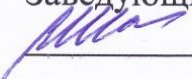


Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики  
Базовая кафедра вычислительных и информационных технологий

**УТВЕРЖДАЮ**

Заведующий кафедрой

 / В.В. Шайдуров


« 16 » июня 2017 г.

## БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА


Направление 02.03.01 “Математика и компьютерные науки”

### МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИЗГИБНОЙ ДЕФОРМАЦИИ И РАЗРУШЕНИЯ ВОЛОКНИСТОГО КОМПОЗИТА

Научный руководитель  
доктор физико-математических наук,  
профессор

 / В.М. Садовский  
16.06.17г

Выпускник

 / Ю.Г. Сурикова  
16.06.17г

Красноярск 2017

## РЕФЕРАТ

Выпускная квалификационная работа по теме «Математическое моделирование изгибной деформации и разрушения волокнистого композита» содержит 24 страницы текстового документа, 9 использованных источников.

КОМПОЗИТ, РАЗНОМОДУЛЬНОСТЬ, МАТЕРИАЛ, ИЗГИБ БАЛКИ, ИЗГИБ ПЛАСТИНЫ, РАСТЯЖЕНИЕ, СЖАТИЕ, СИЛА, МОМЕНТ, ПРОГИБ.

Цель работы - моделирование изгиба волокнистого композита с учетом разного сопротивления растяжению и сжатию.

Задачи:

- точное решение задачи изгиба пластины из волокнистого композита.

Учет не симметрии диаграмм одноосного растяжения – сжатия;

- разработка алгоритма построения решения задачи изгиба для многослойной пластины;

- решение задачи трехточечного изгиба балки;

- вычисление относительной ошибки прогиба при учете и неучете разнопрочности материала.

В результате показано, что неучет разнопрочности композита может привести к ошибке 30-90%.

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	3
1 Задача изгиба композитной пластины.....	7
1.1 Изгиб однородной пластины .....	7
1.1.1 Классическая задача.....	7
1.1.2 Задача для материала с разным сопротивлением.....	8
1.1.3 Задача для материала с разным сопротивлением с учетом пластичности .....	9
1.2. Изгиб слоистой неоднородной по толщине пластины.....	12
1.2.1 Существование и единственность нейтральной линии в задаче изгиба неоднородной по толщине композитной пластины.....	12
1.2.2 Поиск нейтральной линии.....	13
2 Задача трехточечного изгиба балки .....	15
2.1 Действие сосредоточенной силы.....	15
2.2 Действие сосредоточенного момента.....	17
2.3 Определение прогиба.....	18
2.3.1 Действие сосредоточенной силы .....	19
2.3.2 Действие сосредоточенного момента .....	20
2.3.3 Относительная ошибка.....	21
Заключение .....	23
Список использованных источников.....	24

## ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время интенсивно ведётся разработка легких, высокопрочных и недорогих конструкционных материалов. В результате многие материалы достигли предела своих свойств. Как следствие, ученые, перед которыми стоит задача существенного улучшения свойств, вынуждены создавать принципиально новые материалы, примером которых являются композиты.

В действительности композиты – не такие уж и новые материалы. Композитами называют материалы, состоящие из двух или более компонентов или фаз, а под эту классификацию подходят, например, известные древним цивилизациями саманные кирпичи, делавшиеся из армированной соломой глины. Бетон также подходит под это определение, поскольку он состоит из смеси камней, скрепленных цементом. Кроме того встречаются композиты и в природе, как, например, кости, раковины моллюсков или древесина.

Структура и свойства некоторых природных композитных материалов достойна изучения и подражания. Например, механизм разрушения древесины во многом схож с механизмом разрушения таких современных однонаправленных композитов, как углепластик, стеклопластик, боралюминий и некоторые другие, уже нашедших широкое применение. [1]

Конструирование новых композиционных материалов, обладающих высокой удельной прочностью, жесткостью и вязкостью разрушения, обычно достигается путем армирования матрицы высокопрочным и жестким составляющим. Компоненты композитов не должны растворяться или иным способом поглощать друг друга. Они должны быть хорошо совместимы. Свойства композитных материалов нельзя определить только по свойствам компонентов, без учета их взаимодействия.

Соединение хаотически ориентированных зерен пластичного металла и второй более прочной, но хрупкой фазы позволяет в известной мере регулировать свойства конечного продукта, т.е. получать материал с

необходимой прочностью и достаточной пластичностью. Усилиями металлургов созданы прочные сплавы на основе железа, алюминия, титана, содержащие различные легирующие добавки. Достигнутый к настоящему времени предел прочности составляет примерно  $150 \text{ кгс/мм}^2$  для сталей,  $50 \text{ кгс/мм}^2$  для алюминиевых сплавов,  $100 \text{ кгс/мм}^2$  для титановых сплавов. Теоретический предел прочности атомной решетки металла, представляющий собою верхнюю границу того, к чему можно в идеале стремиться, по разным моделям оценивается по-разному, в среднем это  $1/10 - 1/15$  от модуля упругости материала. Так, для железа теоретическая прочность оценивается величиной примерно  $1400 \text{ кгс/мм}^2$ , что в десять раз выше названной для сплава на железной основе цифры. В настоящее время существуют способы получения тонкой металлической проволоки или ленты с прочностью порядка  $400 - 500 \text{ кгс/мм}^2$ , что составляет около одной трети теоретической прочности. Однако применение таких проволок или лент в конструктивных элементах неизбежным образом ограничено. [7]

С увеличением диаметра прочность волокна резко падает, прочность же массивных изделий из стекла в сильнейшей степени зависит от состояния поверхности и полностью теряется при появлении мельчайших дефектов. Использование высокопрочных волокон и нитей для несущих элементов конструкций возможно только путем соединения в однородную матрицу. Такой матрицей может служить металл, полимерная смола или что-либо иное. Таким образом, получается композиты волокнистого строения.

Первым примером такого рода композитов, получивших достаточно широкое практическое применение, служат стеклопластики. Перемешивая полимерную массу с мелко изрубленным стеклянным волокном, мы получаем первый пример композита с хаотическим армированием. Прочность такой пластмассы выше, чем прочность неармированного материала, однако потенциальная прочность стеклянного волокна используется при этом далеко не полностью, разрушение всегда происходит по матрице, стеклянные волокна не разрываются, а выдергиваются из пластмассы.

