Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики
Кафедра алгебры и математической логики

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
_______ /В.М. Левчук
«__» ________ 2017 г.

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

О СТУКТУРНОЙ ПОЛНОТЕ НЕКОТОРЫХ ТАБЛИЧНЫХ И ПРЕДТАБЛИЧНЫХ МОДАЛЬНЫХ ЛОГИК

Направление 01.04.01 Математика

Магистерская программа 01.04.01.02 Алгебра, логика и дискретная математика

Научный руководитель
кандидат физико-математических наук, __________ /В. Р. Кияткин
доцент

Выпускник __________ /М. В. Жоранова

Красноярск 2017

АННОТАЦИЯ

Цель работы — исследование вопроса о структурной полноте предтабличных модальных логик $PT1$ и $PT5$ и всех их табличных расширений.

В работе применялись методы и аппарат реляционной и алгебраической семантики модальных логик. В результате проведённых исследований доказана структурная полнота логики $PT1$ и всех её расширений, доказана структурная неполнота логики $PT5$ и всех её расширений кроме $\sigma(PC)$ и For_M. В качестве следствия установлена структурная полнота суперинтуиционистской логики LC и всех её табличных расширений.

Ключевые слова: модальная логика, N-характеристическая модель, шкала, модель, истинность формулы на модели, сгусток, антицепь, р-морфизм, модальная алгебра, допустимое правило вывода, производное правило вывода, структурная полнота.

ABSTRACT

The operation purpose — a research of a question of a structural completeness preplate modal the logician of $PT1$ and $PT5$ and all of them plate extensions.

In operation methods and the device of relational and algebraic semantics modal the logician were applied. As a result of the conducted researches a structural completeness of logic of $PT1$ and all its extensions is proved, structural incompleteness of logic of $PT5$ and all its extensions except $\sigma(PC)$ and For_M is proved. As the investigation a structural completeness of superintuitionistic logic of LC and all its plate extensions is set.

Keywords: modal logic, N - characteristic model, a scale, model, truth of a formula on models, a bunch, an anti-circuit, p-morphism, modal algebra, the admissible inference rule, the derivative inference rule, a structural completeness.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Правила, которые можно добавить к постулированным правилам вывода так, чтобы это не расширило множество теорем данной логики, называются допустимыми. Допустимые правила существенно ускоряют и упрощают вывод теорем. Поэтому обладание как можно бо́льшим количеством допустимых правил очень желательно. В связи с этим возникает проблема распознавания допустимых правил (Фридман). В классической пропозициональной логике таковая проблема решается тривиально — допустимыми являются только доказуемые правила (их ещё называют производными), то есть правила, заключение которых может быть выведено из посылок с помощью теорем и постулированных правил вывода. Логику называют структурно полной, если любое её допустимое правило является производным. Если логика допускает тот или иной вариант теоремы дедукции, то определение производности правила в логике может быть сведено к определению выводимости в ней некоторой специальной формулы. Таким образом, логика структурно полная, если множества допустимых и производных правил совпадают. Структурно полные логики имеют очень сильную дедуктивную систему и являются в некотором смысле уникальными. Они являются логиками "в себе окончательно и совершенно полными, поскольку они содержат в себе все необходимые правила. Однако, свойство структурной полноты не является инвариантом данной логики, а зависит от выбора аксиоматической системы и поэтому оно очень чувствительно в этом отношении.

Проблема Фридмана для нестандартных логик была решена В.В.Рыбаковым в середине 80-х годов (см. [1]). На основе разработанной им техники была доказана разрешимость по допустимости многих самых востребованных логик: $K4, S4, Gl, Grz$ и других. В нестандартных логиках были обнаружены допустимые, но не производные правила вывода. Например. таково следующее правило для интуиционистской логики Int (Р.Харроп,1960 г.):

$$r := \frac{\neg A \to (B \vee C)}{(\neg A \to B) \vee (\neg A \to C)}.$$

Причина структурной полноты или неполноты была обнаружена Рыбаковым. Она заключается в несовпадении многообразия, соответствующго логике λ с квазимногообразием, порождённым свободной алгеброй счётного ранга из этого многообразия, то есть:

$$Var(\lambda) \neq (\mathfrak{F}_\omega(\lambda))^Q.$$

Структурно полные логики — это логики, которые нельзя расширить, добавив новые правила вывода, сохраняя при этом множество теорем. Но для многих востребованных классов логик множество правил вывода фиксируется, а аксиоматическая система выбирается с помощью изменения множества аксиом. Поэтому для таких классов логик понятие структурной полноты значимо и очень желательно. Как же оценить это свойство структурной полноты? Обладание свойством структурной полноты — это приемущество или недостаток? Наследуется ли структурная полнота предтабличных логик в их расширениях?

Особый интерес представляет описание классов структурно-полных логик над S4. Мы остановим свое внимание на предтабличных модальных логиках $PT1$ и $PT5$ и их табличных расширениях, и исследуем, обладают ли они свойством структурной полноты.

1 Основные понятия и предварительные сведения из теории модальных систем

1.1 Синтаксис модальных систем

Алфавит модальных логик состоит из пропозициональных переменных $P = \{p_1, p_2, \dots\}$, логических связок $\neg$, $\wedge$, $\vee$,$\rightarrow$,$\Diamond$,$\Box$ и скобок $()$.

Правила образования формул: к правилам образования формул классического исчисления высказываний добавляется правило: если A — формула, то $\Box A$ и $\Diamond A$ — тоже формулы. Множество всех модальных формул обозначают For_M.

Правила вывода:

$$R1: \ \frac{A, (A \rightarrow B)}{B} \ \text{— modus ponens,}$$

$$R2: \ \frac{A}{\Box A} \ \text{— правило Гёделя,}$$

$$R3: \ \frac{A\,(p_1, \dots, p_n)}{A\,(B_1, \dots, B_n)}, \quad \text{где} \quad B_1, \dots, B_n \in For_M.$$

Квазитавтологией называется формула, полученная из тавтологии исчисления высказываний заменой переменных на некоторые формулы из For_M.

