphi(t)$ в первых n целых неотрицательных точках $t = 1,2,\dots,n$. Это решение дается знаменитой формулой Эйлера – Маклорена. Кроме этого, числа Бернулли нашли широкое применение в различных областях теоретической и прикладной математики. ([1], [6], [12]) Числа Бернулли используются в комбинаторном [9], [2], [3], [4], [8] и численном анализе. Gould заметил, что для многих сумм, содержащих биномиальные коэффициенты, использование чисел Бернулли дает существенное улучшение формул.

В работе рассматриваются числа Бернулли, свойства классических чисел, некоторые обобщения чисел Бернулли.

Первая глава посвящена классическим числам Бернулли, в ней приведены и доказаны их основные свойства.

Определение 1. Числа Бернулли $-$это коэффициенты разложения в степенной ряд функции

$$\frac{t}{e^t-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b_k}{k!}t^k.$$

Числа и многочлены Бернулли появились в связи со следующей задачей суммирования: найти сумму степеней первых n натуральных чисел: $1^s+\ 2^s+\ldots+n^s$.

В параграфе 1.1 для чисел Бернулли рассматриваются два свойства.

Первое состоит в том, что числа Бернулли удовлетворяют рекуррентному соотношению:

$$\sum_{p=0}^{k} b_p C_k^p = b_k\,, \qquad k \geq 2 \tag{1}$$

где $b_0=1,\ C_k^p-$биноминальные коэффициенты.

Используя это соотношение можно последовательно находить числа Бернулли.

Например,

$$b_0=1,\quad b_1=-\frac{1}{2},\quad b_2=\frac{1}{6},\quad b_3=0,\quad b_4=-\frac{1}{30},\quad b_5=0,$$
$$b_6=\tfrac{1}{42},\quad b_7=0,\quad b_8=-\tfrac{1}{30},\quad b_9=0,\quad b_{10}=\tfrac{5}{56}\ ,\ldots.$$

Второе свойство утверждает, что все нечетные числа Бернулли, начиная с третьего, равны нулю:

$$b_{2k+1}=0,\qquad k=1,2,\ldots. \tag{2}$$

В параграфе 1.2 приведены некоторые вспомогательные сведения из теории рядов, которые используются в параграфе 1.3 для отыскания суммы бесконечного ряда из четных отрицательных степеней последовательных натуральных чисел.

В параграфе 1.3 рассматривается формула

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2p}} = \frac{(-1)^{p-1} 2^{2p-1} \pi^{2p}}{(2p)!}\ b_{2p}, \qquad (3)$$

которая позволяет, например, установить еще некоторые свойства чисел Бернулли. А именно, что из формулы (3) следует, что левая часть всегда положительна; значит, положительна также и правая часть. Множители в правой части, которые могут быть отрицательными, следующие $(-1)^{p-1}$ и b_{2p}, значит, их произведение всегда положительно, а это значит, что у неравных нулю четных чисел Бернулли знаки чередуются. Формула (3) также подтверждает, что все четные числа Бернулли отличны от нуля.

Во второй главе рассмотрены некоторые обобщения чисел Бернулли, которые возникают в связи задачей суммирования функций нескольких переменных [13], [18].

Обозначим $a^{\mathrm{j}} = \left(a_1^{\mathrm{j}}, \dots, a_n^{\mathrm{j}}\right) -$ векторы из $\mathbb{R}^n$, где $\mathrm{j} = 1, \dots, s$ и скалярное произведение вектора a^j на вектор $t = (t_1, \dots, t_n)$ запишим следующим образом: $< a^j, t >= a_1^j t_1 + \dots + a_n^j t_n$

Рассмотрим набор функций вида $\mathcal{B}_{\mathrm{j}}(t) = \frac{<a^{\mathrm{j}},t>}{e^{<a^{\mathrm{j}},t>}-1}$, $\mathrm{j} = 1, \dots, s$. Так как $\mathcal{B}_j(0) = 1,$ то в некоторой окрестности начала координат эти функции разлагаются в ряды вида

$$\mathcal{B}_{\mathrm{j}}(t) = \sum_{\alpha \geq 0} \frac{B_\alpha^j}{\alpha!} t^\alpha,$$

где $\alpha = \left(\alpha_{1,} \ _{\dots,} \alpha_n\right) -$ мультииндесы, $t^\alpha = t_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot t_n^{\alpha_n}, \alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!,$

$\alpha \geq 0$ означает $\alpha_j \geq 0,\ j = 1, \dots, n.$

Произведение функции $\mathcal{B}(t) = \prod_{\mathrm{j}=1}^{s} \mathcal{B}_{\mathrm{j}}(t)$ разложим в степенной ряд

$$\mathcal{B}(t) = \sum_{\alpha \geq 0} \frac{B_\alpha}{\alpha!} t^\alpha. \qquad (4)$$

Определение 2. Коэффициенты B_α разложения функции (4) в степенной ряд назовем обобщенными числами Бернулли.