Стеклотекстолиты получают из стеклянной ткани, которая пропитывается полимерной смолой – эпоксидной, полиэфирной или какой-либо иной. Куски этой ткани укладываются в форму, смола полимеризуется тем или иным способом.

Меняя порядок укладки армирующих слоев, можно изготовить оптимальное в известном смысле изделие, например, обеспечить его равнопрочность в продольном и поперечном направлении.

Приведем некоторые сравнительные данные для хороших стеклопластиков, армированных в одном направлении хорошо ориентированным волокном: прочность при растяжении  $100 \text{ кгс/мм}^2$ , модуль упругости  $E = 4,2 \cdot 10^3 \text{ кгс/мм}^2$ . При плотности около  $2 \text{ Г/см}^3$  удельная прочность, т.е. прочность на единицу веса, у стеклопластика оказывается примерно в четыре раза выше, чем у стали, и в полтора раза выше, чем у титанового сплава.

Укажем, что в работе [7] для изотропного нормированного полистирола (оргстекло) получена высокая разномодульность  $E^+ / E^-$ , доходящая до 4,11.

Рассматривая приведённые выше результаты, мы можем сказать, что многие полимерные материалы обладают свойством разномодульности.

Композиционные материалы, армированные волокнами или зёрнами, обладают высокой относительной прочностью и жесткостью. Они, как правило, существенно анизотропны и обладают свойствами разномодульности.

Тканевые стеклопластики, зачастую, будучи трансверсально незначительно анизотропными, обладают свойствами значительной разномодульности. В таблице 1 приведены упругие характеристики полиэфирных и эпоксидных стеклотекстолитов. [9,2]

Таблица 1 – характеристики полиэфирных и эпоксидных стеклотекстолитов

Материал	По основе		По утку		$\frac{E_0^+}{E_0^-}$ , $\frac{E_y^+}{E_y^-}$
	$E_0^+$ , кгс/мм <sup>2</sup>	$E_0^-$ , кгс/мм <sup>2</sup>	$E_y^+$ , кгс/мм <sup>2</sup>	$E_y^-$ , кгс/мм <sup>2</sup>	
Стекло-S Ткань-18	2200,0	3220,0	2160,0	3170,0	0,86; 0,68
Стекло-E Ткань-181	2240,0	2950,0	2020,0	2760,0	0,75; 0,73
Стекло-D Ткань-181	1880,0	1990,0	1780,0	1950,0	0,94; 0,91
Стекло-S Ткань-143	3860,0	4009,0	3100,0	1650,0	0,96; 1,89
Ирма-10	2000,0	700	-	-	2,86
Инпласт-60	1735,0	1666,0	-	-	1,04

Достаточно высокой степени разномодульность проявляют углепластики. Например, некоторые композиты из эпоксидной смолы, армированной слоями однонаправленных углеродных волокон, имеют модуль упругости на растяжение, превосходящий модуль упругости при сжатии на 40% [4].

Еще более ярко выраженную разномодульность проявляют материалы из углерода, армированные углеродными волокнами. У композита углерод – углерод с трехосным плетением волокон значение модуля упругости при растяжении в четыре-пять раз превышает значение модуля упругости при сжатии. [5,1].

Цель работы: Моделирование изгиба волокнистого композита с учетом разного сопротивления растяжению и сжатию.

Задачи:

- 1) Точное решение задачи изгиба пластины из волокнистого композита. Учет не симметрии диаграмм одноосного растяжения – сжатия;
- 2) Разработка алгоритма построения решения задачи изгиба для многослойной пластины;
- 3) Решение задачи трехточечного изгиба балки;
- 4) Вычисление относительной ошибки прогиба при учете и неучете разнопрочности материала.

# 1 Задача изгиба композитной пластины

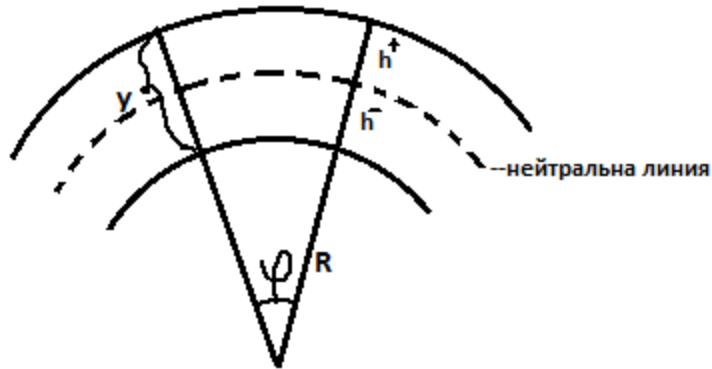


Рисунок 1 – Чистый изгиб

Будем считать, что при изгибе пластины верхние волокна находятся в жестком растяжении, а нижние в сжатии, при сжатии волокна теряют устойчивость и разрушаются. Нейтральная линия – линия в которой волокна находятся в покое.

## 1.1 Изгиб однородной пластины

### 1.1.1 Классическая задача

Задача изгиба

$$S_0 = (R + h)\varphi,$$

где  $S_0$  – длина дуги;

$\varphi$  – угол;

$R$  – радиус кривизны;

$h$  – толщина пластины.

$$S(y) = (R + y)\varphi,$$

где  $y$  – вертикальная координата.

$$\varepsilon = \frac{S(y) - S_0}{S_0} = \frac{(R + y)\varphi - (R + h)\varphi}{(R + h)\varphi} = \frac{y - h}{R + h},$$

где  $\varepsilon$  – деформация.



$$\varepsilon = \frac{z}{\rho}, \quad \rho = R + h, \quad z = y - h,$$

$$-h \leq z \leq h.$$

Закон Гука

$$\sigma = E\varepsilon,$$

где  $\sigma$  – напряжение;

$E$  – модуль Юнга.

$$\sigma = \frac{E}{\rho} z.$$

Момент силы вычисляется следующим образом

$$M = \int_{-h}^h \sigma z dz = \frac{E}{\rho} \int_{-h}^h z^2 dz = \frac{E}{\rho} \frac{2h^3}{3},$$

где  $M$  – изгибающий момент.