Аксиомами модальной системы K являются все квазитавтологии и формулы:

A_0: $\Box\,(A \vee \neg A) \equiv (A \vee \neg A)$,

A_1: $\Box\,(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$.

Модальной логикой называется подмножество λ из For_M, если оно содержит все теоремы из логики K и замкнуто относительно правил $R1$, $R2$, $R3$.

Аксиомами модальной системы (логики) $GL + bw_2$ являются все квазитавтологии, формулы A_0 и A_1, а также:

A_2: $\Box A \rightarrow \Box\Box A$ и

bw_2: $(\bigwedge\limits_{0 \leqslant i \leqslant 2} \Diamond p_i \rightarrow \bigvee\limits_{0 \leqslant i \neq j \leqslant 2} (\Diamond(p_i \wedge (p_j \vee \Diamond p_j)))$

Правила вывода: $R1$, $R2$, $R3$.

1.2 Семантика Крипке для модальных систем и семантические понятия

Шкалой называется пара $F = \langle W, R \rangle$, где W — непустое множество, R — бинарное отношение, определенное на W $R \subseteq W \times W$.

Шкала $F = \langle W, R \rangle$ называется рефлексивной, транзитивной или симметричной, если таковым является отношение R.

Моделью называется тройка $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$, где V — отображение множества P всех пропозициональных переменных во множество всех подмножеств множества W, то есть $P \rightarrow 2^M$. V называют означиванием.

Истинность формулы на элементе (в точке) $a \in \mathcal{M}$ определяется индуктивно:

$a \models_V p_i \Leftrightarrow a \in V(p_i)$,

$a \models_V (A \& B) \Leftrightarrow a \models_V A$ и $a \models_V B$,

$a \models_V (A \vee B) \Leftrightarrow a \models_V A$ или $a \models_V B$,

$a \models_V (A \to B) \Leftrightarrow$ или $a \not\models_V A$, или $a \models_V B$,

$a \models_V \neg A \Leftrightarrow a \not\models_V A$,

$a \models_V \Box A \Leftrightarrow \forall b \in W \, (aRb \Rightarrow b \models_V A)$.

Формула A истинна в модели $\mathcal{M}$, если $\forall a \in \mathcal{M} \, (a \models_V A)$. Обозначение $\mathcal{M} \models A$.

Формула A истинна на шкале $F = \langle W, R \rangle$, если она истинна в модели $\langle W, R, V \rangle$ при любом означивани V. Обозначение $F \models A$.

Шкала называется адекватной для модальной логики λ, если для любой формулы A, доказуемой в λ $(A \in \lambda)$, следует $F \models A$.

Класс шкал $\mathcal{K}$ называется характеристическим для логики λ, если формула A доказуема в λ тогда и только тогда, когда она истинна на всех шкалах из $\mathcal{K}$.

Модальная логика λ называется финитно апроксимируемой, если существует класс конечных шкал, характеристический для λ.

Модель $\mathcal{M}$ называется n-характеристической для логики λ, если для любой формулы $A = A(p_1, \ldots, p_n)$ выполняется: $A \in \lambda \Leftrightarrow \mathcal{M} \models A$.

Означивание V в модели $\mathcal{M}$ называется формульным, если для любой пропозициональной переменной p_i найдется формула A_i такая, что $V(p_i) = \{a \mid a \in W, a \models_V A_i\}$.

Множество $X \subset W$ называется формульным, если:

$$\exists A_i \, (X = \{a \mid a \in W, a \models_V A_i\}).$$

Элемент $a \in W$ называется формульным, если множество $X = \{a\}$ формульно.

Если $F = \langle W, R \rangle$ и $F' = \langle W', R' \rangle$ — шкалы и $W' \subseteq W, R' = R \restriction W'$, то F' называется подшкалой шкалы F.

Если $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$ и $\mathcal{M}' = \langle W', R', V' \rangle$ — модели, подшкала шкалы $F = \langle W, R \rangle$ — $F' = \langle W', R' \rangle$ и $V' = V \restriction W'$, то говорят, что $\mathcal{M}'$ — подмодель модели $\mathcal{M}$.

Если F' подшкала шкалы F ($\mathcal{M}'$ подмодель модели $\mathcal{M}$), то F' называется открытой подшкалой шкалы F ($\mathcal{M}'$ открытой подмоделью модели $\mathcal{M}$), если $(\forall a \in W)(\forall b \in W')(bRa \Rightarrow a \in W')$.

Сгустком шкалы F называется подмножество $C \subseteq W$ со свойствами:

1. $(\forall a, b \in C)(aRb \& bRa)$;
2. $(\forall a \in C, b \in W)((aRb \& bRa) \Rightarrow b \in C)$;
3. $C = \{a\}$, где a — иррефлексивный элемент.

Говорят,что множество сгустков образует антицепь, если сгустки этого множества попарно несравнимы по R.

Отображение φ шкалы $F = \langle W, R\rangle$ в шкалу $F' = \langle W', R'\rangle$ называется p-морфизмом, если:

1. $(\forall a, b \in W)\,(aRb \Rightarrow \varphi(a)R'\varphi(b))$;
2. $(\forall a, b \in W)\,(\varphi(a)R'\varphi(b)) \Rightarrow (\exists c \in W)\,(aRc\&\varphi(c) = \varphi(b))$.