В работах [13], [18] в связи с исследованиями свойств многомерных многочленов Бернулли рассматривался случай, когда $s = n$ и векторы a^j линейно независимы.

Цель работы состоит в том, чтобы определить многомерные аналоги чисел Бернулли и доказать для них аналоги основных свойств классических чисел Бернулли.

В параграфе 2.1 рассматривается многомерный аналог рекуррентной формулы (1) для чисел Бернулли.

Теорема 1. *Для обобщенных чисел Бернулли справедливы следующие рекуррентные формулы:*

1. Если a^j – единичные векторы, то обобщенные числа Бернулли удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\sum_{0\leq\beta\leq\mu}\frac{\mu!}{(\mu-\beta)!\,\beta!}B_\beta=0,\qquad \mu\geq I, \tag{5}$$

где $\mu=(\mu_1,\dots,\mu_n), \alpha=\mu-\beta\geq I, \beta\leq\mu-I,$ а неравенство $\mu\geq I$ означает, что $\mu_j\geq 1,\ \mathrm{j}=1,\dots,s.$

2. *Для обобщенных чисел Бернулли в случае $s=1$ справедливо рекуррентное соотношение*

$$\sum_{0\leq\nu\leq\mu}\frac{\mu!\,a^{\mu-\nu}}{(\mu-\nu)!\,\nu!}B_\nu=0\,,\ \ \mu\geq I. \tag{6}$$

В параграфе 2.2 для обобщенных чисел Бернулли доказывается аналог свойства равенства нулю нечетных классических чисел Бернулли.

Теорема 2. *Для обобщенных чисел Бернулли справедливы следующие свойства:*

1. *Если a^{j} –единичные векторы, то обобщенные числа Бернулли $B_\beta=0$, если хотя бы для одного j индекс $\beta_{\mathrm{j}}=2k+1$ и $k\geq 1$.*
2. *В случае $s=1$, для всех мультииндексов ν таких, что $|\nu|=2k+1$, $k=1,2,3,\dots$*

$$B_\nu=0.$$

В параграфе 2.3 докажем многомерный аналог свойства (3) чисел Бернулли, а именно найдена формула суммы для некоторого класса кратных числовых рядов. Приведем необходимые обозначения и определения.

Пусть $a^1,\dots,a^n$ линейно независимые векторы с целочисленными координатами $a^j=\left(a_1^j,\dots,a_n^j\right), a_\iota^j\epsilon\mathbb{Z},$ где $\mathbb{Z}$ – целые числа.

Определение 3. Рациональным конусом, построенным на векторах $a^1,\dots,a^n$, назовем множество $K=\{y\in\mathbb{R}^n\colon y=\lambda_1a^1+\ldots+\lambda_na^n,\lambda_j\in\mathbb{R}_+,$ $j=1,\dots,n\}$.

Отметим, что такой конус является симплициальным, т.е. каждый его элемент выражается через образующие единственным образом. Кроме того, симплициальный конус также является выступающим, т.е. не содержит прямых.

Между точками $u, v \in \mathbb{R}^n$ определим отношение частичного порядка $\geq_K$ следующим образом:

$$u \geq_K v \Leftrightarrow u \in v + K,$$

где $v + K$ — сдвиг конуса K на вектор v. Кроме того, будем писать $u \ngeq_K v$, если $u \in K \setminus \{v + K\}$, т.е. если отношение $u \geq_K v$ не выполняется. Обозначим $\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}$, и отметим, что любой элемент $y \in K \cap \mathbb{Z}^n$ можно представить в виде линейной комбинации базисных векторов $y = \lambda_1 a^1 + \ldots + \lambda_n a^n$, $\lambda_1 \geq 0, \ldots, \lambda_n \geq 0$. В матричной форме это представление запишется в виде $y = A\lambda$, где y и λ — вектора-столбцы, A — матрица, определитель которой $\Delta \neq 0$, а столбцы состоят из координат векторов a^j

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \ldots & a_1^n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n^1 & \ldots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

Конус, построенный на таких векторах $a^1, \ldots, a^n$, что определитель матрицы A, столбцами которой являются координаты этих векторов, равен 1, называется унимодулярным конусом.

Пусть A^{-1} — обратная матрица для матрицы A. Строки A^{-1} обозначим $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$. Пусть векторы $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$ образуют взаимный базис для векторов $a^1, \ldots, a^n$, т.е. $\langle a^\iota, \alpha^j \rangle = \delta_{\iota j}$, где $\langle k, x \rangle = k_1 x_1 + \ldots + k_n x_n$, а $\delta_{\iota j}$ — символ Кронекера. Отметим, что для $x \in K$ всегда $\langle \alpha^j, x \rangle \geq 0$, $j = 1, \ldots, n$.