### 1.1.2 Задача для материала с разным сопротивлением

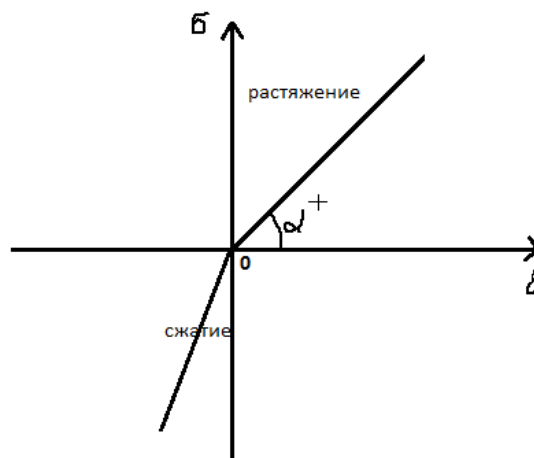


Рисунок 2 – Диаграмма одноосного растяжения – сжатия

$$\varepsilon(y) = \frac{(R+y)\varphi - R\varphi}{R\varphi} = \frac{y}{R},$$

$$\sigma = \begin{cases} E^+ \frac{y}{R}, & \text{если } y > 0 \text{ (растяжение)} \\ E^- \frac{y}{R}, & \text{если } y \leq 0 \text{ (сжатие)} \end{cases},$$

где  $E^+$  – модуль Юнга при растяжении;

$E^-$  – модуль Юнга при сжатии.

$$N = \int_{-h^-}^{h^+} \sigma(y) dy = 0, \quad (1)$$

где  $N$  – продольное усилие.

$$h^+ + h^- = h, \quad (2)$$

где  $h^+$  – ширина полосы, в которой волокна находятся в растяжении;

$h^-$  – ширина полосы, в которой волокна находятся в сжатии.

Из формул (1) и (2) выясним зависимость  $h^+$  от  $h^-$ .

И посчитаем продольное усилие  $N$

$$N = \int_{-h^-}^{h^+} \sigma(y) dy = \int_{-h^-}^0 E^- \frac{y}{R} dy + \int_0^{h^+} E^+ \frac{y}{R} dy = \frac{E^- y^2}{2R} \Big|_{-h^-}^0 + \frac{E^+ y^2}{2R} \Big|_0^{h^+} =$$

$$\frac{1}{2R} (E^+ (h^+)^2 - E^- (h^-)^2),$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2R} (E^+ (h^+)^2 - E^- (h^-)^2) = 0 \\ h^+ + h^- = h \end{cases}. \quad (3)$$

Из формулы (3) получаем

$$h^+ = \frac{\sqrt{E^-}}{\sqrt{E^+} + \sqrt{E^-}} h, \quad (4)$$

$$h^- = \frac{\sqrt{E^+}}{\sqrt{E^+} + \sqrt{E^-}} h. \quad (5)$$

Положение нейтральной линии определяется по формулам (4) и (5).

Вычислим изгибающий момент

$$M = \int_{-h^-}^{h^+} y \cdot \sigma(y) dy = \int_{-h^-}^0 y \cdot \sigma(y) dy + \int_0^{h^+} y \cdot \sigma(y) dy =$$

$$= \int_{-h^-}^0 y \cdot E^- \frac{y}{R} dy + \int_0^{h^+} y \cdot E^+ \frac{y}{R} dy = \frac{E^- y^3}{3R} \Big|_{-h^-}^0 + \frac{E^+ y^3}{3R} \Big|_0^{h^+} =$$

$$= \frac{1}{3R} (E^+ (h^+)^3 + E^- (h^-)^3).$$

### 1.1.3 Задача для материала с разным сопротивлением с учетом пластичности

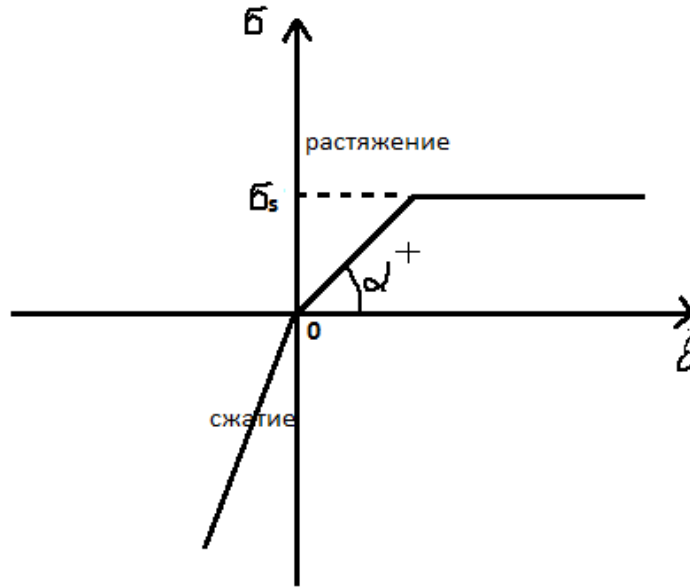


Рисунок 3 - Диаграмма одноосного растяжения – сжатия с учетом пластичности

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_s, & \text{если } y < c \\ E^+ \frac{y}{R}, & \text{если } 0 < y \leq c \\ E^- \frac{y}{R}, & \text{если } y \leq 0 \end{cases} .$$

где  $\sigma_s$  – предельное напряжение;

$c$  – константа, при которой достигается предел текучести.

$$\sigma_s = E^+ \frac{c}{R} .$$

Следовательно

$$\begin{aligned} c &= \frac{\sigma_s R}{E^+} N = \int_{-h^-}^{h^+} \sigma(y) dy = \int_{-h^-}^0 E^- \frac{y}{R} dy + \int_0^c E^+ \frac{y}{R} dy + \int_c^{h^+} \sigma_s dy = \\ &= \frac{E^- y^2}{2R} \Big|_{-h^-}^0 + \frac{E^+ y^2}{2R} \Big|_0^c + \sigma_s y \Big|_c^{h^+} = \frac{1}{2R} (E^+ c^2 - E^- (h^-)^2) + \sigma_s h^+ - \sigma_s c . \end{aligned}$$