Верхним конусом элемента a в транзитивной модели $\langle W, R, V\rangle$ называют множество

$$a^{R\leqslant} = \{b \mid \quad (b \in W)\&(aRb)\}.$$

Модель $\mathcal{M}_1 = \langle W_1, R_1, V_1\rangle$ называется открытой подмоделью модели $\mathcal{M}_2 = \langle W_2, R_2, V_2\rangle$, если:

1. $\langle W_1, R_1\rangle$ открытая подшкала шкалы $\langle W_2, R_2\rangle$;
2. $Dom\,(V_1) = Dom\,(V_2)$ и $(\forall p_i \in Dom\,(V_1))\,(V_1\,(p_i) = V_2\,(p_i) \cap W_1)$.

Здесь $Dom\,(V)$ — множество означиваемых пропозициональных переменных $P = \{p_1, p_2, ...\}$.

Шкала $\langle W_1, R_1\rangle$ называется открытой подшкалой шкалы $\langle W_2, R_2\rangle$, если $W_1 \subseteq W_2, R_1 = R_2 \cap W_1^2$ и более того $(\forall a \in W_1)\,(\forall b \in W_2)\,(aR_1b \Rightarrow b \in W_1)$.

Отображение φ шкалы $\langle W_1, R_1\rangle$ в шкалу $\langle W_2, R_2\rangle$ называется p–морфизмом, если:

1. $(\forall a, b \in W_1)\,(aR_1b \Rightarrow \varphi(a)\,R_2\varphi(b))$;
2. $(\forall a, b \in W_1)(\varphi(a)R_2\varphi(b) \Rightarrow (\exists c \in W_c)(aR_1c\&(\varphi(c) = \varphi(b)))$.

Отображение φ шкалы $\langle W_1, R_1, V_1\rangle$ в шкалу $\langle W_2, R_2, V_2\rangle$ называется p–морфизмом, если:

1. φ есть p–морфизм шкалы $\langle W_1, R_1\rangle$ в шкалу $\langle W_2, R_2\rangle$;
2. $Dom\,(V_1) = Dom\,(V_2)$;
3. $(\forall p_i \in Dom\,(V_1))\,(\forall a \in W_1)\,(a \models_{V_1} p_i \Leftrightarrow \varphi\,(a) \models_{V_2} p_i)$.

1.3 Правила вывода в модальных системах

Правило вывода:

$$R : \frac{A_1\,(p_1, \ldots, p_n)\,, \ldots, A_m\,(p_1, \ldots, p_n)}{B\,(p_1, \ldots, p_n)}$$

называется допустимым в логике λ, если для любого набора формул $c_1, ..., c_n$ из того, что $A_1\,(c_1, \ldots, c_n) \in \lambda, \ldots, A_m\,(c_1, \ldots, c_n) \in \lambda$, следует $B\,(c_1, \ldots, c_n) \in$ $\in \lambda$. Обозначение $R \in Ad\,(\lambda)$.

Если в логике λ : $(A\&B) \in \lambda \Leftrightarrow (A \in \lambda \quad \text{и} \quad B \in \lambda,)$ то

$$\frac{A_1, \ldots, A_n}{B} \in Ad(\lambda) \Leftrightarrow \frac{A_1 \& \ldots \& A_n}{B} \in Ad(\lambda).$$

В таких логиках можно рассматривать только однопосылочные правила вывода вида:

$$(*) \qquad r = \frac{A\,(p_1, \ldots, p_n)}{B\,(p_1, \ldots, p_n)}.$$

Правило вывода $(*)$ истинно в модели $\mathfrak{M} = \langle W, R, V \rangle$, если из того, что $\mathfrak{F} \models A\,(p_1, \ldots, p_n)$ следует $\mathfrak{F} \models B\,(p_1, \ldots, p_n)$, где $\mathfrak{F} = \langle W, R \rangle$.
Пусть $\mathcal{F} = \langle F, R \rangle$ фрейм. Алгебра $\mathcal{F}^+ := \langle 2^W, \wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \Box, \bot, \top \rangle$, где

1. $\langle 2^W, \wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \Box, \bot, \top \rangle$ есть булева алгебра всех подмножеств W,
2. $\forall X \subseteq W(\Box X := \{\forall y(\langle a, y\rangle \in R \Rightarrow (y \in X))\})$,

называется ассоциативной модальной алгеброй для фрейма $\mathcal{F}$.

Лемма 1.1. *Для любого фрейма $\mathcal{F}$, алгебра $\mathcal{F}^+$ есть модальная алгебра.*

Теорема 1.1 (Об алгебраической полноте.)**.** *Формула α является теоремой алгебраической логики λ тогда и только тогда, когда тождество $\overline{\alpha} = \top$ истинно в многообразии алгебр $Var(\lambda)$, где*

$$Var(\lambda) = \{\mathfrak{A} \mid \forall \alpha \in \lambda(\mathfrak{A} \models \alpha = \top), \forall\alpha\forall\beta(\vdash_\lambda \alpha \equiv \beta \Rightarrow \mathfrak{A} \models \alpha = \beta)\}$$

Логика λ называется табличной, если существует конечная алгебра $\mathfrak{A}$ из $Var(\lambda)$, которая порождает $Var(\lambda)$.
Логики, максимальные в классе нетабличных, называются предтабличными.

Предтабличные логики, расширяющие $S4$:

$PT1 = \lambda(\{\mathcal{F} \mid \|\mathcal{F}\| < \omega,\ \mathcal{F} \in RF,\ \mathcal{F}$ — линейно упорядоченное множество$\})$;

$PT2 = \lambda(\{\mathcal{F} \mid \|\mathcal{F}\| < \omega,\ \mathcal{F} \in RF,\ \mathcal{F}$ — частично упорядоченное множество, $depth(\mathcal{F}) \leq 2\})$;

$PT3 = \lambda(\{\mathcal{F} \mid \|\mathcal{F}\| < \omega,\ \mathcal{F} \in RF,\ \mathcal{F}$ — частично упорядоченное множество, $depth(\mathcal{F}) \leq 3,\ \exists m \in \mathcal{F} \forall x \in \mathcal{F}(x \leq m)\})$;

$PT4 = \lambda(\{\mathcal{F} \mid \|\mathcal{F}\| < \omega,\ \mathcal{F} \in RF,\ \mathcal{F}, depth(\mathcal{F}) \leq 2,\ \exists m \in \mathcal{F} \forall x \in \mathcal{F}[(x \leq m)\ \&\ (mRx \Rightarrow x = m)]\})$;

$PT5 = \lambda(\{\mathcal{F} \mid \|\mathcal{F}\| < \omega,\ \mathcal{F} \in RF,\ \mathcal{F}, depth(\mathcal{F}) = 1\})$.