Теорема 3. *Путь $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$ — взаимный базис для векторов $a^1, \ldots, a^n$, порождающих конус К и $p_1, \ldots, p_n$ — целые неотрицательные числа, тогда справедлива следующая формула*

$$\sum_{x \in (a+K) \cap \mathbb{Z}^n} \frac{1}{\langle \alpha^1, x \rangle^{2p_1} \ldots \langle \alpha^n, x \rangle^{2p_n}} = \prod_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{p_j - 1} 2^{2p_j - 1} \pi^{2p_j}}{(2p_j)!} b_{2p_j},$$

где $a = a^1 + \ldots + a^n$, b_μ — числа Бернулли.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Работа посвящена исследованию чисел Бернулли и их обобщений на случай функций нескольких переменных.

1. Получено рекуррентное соотношение для обобщенных чисел Бернулли.
2. Доказан многомерный вариант следующего свойства классических чисел Бернулли: начиная с третьего, все нечетные равны нулю.
3. Найден многомерный аналог свойства (3) чисел Бернулли, а именно найдена формула суммы для некоторого класса кратных числовых рядов.

Полученные результаты имеют теоретическое значение и могут быть использованы в задачах суммирования функций нескольких дискретных аргументов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Гельфонд, А.О. Исчисление конечных разностей : учебное пособие / А.О. Гельфонд. – Москва : Ф – М, 1967. – 376с.
2. Данилов, О. А. Дискретные аналитические функции многих переменных и формула Тейлора / О. А. Данилов, А. Д. Медных // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2009. – Т. 9, вып. 2. – С. 38 – 46.
3. Егорычев, Г. П. Интегральное представление и вычисление комбинаторных сумм / Г. П. Егорычев – Новосибирск: Наука, 1977. – 288 с.
4. Егорычев, Г.П. Комбинаторное тождество из теории интегральных представлений в $\mathbb{C}^n$ / Г. П. Егорычев // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. 2011. – Т. 3. – №4. – С. 39 – 44.
5. Кудрявцев, В.А. Суммирование степеней чисел натурального ряда и числа Бернулли : учебное пособие / В.А. Кудрявцев. – Москва : ОНТИ НКТП, 1936. – 74с.
6. Ландо, С.К. Лекции о производящих функциях /С. К. Ландо – М.: МЦНМО, 2007. – 144 с.
7. Марков, А.А. Исчисление конечных разностей : в 2 т. / А.А. Марков. – Одесса : Ф–М, 1910. – Т.2. – 274с.
8. Медных, А. Д. Дискретные аналитические функции и ряд Тейлора / А. Д. Медных // Теория отображений, ее обобщения и приложения. Сб. науч. тр. – Наук. думка, Киев. – 1982. – С. 137 – 144.
9. Риордан, Дж. Комбинаторные тождества / Дж. Риордан. – М.: Мир, 1990. – 440 с.
10. Риордан, Дж. Комбинаторные тождества / Дж. Риордан. – М.: Наука, 1982. – 255 с.
11. Стенли, Р. Перечислительная комбинаторика / Р. Стенли. – М.: Мир, 1990. – 440 с.
12. Устинов, А. В. Дискретный аналог формулы суммирования Эйлера / А. В. Устинов // Матем. заметки. – 2002. V. 71. – №6. – P. 931 – 936.
13. Шишкина, О. А. Многочлены Бернулли от нескольких переменных и суммирование мономов по целым точкам рационального параллелотопа / О. А. Шишкина // Известия Иркутского государственного университета. Серия «Математика». – 2016. – Т. 16. – С. 89–101.
14. Bernoulli J. Ars Conjectandi / Jacob Bernoulli. – Basel, 1713.
15. Lehmer D. H. Lacunary recurrence formulasfor the numbers of Bernoulli and Euler / D. H. Lehmer // Ann. of Math. – 1935. – V. 36(2). – №3. P. 637–649.

16. Carlitz L. Bernoulli and Euler numbers and orthogonal polynomials / L. Carlits // Duke Math. J. – 1959. – V. 26. – P. 694–711.
17. Temme N. M. Bernoulli polynomials old and new: Generalization and asymptotics / N. M. Temme // CWI Quarterly. – 1995. – V. 1. – P. 47–66.
18. Shishkina O. A. Multidimensional Analogue of the Bernoulli polynomials and its Properties / O. A. Shishkina // Journal of Siberian Federal University, Mathematics & Physics. – 2016. – V. 9(3). – P. 376–384.

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики
Кафедра теории функций

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
_________ /А.К. Цих

«9» _06_ 2017 г.

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

ОБОБЩЕННЫЕ ЧИСЛА БЕРНУЛЛИ

Направление 01.04.01 Математика

Магистерская программа 01.04.01.01 Комплексный анализ

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор _________ / Е.К. Лейнартас
9.06.17

Выпускник _________ / Т.А. Копич
9.06.17

Красноярск 2017