Далее выясним зависимость  $h^+$  от  $h^-$

$$\begin{cases} \frac{1}{2R} (E^+ c^2 - E^- (h^-)^2) + \sigma_s h^+ - \sigma_s c = 0 \\ h^+ + h^- = h \end{cases} , \quad (6)$$

$$\begin{cases} h^+ = \left( \frac{E^- (h^-)^2}{2R} - \frac{E^+ c^2}{2R} + \sigma_s c \right) \cdot \frac{1}{\sigma_s} , \\ h^- = h - h^+ \end{cases} \quad (7)$$

$$h^+ = \frac{E^- (h - h^+)^2 - E^+ c^2}{2R \sigma_s} + c = \frac{E^- (h^2 - 2hh^+ + (h^+)^2) - E^+ c^2}{2R \sigma_s} + c ,$$

$$\begin{aligned}
& -2R\sigma_s h^+ + E^-(h^2 - 2hh^+ + (h^+)^2) - E^+c^2 + 2R\sigma_s c = 0, \\
& E^-(h^+)^2 - 2(R\sigma_s + h)h^+ + (E^-h^2 - E^+c^2 + 2R\sigma_s c) = 0, \\
& D = 4(R\sigma_s + h)^2 - 4E^-(h^+)^2(E^-h^2 - E^+c^2 + 2R\sigma_s c).
\end{aligned}$$

Исходя из формул (6) и (7) получаем

$$h^+ = \frac{(R\sigma_s + h) + \sqrt{D}}{E^-}, \quad (8)$$

$$h^- = \sqrt{\frac{-E^+c^2}{2R} - \sigma_s h^+ + \sigma_s c} \cdot \frac{2R}{E^-}, \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
(h^-)^2 &= \frac{-E^+c^2 - \sigma_s 2R(h - h^-) + \sigma_s c 2R}{E^-}, \\
E^-(h^-)^2 - 2R\sigma_s h^- + (E^+c^2 - \sigma_s c 2R + 2Rh\sigma_s) &= 0, \quad (10)
\end{aligned}$$

$$D = 4R^2\sigma_s^2 - 4E^-(E^+c^2 - \sigma_s c 2R + 2Rh\sigma_s).$$

Исходя из формул (9) и (10) получаем.

$$h^- = \frac{R\sigma_s + \sqrt{D}}{E^-}. \quad (11)$$

Положение нейтральной линии определяется по формулам (8) и (11)

Вычислим изгибающий момент.

$$\begin{aligned}
M &= \int_{-h^-}^{h^+} y \cdot \sigma(y) dy = \int_{-h^-}^0 y \cdot E^- \frac{y}{R} dy + \int_0^c y \cdot E^+ \frac{y}{R} dy + \int_c^{h^+} \sigma_s y dy = \\
&= \frac{E^- y^3}{3R} \Big|_{-h^-}^0 + \frac{E^+ y^3}{3R} \Big|_0^c + \frac{\sigma_s y^2}{2} \Big|_c^{h^+} = \frac{1}{3R} (E^-(h^-)^3 + E^+c^3) + \frac{1}{2} (\sigma_s (h^+)^2 - \\
&- \sigma_s c^2).
\end{aligned}$$

## 1.2 Изгиб слоистой не однородной по толщине пластины

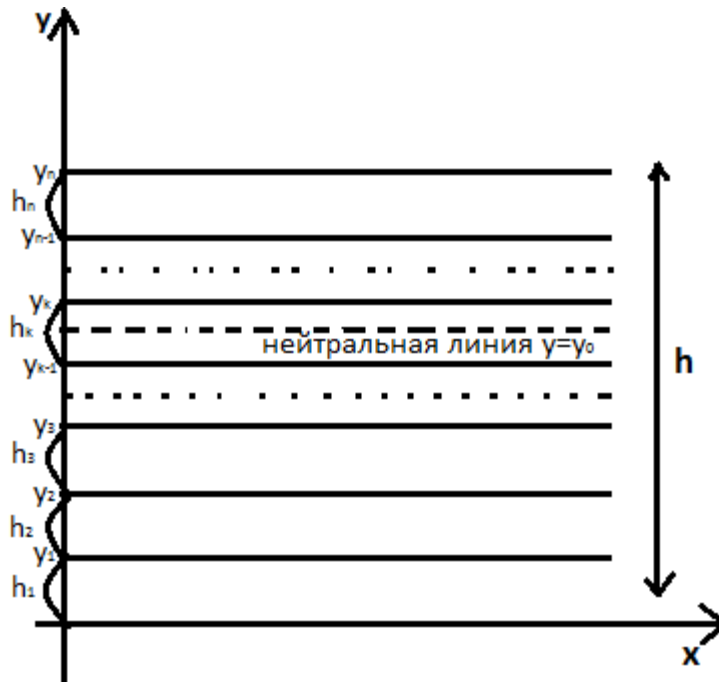


Рисунок 4 – Моделирование многослойной не однородной по толщине пластины.

### 1.2.1 Существование и единственность нейтральной линии в задаче изгиба неоднородной по толщине композитной пластины

$$\sigma(y) = \begin{cases} E^+(y)\varepsilon(y), & \text{если } y \geq y_0 \\ E^-(y)\varepsilon(y), & \text{если } y < y_0 \end{cases}$$

$$\varepsilon(y) = \frac{y-y_0}{R},$$

$$f(y_0) = \int_0^h \sigma(y) dy = \int_0^{y_0} E^-(y) \frac{y-y_0}{R} dy + \int_{y_0}^h E^+(y) \frac{y-y_0}{R} dy = 0, \quad (12)$$

где  $y_0$  – нейтральная линия.

$f(y)$  – непрерывна.

$$f(0) = \int_0^h E^+(y) \frac{y}{R} dy > 0, \quad (13)$$

$$f(h) = \int_0^h E^-(y) \frac{y}{R} dy < 0, \quad (14)$$

$$f'(y_0) = -\int_0^{y_0} \frac{E^-(y)}{R} dy - \int_{y_0}^h \frac{E^+(y)}{R} dy < 0. \quad (15)$$

Неравенства (13), (14) и (15) - условия существования и единственности решения.

### 1.2.3 Поиск нейтральной линии

Условие отсутствия растягивающего усилия (16).

$$\int_0^h \sigma(y) dy = \int_0^{y_0} E^-(y) \frac{y-y_0}{R} dy + \int_{y_0}^h E^+(y) \frac{y-y_0}{R} dy = 0, \quad (16)$$

$y_{k-1} < y_0 < y_k - y_0$  лежит в  $k$ -слое.