Логика λ называется финитно-аппроксимируемой, если для любой формулы α, не являющейся теоремой λ, существует конечная алгебра $\mathfrak{A}$ из $Var(\lambda)$ такая, что $\mathfrak{A} \not\models \alpha$.

Пусть $\mathfrak{M} := \langle W, R, V \rangle$ модель, в которой область означивания V является множеством пропозициональных переменных P. Мы определим алгебру $\mathfrak{M}^+$, как подалгебру $\langle W, V \rangle^+$, порожденную множеством элементов

$\{V(p)|p \in P\}$. Алгебра $\mathfrak{M}^+$ называется модальной алгеброй, ассоциированной с моделью $\mathfrak{M}$.

Фильтр Δ на булевой алгебре $\mathcal{B}$ называется ультрафильтром тогда, когда Δ — нетривиальный ($\perp \notin \Delta$) и $\forall a \in |\mathcal{B}|$ или $a \in \Delta$ или $\neg a \in \Delta$.

Пусть $\mathfrak{B}$ есть модальная алгебра. Подставление Стоуна для $\mathfrak{B}$ есть модель $\mathfrak{B}^+ := \langle W_{\mathfrak{B}}, R, V\rangle$, где

1. $W_{\mathfrak{B}}$ множество ультрафильтров $\mathfrak{B}$,
2. $\forall \Delta_1, \Delta_2 \in W_{\mathfrak{B}}, \langle \Delta_1, \Delta_2\rangle \in R \Leftrightarrow (\forall x \in |\mathfrak{B}|)(\Box x \in \Delta_1 \Rightarrow x \in \Delta_2)$,
3. $Dom(V) := \{a|a \in |\mathfrak{B}|\}, \forall a \in |\mathfrak{B}|, V(a) := \{\Delta|\Delta \in W_{\mathfrak{B}}, a \in \Delta\}$.

Теорема 1.2 (Теорема о представлении Стоуна)**.** . *Для любой модальной алгебры $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}$ изоморфно вложима в модальную алгебру $\mathfrak{B}^{++}$. То есть $\mathfrak{B}$ есть подалгебра $\mathfrak{F}(\mathfrak{B}^+)^+$. В частности, если $\mathfrak{B}$ конечна, то $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{F}(\mathfrak{B}^+)^+$, и для любого конечного фрейма $\mathcal{F}, \mathcal{F}^{++} \cong \mathcal{F}$.*

Теорема 1.3. *1) Для любого корневого фрейма $\mathcal{F}$, алгебра $\mathcal{F}^+$ подпрямо неразложима.*
2) Если $\mathfrak{B}$ подпрямо неразложимая алгебра, то фрейм $\mathfrak{F}(\mathfrak{B}^+)$ — корневой.

Теорема 1.4. *Если существует гомоморфизм g модальной алгебры $\mathfrak{B}_1$ в модальную алгебру $\mathfrak{B}_2$, то $\mathfrak{F}(\mathfrak{B}_2^+)$ есть открытый подфрейм фрейма $\mathfrak{F}(\mathfrak{B}_1^+)$.*

Лемма 1.2. *Если f p-морфизм модели $\mathfrak{M}_1 := \langle W_1, R_1, V_1\rangle$ на модель $\mathfrak{M}_2 := \langle W_2, R_2, V_2\rangle$, то для любой формулы α, которая построена из переменных из области означивания V_1,*

$$\forall a \in W_1(a \Vdash_{V_1} \alpha \Leftrightarrow f(a) \Vdash_{V_2} \alpha).$$

Предложение 1.1. *Если $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ фреймы и существует p-морфизм f с $\mathcal{F}_1$ на $\mathcal{F}_2$, то $\lambda(\mathcal{F}_1) \subseteq \lambda(\mathcal{F}_2)$*

Лемма 1.3. *Пусть f p-морфизм модели $\mathfrak{M}_1 := \langle W_1, R_1, V_1\rangle$ на модель $\mathfrak{M}_2 := \langle W_2, R_2, V_2\rangle$. Тогда существует изоморфизм модальной алгебры $\mathfrak{M}_2^+$ в алгебру $\mathfrak{M}_1^+$.*

Лемма 1.4. *Пусть f p-морфизм фрейма $\mathcal{F}_1 := \langle W_1, R_1\rangle$ на фрейм $\mathcal{F}_2 := \langle W_2, R_2\rangle$. Тогда существует изоморфизм модальной алгебры $\mathcal{F}_2^+$ в алгебру $\mathcal{F}_1^+$.*

Теорема 1.5. *Пусть $\mathfrak{B}_1$ подалгебра модальной алгебры $\mathfrak{B}_2$. Тогда существует p-морфизм с фрейма $\mathfrak{F}(\mathfrak{B}_2^+)$ на фрейм $\mathfrak{F}(\mathfrak{B}_1^+)$.*

Теорема 1.6. *Любой элемент модели $Ch_{K4}(n)$ является определимым. В частности, для любой нормальной модальной логики λ, расширяющей $K4$ и имеющей fmp, каждый элемент $Ch_\lambda(n)$ определимый.*

Теорема 1.7. *Правило вывода r истинно в логике $\lambda \supseteq K4$ тогда и только тогда, когда оно производно.*

Логика λ называется структурно-полной, если любое допустимое в λ правило производно. Из теоремы 1.6 следует, что в структурно-полной логике $\lambda \supseteq K4$ любое допустимое правило истинно.

Теорема 1.8. *Пусть λ нормальная модальная логика, $\mathfrak{M}_n := \langle M, R, V\rangle$ — n-характеристическая модель для λ, $Dom(V) := \{p_1, \ldots, p_n\}$. Подалгебра $\mathfrak{M}_n^+(V(p_1), \ldots, V(p_n))$ ассоциативной алгебры $\langle M, R\rangle^+$, порожденной элементами $V(p_1), \ldots, V(p_n)$ есть свободная алгебра ранга n из $Var(\lambda)$. Более того, элементы $V(p_1), \ldots, V(p_n)$ являются свободными порождающими $\mathfrak{F}_n(\lambda)$. В частности, для любой модальной логики λ, расширяющей K4 и имеющей fmp, $Var(\lambda)$ изоморфно вложима в модальную алгебру $Ch_\lambda(n)^+(V(p_1), .$*

Теорема 1.9. *Пусть λ — модальная логика, расширяющая K4 или суперинтуиционистская логика и пусть λ имеет fmp. Тогда λ структурно-полная тогда и только тогда, когда любая подпрямо неразложимая конечная алгебра $\mathfrak{A}$ из $Var(\lambda)$ изоморфно вложима в свободную алгбру $\mathfrak{F}_\lambda(q)$ конечного ранга q из $Var(\lambda)$ для некоторого q.*

Эта теорема справедлива и для суперинтуиционистских логик. Вследствие этого, например, классическое исчисление высказывание — логика PC — структурно полная, суперинтуиционистская логика LC и все ее расширяющие - тоже.

Теорема 1.10. *Алгебраическая логика λ структурно полна тогда и только тогда, когда некоторая подпрямо-неразложимая алгебра $\mathfrak{A}$ из $Var(\lambda)$ является членом квазимногообразия $(\mathfrak{F}_\lambda(\omega))^Q$, порожденного алгеброй $\mathfrak{F}_\lambda(\omega)$, или, эквивалентно, если $Var(\lambda) = (\mathfrak{F}_\lambda(\omega))^Q$*

Пусть λ — модальная логика, расширяющая $K4$ или суперинтуиционистская логика и пусть λ имеет fmp. Тогда n-характеристическую модель можно построить следующим образом:

1) В каждой конечной модели, означенной с помощью n различных переменных и адекватную данной логике, p-морфно сожмём все элементы, которые можно было бы p-морфно склеить.

2) В дизъюнктном объединении полученных моделей также p-морфно сожмем все элементы, которые можно p-морфно сжать. Получившаяся модель будет n-характеристической моделью. Обозначим ее $Ch_\lambda(n)$.

Приведем реляционный аналог теоремы 1.8 для табличных логик, расширяющих $K4$.

Теорема 1.11. *Пусть λ — табличная логика, расширяющая $K4$. Логика λ структурно-полная тогда и только тогда, когда для любого корневого λ-*

фрейма F существует такое n, что $\mathcal{F}(Ch_\lambda(n))$ p-морфно отображается на F.

Теорема 1.12. *Пусть λ — финитно-аппроксимируемая логика, расширяющая $K4$. Тогда $\mathcal{F}(Ch_\lambda(n))$ является открытым подфреймом фрейма*

$$\mathfrak{F}(Ch_\lambda(n)^{++}(V(p_1), \ldots, V(p_n))).$$

Теорема 1.13. *Пусть λ — финитно-аппроксимируемая логика, расширяющая $K4$, $Ch_\lambda(n)$ — ее n-характеристическая модель. Тогда в $Ch_\lambda(n)^{++}$ выполняется следующее:*

1) из любого неглавного ультрафильтра достижим главный ультрафильтр первого слоя;

2) из любого неглавного ультрафильтра достижим главный ультрафильтр с каждого слоя.

Теорема 1.14 (Необходимое реляционное условие структурной полноты.)**.** *Пусть λ — финитно-аппроксимируемая логика, расширяющая $K4$. Если конечная подпрямо неразложимая алгебра $\mathfrak{A}$ изоморфно вложима в свободную алгебру $Ch_\lambda(n)^+(V(p_1), \ldots, V(p_n))$, то существует p-морфизм фрейма $\mathcal{F}(Ch_\lambda(n))$ на фрейм $\mathfrak{F}(\mathfrak{A}^+)$.*

Теорема 1.15. *Любая логика λ_1, расширяющая структурно-полную логику λ — сама структурно-полная.*

2 Решение поставленной задачи

Теорема 2.1. *Следующая модель является n-характеристической для предтабличной модальной логики $PT1$:*
$Ch_{PT1}(n) = \langle\{a_{\xi_1,\dots,\xi_d} \mid 1 \le d < \infty, \xi_i \subseteq \Omega, \xi_j \neq \xi_{j+1}, 1 \le j \le d-1\}, R_n, V_n\rangle$,
$\Omega = Dom(V_n) = \{y_1, \dots, y_n\}$,
$\langle a_{\xi_1,\dots,\xi_s}, a_{\zeta_1,\dots,\zeta_t}\rangle \in R_n \Leftrightarrow \forall k(1 \le k \le t)(\xi_k = \zeta_k) \wedge (s = t+1)$,
$V_n(y_i) = \{a_{\xi_1,\dots,\xi_d} \mid y_i \in \xi_d\}$.
Любой элемент модели $Ch_{PT1}(n)$ формульный.