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{k-1} E_j^- \int_{y_{j-1}}^{y_j} (y - y_0) dy + E_k^- \int_{y_{k-1}}^{y_0} (y - y_0) dy + E_k^+ \int_{y_0}^{y_k} (y - y_0) dy + \\ & + \sum_{j=k+1}^n E_j^+ \int_{y_{j-1}}^{y_j} (y - y_0) dy = 0. \end{aligned}$$

Ищем решение  $a_k y_0^2 + b_k y_0 + c_k = 0$ ,  $y_0 \in (y_{k-1}, y_k)$ ,

где  $a_k, b_k, c_k$  - неизвестные коэффициенты.

Вычислим каждое слагаемое по-отдельности.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{k-1} E_j^- \int_{y_{j-1}}^{y_j} (y - y_0) dy &= \sum_{j=1}^{k-1} E_j^- \left( \frac{y^2}{2} - y_0 y \right) \Big|_{y_{j-1}}^{y_j} = \sum_{j=1}^{k-1} E_j^- \left( \frac{y_j^2}{2} - \right. \\ & \left. - y_0 y_j - \frac{y_{j-1}^2}{2} + y_0 y_{j-1} \right) = \sum_{j=1}^{k-1} E_j^- \left( \sum_{j=1}^{k-1} \frac{y_j^2 - y_{j-1}^2}{2} + \sum_{j=1}^{k-1} y_0 (y_{j-1} - y_j) \right) = \\ & = \sum_{j=1}^{k-1} E_j^- \left( \frac{1}{2} (-y_0^2 + y_{k-1}^2) + y_0 (y_0 - y_{k-1}) \right) = \sum_{j=1}^{k-1} E_j^- \left( \frac{y_0^2}{2} + \frac{y_{k-1}^2}{2} - \right. \\ & \left. - y_{k-1} y_0 \right), \end{aligned}$$

$$E_k^- \int_{y_{k-1}}^{y_0} (y - y_0) dy = E_k^- \left( \frac{y^2}{2} - y_0 y \right) \Big|_{y_{k-1}}^{y_0} = E_k^- \left( -\frac{y_0^2}{2} - \frac{y_{k-1}^2}{2} + y_0 y_{k-1} \right),$$

$$E_k^+ \int_{y_0}^{y_k} (y - y_0) dy = E_k^+ \left( \frac{y^2}{2} - y_0 y \right) \Big|_{y_0}^{y_k} = E_k^+ \left( \frac{y_k^2}{2} + \frac{y_0^2}{2} - y_0 y_k \right),$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=k+1}^n E_j^+ \int_{y_{j-1}}^{y_j} (y - y_0) dy &= \sum_{j=k+1}^n E_j^+ \left( \frac{y^2}{2} - y_0 y \right) \Big|_{y_{j-1}}^{y_j} = \sum_{j=k+1}^n E_j^+ \left( \frac{y_j^2}{2} - \right. \\ & \left. - y_0 y_j - \frac{y_{j-1}^2}{2} + y_0 y_{j-1} \right) = \sum_{j=k+1}^n E_j^+ \left( \sum_{j=k+1}^n \frac{y_j^2 - y_{j-1}^2}{2} + \sum_{j=k+1}^n y_0 (y_{j-1} - y_j) \right) = \\ & = \sum_{j=k+1}^n E_j^+ \left( \frac{1}{2} (y_n^2 - y_k^2) + y_0 (y_k - y_n) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{k-1} E_j^- \left( \frac{y_0^2}{2} + \frac{y_{k-1}^2}{2} - y_{k-1}y_0 \right) + E_k^- \left( -\frac{y_0^2}{2} - \frac{y_{k-1}^2}{2} + y_0y_{k-1} \right) + E_k^+ \left( \frac{y_0^2}{2} + \frac{y_k^2}{2} - \right. \\ & \left. - y_0y_k \right) + \sum_{j=k+1}^n E_j^+ \left( \frac{1}{2} (y_n^2 - y_k^2) + y_0(y_k - y_n) \right) = y_0^2 \left( \frac{1}{2} (\sum_{j=1}^{k-1} E_j^- - E_k^- + \right. \\ & \left. + E_k^+) \right) + y_0(y_{k-1}(E_k^- - \sum_{j=1}^{k-1} E_j^+) + y_k(\sum_{j=k+1}^n E_j^+ - E_k^+) - y_n \sum_{j=k+1}^n E_j^+) + \\ & + \left( y_{k-1}^2 \frac{1}{2} (\sum_{j=1}^{k-1} E_j^- - E_k^-) + y_k^2 \frac{1}{2} (E_k^+ - \sum_{j=k+1}^n E_j^+) + \frac{1}{2} \sum_{j=k+1}^n E_j^+ y_n^2 \right), \end{aligned}$$

$$a_k y_0^2 + b_k y_0 + c_k = 0,$$

$$a_k = \left( \frac{1}{2} (\sum_{j=1}^{k-1} E_j^- - E_k^- + E_k^+) \right),$$

$$b_k = (y_{k-1}(E_k^- - \sum_{j=1}^{k-1} E_j^+) + y_k(\sum_{j=k+1}^n E_j^+ - E_k^+) - y_n \sum_{j=k+1}^n E_j^+),$$

$$\begin{aligned} c_k &= (y_{k-1}^2 \frac{1}{2} (\sum_{j=1}^{k-1} E_j^- - E_k^-) + y_k^2 \frac{1}{2} (E_k^+ - \sum_{j=k+1}^n E_j^+) + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{j=k+1}^n E_j^+ y_n^2), \end{aligned}$$

$$D = b_k^2 - 4a_k c_k.$$

$$\text{Решение } y_0 = \frac{-b_k \pm \sqrt{D}}{2a_k}, y_0 \in (y_{k-1}, y_k).$$

Решение ищем перебором по  $k=1..n$ , решение будет найдено только в одном слое, при остальных  $k$  решения либо нет, либо будет два решения. Данный алгоритм имеет  $n!$  переборов.