Модель $Ch_{PT1}(n)$ есть прямое объединение 2^n подмоделей — компонент. Все элементы модели $Ch_{PT1}(n)$ индексируются с помощью всевозможных различных подмножеств $\xi_1, \dots, \xi_{2^n}$ множества Ω, пронумерованных каким-нибудь способом. Элемент a_ξ считаем максимальным в своей компоненте $B_i, 1 \le i \le 2^n$. Его глубина d равна 1. Полагаем $a_{\xi_i} \Vdash_{V_n} y_s$ тогда и только тогда, когда $y_s \in \xi_i$, то есть $\xi_i = V(a_{\xi_i})$ — означивание элемента ξ_i в модели $Ch_{PT1}(n)$. Для каждого ξ_i в качестве множества $\Lambda(a_{\xi_i})$ его непосредственных предшественников берем антицепь элементов

$$a_{\xi_i,\xi_1}, \dots, a_{\xi_i,\xi_{i-1}}, a_{\xi_i,\xi_{i+1}}, \dots, a_{\xi_i,\xi_{2^n}}.$$

В компоненте B_i они образуют множество элементов глубины $d = 2$. Полагаем $a_{\xi_i\xi_j} \Vdash_{V_n} y_s$ тогда и только тогда, когда $e_s \in \xi_j$, то есть $\xi_j = V(a_{\xi_i,\xi_j})$ будет означиванием элемента $a_{\xi_i,\xi_j}, 1 \le j \le 2^n$ и $j \neq i$. Затем для каждого элемента a_{ξ_i,ξ_j} в качестве множества $\Lambda(a_{\xi_i,\xi_j})$ его непосредственных предшественников берем антицепь элементов $a_{\xi_i,\xi_j,\xi_1}, \dots, a_{\xi_i,\xi_j,\xi_{j-1}}, \dots, a_{\xi_i,\xi_j,\xi_{2^n}}$. Они образуют множество элементов глубины $d = 3$ в компоненте B_i. Полагаем $a_{\xi_i\xi_j\xi_k} \Vdash_{V_n} y_s$ тогда и только тогда, когда $y_s \in \xi_k$, то есть $\xi_k = V(a_{\xi_i,\xi_j,\xi_k})$ будет означиванием элемента a_{ξ_i,ξ_j,ξ_k} для $1 \le k \le 2^n$ и $k \neq j$. Этот процесс продолжаем указанным способом, двигаясь по направлению от максимального элемента, увеличивая глубину $d = 3, 4, 5, \dots$. Таким образом, всякая компонента B_i получается последовательным достраиванием множеств непосредственных предшественников для каждого элемента. По существу же компонента B_i представляет из себя пучок бесконечных цепей с максимальным элементом. При этом любые два соседние элемента одной цепи имеют различные означивания. Модель $Ch_{PT1}(n)$ — это некоторая совокупность таких пучков.

Теорема 2.2. *Предтабличная модальная логика $PT1$ структурно полна.*

Доказательство. Рассмотрим фрейм $\mathcal{L}_n = \langle\{k \mid 0 \le k \le n+1\}, R\rangle$, где R — рефлексивное и транзитивное бинарное отношение, удовлетворяющее условию $(i, i+1) \in R$. По определению логики $PT1 : PT1 = \lambda(\{\mathcal{L}_n\}, n \in N)$.

Утверждение 2.1.

$$\mathfrak{F}_\omega(PT1) \Vdash \forall\overline{x}((f=1)\to(g=1)) \Leftrightarrow \mathfrak{F}_\omega(PT1) \Vdash \forall\overline{x}((\Box f \to \Box g)=1).$$

Необходимость докажем контрпозицией.

Предположим $\mathfrak{F}_\omega(PT1) \not\Vdash \forall x((\Box f \to \Box g)=1)$. В силу финитной аппроксимации $PT1$ существует такое n, что $\mathcal{L}_n^+ \not\Vdash \forall\overline{x}((\Box f \to \Box g)=1)$.

$$\mathcal{L}_m^+(m\le n) : \mathcal{L}_m^+ \not\Vdash \forall\overline{x}((\Box f=1)\to(\Box g=1)).$$

По лемме 2 [5] $\mathcal{L}_m^+$ вложима в $\mathfrak{F}_\omega(PT1)$. Поэтому

$$\mathfrak{F}_\omega(PT1) \Vdash \forall\overline{x}((f=1)\to(g=1)).$$

Достатотчность:

Имеем

$$\mathfrak{F}_\omega(PT1) \Vdash \forall\overline{x}((\Box f \to \Box g)=1) \qquad (*)$$

Отсюда $(\Box f \to \Box g) \in PT1$. Пусть справедливо и $\mathfrak{F}_\omega(PT1) \Vdash (f=1)$. Тогда

$$f \in PT1 \text{ и } \Box f \in PT1 \qquad (**)$$

Из (??) и (??) по modus ponens $\Box g \in PT1$.

В $PT1$ справедлива аксиома $(\Box g \to g) \in PT1$. Снова по modus ponens получаем $g \in PT1$, а значит и $\mathfrak{F}_\omega(PT1) \Vdash (g=1)$, что и требовалось доказать. Из утверждения 2.1 следует, что $Var(PT1) = (\mathfrak{F}_\omega(PT1))^Q$.

По теореме 1.10 логика $PT1$ структурно полная. □

Теорема 2.3. *Любая модальная логика λ, расширяющая $PT1$, является структурно полной.*

Доказательство. Любая логика, расширяющая $PT1$ — табличная и по определению является финитно-аппроксимируемой. По построению $Ch_\lambda(n)$ является открытой подмоделью модели $Ch_{PT1}(n)$ и к тому же конечной.

Возьмем произвольную конечную подпрямо неразложимую алгебру $\mathfrak{A}$ из $Var(\lambda)$. Из свойств многообразий алгебра $\mathfrak{A}$ есть гомоморфный образ некоторой свободной алгебры $\mathfrak{F}_n(\lambda)$ конечного ранга n(ввиду конечности алгебры $\mathfrak{A}$).

Известно, что $\mathfrak{F}_n(\lambda) \cong Ch_\lambda(n)^+(V(p_1),\dots,V(p_n))$. Значит $\mathfrak{A}$ — гомоморфный образ этой алгебры. $Ch_\lambda(n)^+(V(p_1),\dots,V(p_n))$ — конечная алгебра. Таким образом

$$\mathfrak{F}(Ch_\lambda(n)^{++}(V(p_1),\dots,V(p_n))) = \mathfrak{F}(Ch_\lambda(n)).$$

По теореме 1.4 $\mathfrak{F}(\mathfrak{A}^+)$ является открытым подфреймом фрейма $\mathfrak{F}(Ch_\lambda(n))$.

По теореме 1.3 фрейм $\mathfrak{F}(\mathfrak{A}^+)$ — корневой. Отсюда найдется такое m, что $\mathfrak{F}(\mathfrak{A}^+) = \mathcal{L}_m$.

Фрейм $\mathfrak{F}(Ch_\lambda(n))$ может состоять из нескольких отдельных "елок"(см. Рисунок 2.1).

1.png

Рисунок 2.1 — фрейм $\mathfrak{F}(Ch_\lambda(n))$

Искомый р-морфизм фрейма $\mathfrak{F}(Ch_\lambda(n))$ на фрейм $\mathfrak{F}(\mathfrak{A}^+)$ можно построить так:

2.png

Рисунок 2.2 — фрейм $\mathfrak{F}(\mathfrak{A}^+) = \mathcal{L}_m$

Элементы первого слоя фрейма $\mathfrak{F}(Ch_\lambda(n))$ отображаем в элемент $m+1$ из $\mathcal{L}_m$; элементы второго слоя — в элемент m и так далее; элементы $(m+2)$-го слоя и всех остальных слоев в 0. Такое отображение — р-морфизм. Аналогично отображаем каждую «елочку». Искомый р-морфизм построен. По теореме 1.11 λ — структурно полная логика. $\square$

Определение 2.1. *Логика λ называется наследственно структурно полной, если любая логика λ_1, расширяющая λ, является структурно полной.*

Из теорем 2.2 и 2.3 следует, что $PT1$ — наследственно структурно полная.

Теорема 2.4. *Любая суперинтуиционистская логика λ является наследственно сруктурно полной тогда и только тогда, когда $\sigma(\lambda)$ является наследственно структурно полной.*

Непосредственно из этой теоремы получаем:

Теорема 2.5. *Суперинтуиционистская логика LC и ее любое расширение являются структурно полными.*

Теорема 2.6. *Предтабличная модальная логика $PT2$ не является структурно полной.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольная конечная подпрямо неразложимая алгебра из $Var(PT2)$. $\mathfrak{A}^+$ — представление Стоуна для $\mathfrak{A}$. Известно, что $\mathfrak{A}$ является гомоморфным образом свободной алгебры $\mathfrak{F}_n(PT2)$ ранга n многообразия $Var(PT2)$ для некоторого числа n.
$\mathfrak{F}_n(PT2) \cong Ch_{PT2}(n)^+(V(p_1), \ldots, V(p_n))$, поэтому $\mathfrak{A}$ — гомоморфный образ этой алгебры.

Алгебра $Ch_{PT2}(n)^+(V(p_1), \ldots, V(p_n))$ — конечная, значит

$$\mathcal{F}(Ch_{PT2}(n)^{++}(V(p_1), \ldots, V(p_n))) = \mathcal{F}(Ch_{PT2}(n)).$$

По теореме 1.4 $\mathfrak{F}(\mathfrak{A}^+)$ — открытый подфрейм фрейма $\mathfrak{F}(Ch_{PT2}(n))$. По теореме 1.3 $\mathfrak{F}(\mathfrak{A}^+)$ — корневой. Ввиду произвольности выбора алгебры $\mathfrak{A}$ из $Var(PT2)$ следует считать, что $\mathfrak{F}(\mathfrak{A}^+)$ — это корневой фрейм глубины 2 (см. Рисунок 2.3) с элементом a в качестве корня и элементами $b_1, \ldots, b_n$ в первом слое.

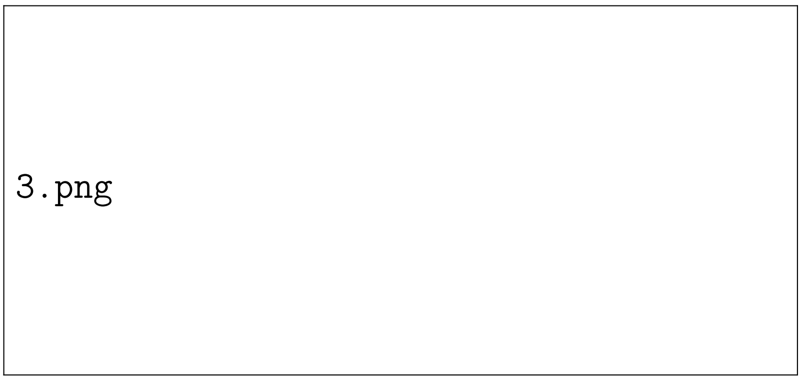

Рисунок 2.3

Можем утверждать, что р-морфизма из $\mathfrak{F}(Ch_{PT2}(n))$ в $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ построить невозможно, поскольку невозможно отобразить в $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ ни один корневой подфрейм глубины 2 если у него в первом слое элементов меньше, чем m.

По теореме 1.12 логика $PT2$ не является структурно полной. $\square$

Пусть $P_n = \{p_1, \cdots, p_n\}$ — множество пропозициональных переменных. Определим множество $C_X = \{a_y \mid y \in X\}$, где $X \in \mathcal{B}(P_n)$ и $\mathcal{B}(P_n)$ — булеан от P_n.