## 2 Задача трехточечного изгиба

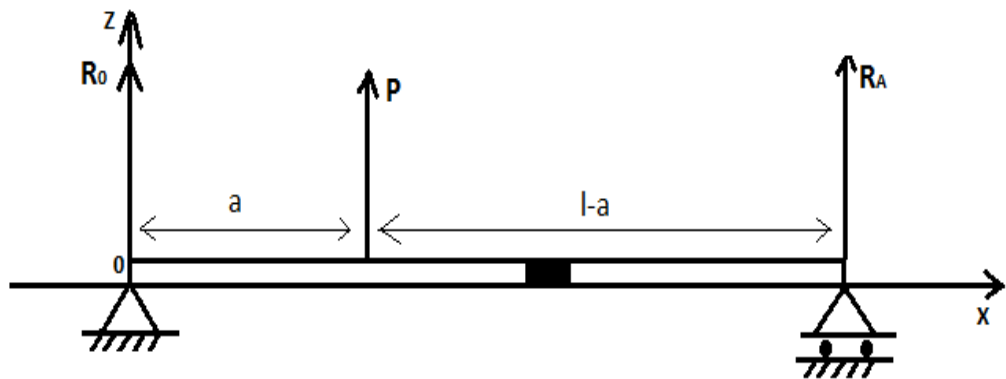


Рисунок 5 - Шарнирно опертая балка, действие сосредоточенной силы.

### 2.1 Действие сосредоточенной силы

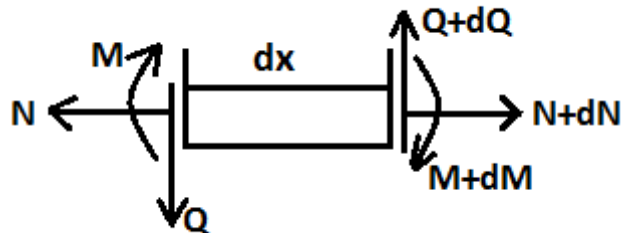


Рисунок 6 - напряженное состояние выделенного элемента

В соответствии с рисунком 6 при равновесии балки выполняются уравнения

$$\frac{dN}{dx} = 0, \frac{dQ}{dx} = -P\delta(x - a), \frac{dM}{dx} = Q.$$

И граничные условия  $N(0) = 0, M(0) = M(l) = 0,$

где  $N$ -продольное усилие;

$Q$  -поперечная сила;

$M$ -изгибающий момент;

$P$ -заданная внешняя нагрузка;



$\delta(x)$ - функция Дирака.

Интегрируя уравнение для  $Q$ , получим

$$Q = Q_0 - P\theta(x - a),$$

где  $\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$  - функция Хевисайда;

$Q_0 = const$ - постоянная интегрирования.

Из условия равновесия сил в концах балки

$$R_0 = Q_0, \quad R_A = P - Q_0 \quad \Rightarrow \quad R_0 + R_A = P.$$

В результате интегрирования уравнения для  $M$ , получим

$$\int_0^l Q dx = M(l) - M(0) = 0.$$

$$\text{Следовательно, } Q_0 a + (Q_0 - P)(l - a) = 0,$$

$$R_0 = P \left(1 - \frac{a}{l}\right), \quad R_A = P \frac{a}{l}.$$

Окончательно находим

$$Q = \begin{cases} P \left(1 - \frac{a}{l}\right), & x \in (0, a) \\ -P \frac{a}{l}, & x \in (a, l) \end{cases},$$

$$M = \begin{cases} Px \left(1 - \frac{a}{l}\right), & x \in (0, a) \\ Pa \left(1 - \frac{x}{l}\right), & x \in (a, l) \end{cases}.$$

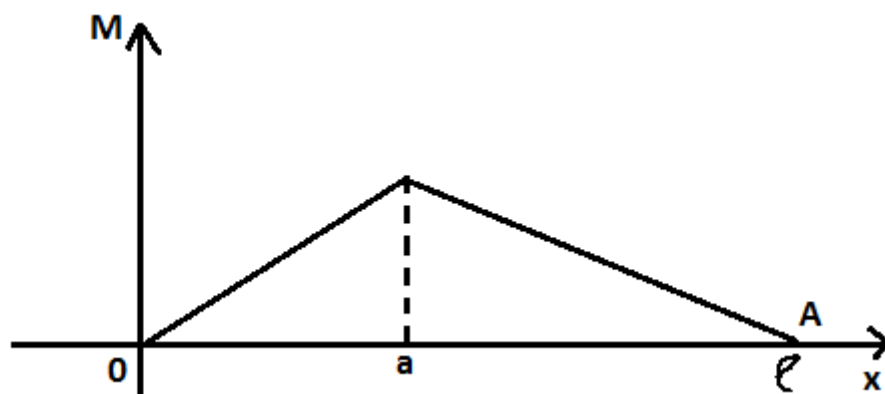


Рисунок 7 - Распределение момента в задаче о действии сосредоточенной

силы

## 2.2 Действие сосредоточенного момента

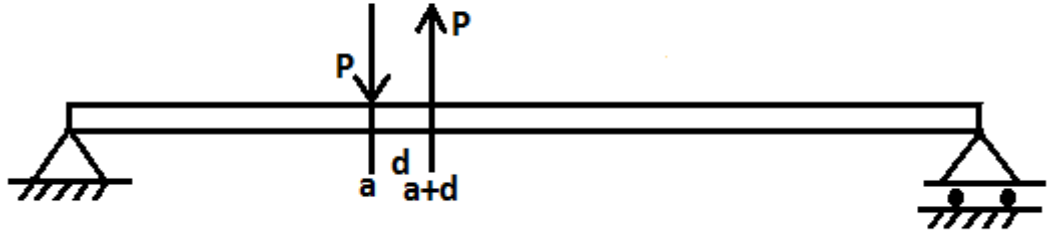


Рисунок 8 - Шарнирно опертая балка, действие сосредоточенного момента.

Решение задачи можно получить с помощью метода суперпозиции, исходя из двух решений для каждой из пары сил, эквивалентных действующему моменту. При предельном переходе по  $d$  при  $d \rightarrow 0$  необходимо учесть, что

$$P \rightarrow \infty, \quad Pd = \mu,$$

где  $\mu$  – заданный момент.

Можно также, не применяя принцип суперпозиции, строить решение, исходя из системы уравнений

$$\frac{dN}{dx} = 0, \quad \frac{dQ}{dx} = 0, \quad \frac{dM}{dx} = Q + \mu\delta(x - a).$$

С граничными условиями  $N(0) = 0, \quad M(0) = M(l) = 0$ .