Рассмотрим модель

$$Ch_{PT5}(n) = \langle \bigcup_{X \subseteq \mathcal{B}(P_n)}, R, V \rangle,$$

где $(a_{y_1}, a_{y_2}) \in R \Leftrightarrow y_1, y_2 \in X$ и R — рефлексивно и транзитивно

$$V(p) = \{a_y \mid p \in y\}.$$

Теорема 2.7. *1) $Ch_{PT5}(n)$ — является n-характеристической моделью для модальной логики $PT5$; 2) каждый элемент $Ch_{PT5}(n)$ формульный.*

Попросту говоря, модель $Ch_{PT5}(n)$ представляет из себя совокупность 2^{2^n} сгустков элементов с попарно различным означиванием.

Теорема 2.8. *Предтабличная модальная логика $PT5$ не является структурно полной.*

Доказательство. Отметим, что логика $PT5$ — финитно-аппроксимируемая.

Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольная конечная подпрямо неразложимая алгебра из $Var(PT5)$. Пусть $\mathfrak{A}^+$ есть представление Стоуна для $\mathfrak{A}$ и $|\mathfrak{A}^+| = n$. Из свойств многообразий следует, что $\mathfrak{A}$ есть гомоморфный образ свободной алгебры $\mathfrak{F}_n(PT5)$ ранга n многообразия $Var(PT5)$.

Известно, что $\mathfrak{F}_n(PT5) \cong Ch_{PT5}(n)^+(V(p_1), \ldots, V(p_n))$, поэтому $\mathfrak{A}$ — гомоморфный образ этой алгебры.

Алгебра $Ch_{PT5}(n)^+(V(p_1), \ldots, V(p_n))$ —конечна, а значит

$$\mathfrak{F}(Ch_{PT5}(n)^{++}(V(p_1), \ldots, V(p_n))) = \mathfrak{F}(Ch_{PT5}(n)).$$

По теореме 1.4 $\mathfrak{F}(\mathfrak{A}^+)$ есть открытый подфрейм фрейма $\mathfrak{F}(Ch_{PT5}(n))$.

По теореме 1.3 $\mathfrak{F}(\mathfrak{A}^+)$ — корневой. Отсюда $\mathfrak{F}(\mathfrak{A}^+)$ — это отдельный сгусток. Обозначим его C и пусть $|C| = m$. Можем утверждать, что p-морфизма из $\mathfrak{F}(Ch_{PT5}(n))$ на C построить невозможно, поскольку не удастся отобразить в C все сгустки, чья мощность меньше m.

Согласно необходимому реляционному условию (теорема 1.14) логика $PT5$ не является структурно полной. □

Теорема 2.9. *Любая модальная логика λ расширяющая $PT5$ не является структурно полной, исключая логику $\sigma(PC)$ и For_M.*

Доказательство. Любая логика λ, расширяющая $PT5$ — табличная и по определению является финитно-аппроксимируемой. По построению $Ch_\lambda(n)$ является открытой подмоделью модели $Ch_{PT5}(n)$, то есть является некоторым количеством сгустков из $Ch_{PT5}(n)$ с тем же означиванием. Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольная конечная подпрямо неразложимая алгебра из $Var(\lambda)$. Повторяя рассуждения из теоремы 2.8, устанавливаем, что $\mathfrak{A}^+$ состоит из одного лишь сгустка C, $|C| = m$. Снова можем утверждать, что p-морфизма

$\mathfrak{F}(Ch_\lambda(n))$ на $\mathfrak{F}(\mathfrak{A}^+)$ построить не удастся, поскольку отобразить все сгустки мощности меньше m в C невозможно. По теореме 1.11 логика λ не является структурно полной.

Исключение составляет случай, когда многообразие, из которого берутся алгебры $\mathfrak{A}$ есть $Var(\sigma(PC))$. В этом случае $\mathfrak{A}^+$ — одноэлементный сгусток и p-морфизм между $Ch_\lambda(n)$ и C можно построить, то есть $\sigma(PC)$ структурно полная логика. Таковой же является и абсолютно противоречивая логика For_M. $\square$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Наше исследование показало, что предтабличная модальная логика $PT1$ и все ее расширения структурно полны, а логика $PT5$ и все ее расширения, за исключением $\sigma(PC)$ и For_k не являются структурно полными. В качестве следствия мы установили структурную полноту суперинтуиционистской логики LC и всех ее расширений.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Rybakov, V. V. Admissibility of logical inference rules / V. V. Rybakov // Elsevier Publishers, Amsterdam, New-York, 1997.

2 Chagrov, A., Zakharyaschev, M. Modal logics / A. Chagrov, M. Zakharyaschev // Cambridge Press, London, 1997.

3 Scroggs, S. Extension of the Levis system $S5$. / S. Scroggs // Symbolic Logic, 1951,P.112—120.

4 Максимова, Л. Л. Предтабличные расширения логики $S4$ Льюиса / Л. Л.Максимова // Алгебра и логика, 1975, С.28-55.

5 Максимова, Л. Л Логика конечных слоев / Л. Л.Максимова // Алгебра и логика, 1975, С.304—319.

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики
Кафедра алгебры и математической логики

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
______ В.М. Левчук
«01» __06__ 2017 г.

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

О СТУКТУРНОЙ ПОЛНОТЕ НЕКОТОРЫХ ТАБЛИЧНЫХ И ПРЕДТАБЛИЧНЫХ МОДАЛЬНЫХ ЛОГИК

Направление 01.04.01 Математика

Магистерская программа 01.04.01.02 Алгебра, логика и дискретная математика

Научный руководитель
кандидат физико-математических наук, доцент ______ 01.06.17 В. Р. Кияткин

Выпускник ______ 01.06.17 М. В. Жоранова

Красноярск 2017