Решение задачи принимает следующий вид

$$Q = Q_0, \quad R_0 = Q_0, \quad R_A = -Q_0, \quad (R_0 + R_A = 0),$$

$$Q_0 = -\frac{\mu}{l},$$

$$M = \begin{cases} -\mu \frac{x}{l}, & x \in (0, a) \\ \mu \left(1 - \frac{x}{l}\right), & x \in (a, l) \end{cases},$$

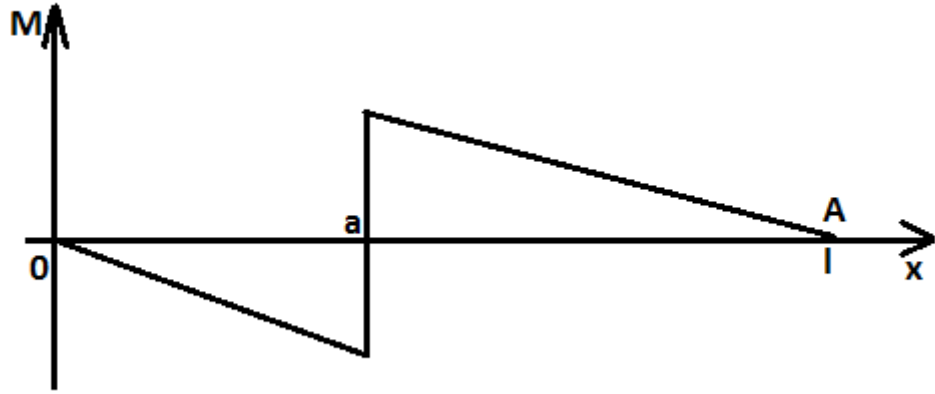


Рисунок 9 - Распределение момента в задаче о действии сосредоточенного момента.

### 2.3 Определение прогиба

При изгибе балки деформация волокон по толщине распределяется линейно относительно некоторой нейтральной линии (рисунок 1)

$$\varepsilon = \frac{(R+z)d\varphi - Rd\varphi}{Rd\varphi} = \frac{z}{R}.$$

В этой формуле  $R$  – радиус кривизны. В линейном приближении  $\varepsilon = -zW''$ ,

где  $W(x)$  – прогиб балки.

Так как модули Юнга при растяжении  $E^+$  и при сжатии  $E^-$  разные, то для напряжения  $\sigma$  справедлива формула

$$\sigma = -zW'' \begin{cases} E^+, & z \geq 0 \\ E^-, & z < 0 \end{cases}$$

Из условия  $N=0$  находим

$$\int_0^{h^+} \sigma dz + \int_{-h^-}^0 \sigma dz = 0 \Rightarrow E^+(h^+)^2 = E^-(h^-)^2,$$

где  $h^+$  и  $h^-$  - толщины растягиваемой и сжимаемой частей балки;

$$h^+ + h^- = h \text{ - суммарная толщина.}$$

Отсюда

$$h^- = \sqrt{\frac{E^+}{E^-}} h^+, \quad h^+ \left(1 - \sqrt{\frac{E^+}{E^-}}\right) = h.$$

Определяем

$$h^+ = \frac{\sqrt{E^-} h}{\sqrt{E^-} + \sqrt{E^+}}, \quad h^- = \frac{\sqrt{E^+} h}{\sqrt{E^-} + \sqrt{E^+}}.$$

Принципиально, что эти толщины не зависят от кривизны балки, то есть от координаты  $x$ .

Для момента справедлива формула

$$M = \int_0^{h^+} \sigma dz + \int_{-h^-}^0 \sigma dz = -DW'',$$

$$D = \frac{E^+(h^+)^3}{3} + \frac{E^-(h^-)^3}{3}, \quad (17)$$

где  $D$ - цилиндрическая жесткость балки.

Для оценки влияние разномодульности композита при изгибе примем формулу осреднения

$$E^+ = E_m \omega_m + \omega_a E_a, \quad \omega_m + \omega_a = 1,$$

где  $E_m$ ,  $\omega_m$  – модуль Юнга и объемное содержание материала матрицы;

$E_a$ ,  $\omega_a$  - модуль Юнга и объемное содержание арматуры.

### 2.3.1 действие сосредоточенной силы

Вычисляем неопределенный интеграл:

$$\int M dx = \begin{cases} P \frac{x^2}{2} \left(1 - \frac{a}{l}\right) + C_1, & x \in (0, a) \\ Pa x \left(1 - \frac{x}{2l}\right) + C_2, & x \in (a, l) \end{cases}.$$

Из условия непрерывности в точке  $x = a$  имеем

$$P \frac{a^2}{2} - P \frac{a^3}{2l} + C_1 = Pa^2 - \frac{Pa^3}{2l} + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_1 = C_2 + \frac{Pa^2}{2}.$$

Вычисляем интеграл, учитывая граничное условие  $\omega(0) = 0$

$$W = -\frac{1}{D} \begin{cases} P \frac{x^3}{6} \left(1 - \frac{a}{l}\right) + C_1 x, & x \in (0, a) \\ Pa \frac{x^2}{2} \left(1 - \frac{x}{3l}\right) + C_2 x + C_3, & x \in (a, l) \end{cases}. \quad (18)$$

В силу непрерывности при  $x = a$

$$P \frac{a^3}{6} - P \frac{a^4}{6l} + C_1 a = P \frac{a^3}{2} - \frac{Pa^4}{6l} + C_2 a + C_3 \quad \Rightarrow \quad C_3 = \frac{Pa^3}{6}.$$

В силу граничного условия  $\omega = 0$  при  $x = l$

$$P \frac{al^3}{3} - C_2 l + C_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = -\frac{Pa}{3l} \left( l^2 + \frac{a^2}{2} \right).$$

Следовательно,

$$C_1 = C_2 + \frac{Pa^2}{2} = \frac{Pa}{l} \left( \frac{al}{2} - \frac{l^2}{3} - \frac{a^2}{6} \right).$$

Если сосредоточенная сила действует на расстоянии  $a > \frac{l}{2}$ , то максимальный прогиб достигается при  $x \in (0, a)$ . В этой точке

$$\frac{dW}{dx} = 0, \quad -\frac{1}{D} \left( P \frac{x^2}{2} \left( 1 - \frac{a}{l} \right) + C_1 x \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \sqrt{\frac{-2C_1}{P(1-\frac{a}{l})}}.$$

$$W_{max} = -\frac{1}{D} \left( P \frac{x^3}{6} \left( 1 - \frac{a}{l} \right) + C_1 x \right).$$

### 2.3.2 Действие сосредоточенного момента

Вычислим интеграл

$$\int M dx = \begin{cases} -\mu \frac{x^2}{2l} + C_1, & x \in (0, a) \\ \mu x \left( 1 - \frac{x}{2l} \right) + C_2, & x \in (a, l) \end{cases}.$$

Из условия непрерывности в точке  $a$  получаем

$$-\mu \frac{a^2}{2l} + C_1 = \mu a - \mu \frac{a^2}{2l} + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_1 = C_2 + \mu a.$$

Вычислим еще один интеграл с учетом граничного условия  $\omega(0) = 0$

$$W = -\frac{1}{D} \begin{cases} -\mu \frac{x^3}{6l} + C_1 x, & x \in (0, a) \\ \mu \frac{x^2}{2} \left( 1 - \frac{x}{3l} \right) + C_2 x + C_3, & x \in (a, l) \end{cases}. \quad (19)$$

В силу непрерывности прогиба при  $x=a$

$$-\mu \frac{a^3}{6l} + C_1 a = \mu \frac{a^2}{2} - \mu \frac{a^3}{6l} + C_2 a + C_3 \quad \Rightarrow \quad C_3 = \mu \frac{a^2}{2}.$$

В силу граничного условия  $\omega(l) = 0$

$$\mu \frac{l^2}{3} + C_2 l + C_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = -\frac{\mu}{l} \left( \frac{l^2}{3} + \frac{a^2}{2} \right).$$

Следовательно,

$$C_1 = C_2 + \mu a = \frac{\mu}{l} \left( al - \frac{l^2}{3} - \frac{a^2}{2} \right).$$

Определим точку максимального прогиба, предполагая, что  $a \geq \frac{l}{2}$

$$\frac{dW}{dx} = 0, \quad \frac{1}{D} \left( \mu \frac{x^2}{2l} - C_1 \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \sqrt{\frac{2lC_1}{\mu}}.$$

Максимальный прогиб в этой точке вычисляется по формуле

$$W_{max} = \frac{1}{D} \left( \mu \frac{x^3}{6l} - C_1 x \right).$$

### 2.3.3 Относительная ошибка

Таблица 2 – Характеристики некоторых композитов.

Цвет	Компоненты	$E_m$ , GPa	$E_a$ , GPa
Черный	Эпоксидная смола + карбон	4.8	200
Зеленый	Термопластик + стекло	25	73
Синий	Алюминий + бор	70	441

Для того чтобы показать на сколько важно учитывать разнопрочность, возьмем для примера композиты из таблицы 2.

Была разработана программа для вычисления относительной ошибки прогиба. Напомним, что прогиб вычисляется по формулам (18) и (19), а коэффициент D по формуле (17). Относительная ошибка вычисляется по формуле

$$error = \frac{(W - W_{sym})}{W_{sym}},$$

где W- прогиб, в котором учитывается разнопрочность материала;

$W_{sym}$  – прогиб, в котором не учитывается разнопрочность материала.

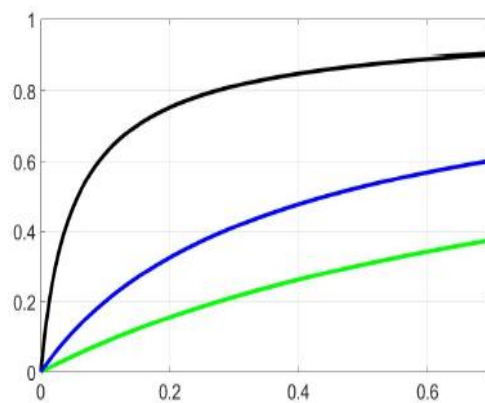


Рисунок 10 – Относительная ошибка.

На рисунке 10 мы можем увидеть, что неучет разнопрочности, может привести к ошибке от 30% до 90%.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получены следующие результаты:

1. Вычислена цилиндрическая жесткость балки из однонаправленного волокнистого композита, с учетом разного сопротивления материала растяжению и сжатию.

2. в задаче о трёхточечном изгибе балки получено аналитическое выражение для прогиба балки в случаях действия сосредоточенной силы и сосредоточенного момента. Показано, что неучет разнопрочности композитного материала может привести к ошибке 30-90%.

3. Установлено, что при изгибе слоистой пластины из композитных слоев с разным сопротивлением растяжению и сжатию положение нейтральной линии определяется однозначно. Предложен численный алгоритм определения нейтральной линии.



## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Амбарцумян, С.А. Разномодульная теория упругости / С.А. Амбарцумян. – Москва: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. – 320 с.
2. Браутман, Л. Армированные волокнистые пластины: В кн.: Современные композиционные материалы / Л. Браутмана, Р. Крона. – Москва: Мир, 1970. – 503 с.
3. Деревянко, Н.И. Свойство армированного полистирола при кратковременном растяжении, сжатии и изгибе / Н.И. Деревянко. – Механика полимеров, 1968. – 102 с.
4. Джонс, Р.М. Выпучивание круговых цилиндрических оболочек с различными модулями ортотропии на растяжение и сжатие / Р.М. Джонс. – Ракетная техника и космонавтика 1971. – 38 с.
5. Ломакин, Е.В. Соотношения теории упругости для изотропного разномодульного тела / Е.В. Ломакин, Ю.Н. Работнов. – Изв. АН СССР: МТТ, 1978. – 301 с.
6. Любимов, Б.Я. Диффузные процессы в неоднородных твердых средах / Б.Я. Любимов. – Москва: Наука: Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 267 с.
7. Мэтьюз, Ф. Композитные материалы. Механика и технология / Ф. Мэтьюз, Р. Ролингс. – Москва: Техносфера, 2004. – 408 с.
8. Работнов, Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела / Ю.Н. Работнов. – Москва: Наука: Главная редакция физико-математической литературы, 1979. – 744 с.
9. Соколкин Ю.В. Механика деформирования и разрушения структурно неоднородных тел./ Ю.В. Соколкин, А.А. Ташкинов. – Москва: Наука, 1984. – 115с.