Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение
высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики

Кафедра алгебры и математической логики

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
_______/В.М. Левчук
«____» ________ 2017г.

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

ПРАВИЛА ВЫВОДА С МЕТАПЕРЕМЕННЫМИ И ЛОГИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ В ТАБЛИЧНЫХ И ПРЕТАБЛИЧНЫХ МОДАЛЬНЫХ ЛОГИКАХ

Направление 01.04.01 Математика

Магистерская программа 01.04.01.02 Алгебра, логика и дискретная математика

Научный руководитель
кандидат физико-математических наук,
доцент _______/В.Р. Кияткин

Выпускник _______/П.С. Березина

Красноярск 2017

АННОТАЦИЯ

Цель работы — доказать разрешимость табличных и предтабличных модальных логик, расширяющих S4 по допустимости правил вывода с метапеременными. Следствием доказанного будет разрешимость логических уравнений в этих логиках.

В работе применялись методы и аппарат алгебраической и реляционной семантик модальных логик.

В результате доказана разрешимость табличных и предтабличных модальных логик PT1-PT5 по допустимости правил вывода с метапеременными и следовательно логические уравнения разрешимы в этих логиках.

Ключевые слова: модальная логика, модель, N-характеристическая модель, шкала, истинность формулы на модели, антицепь, допустимое правило вывода, модальная алгебра, истинность формул в модальных алгебрах.

ANNOTATION

The purpose of the work: — to prove the solvability of tabular and before tabular modal logics, expanding S4 on the admissibility of rules of inference with metavariables. The result proved to be the solvability of logical equations in these logics.

In this work we have applied the methods and apparatus of algebraic and relational semantics of modal logics.

In the result proved the solvability of tabular and before tabular modal logics PT1-PT5 on the admissibility of rules of inference with metavariables and hence the logical equation is solvable in these logics.

Keywords:modal logic, model, N-characteristic model, scale, the validity of the formula on the model, antichain, a admissible inference rule, modal algebra, the validity of the formula in modal algebras.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Проблема разрешимости логических уравнений для некоторой логики λ вызывает интерес минимум по двум причинам:

1) с ней тесно связана проблема выводимости в логике λ;

2) она сводится к проблеме разрешимости логики λ по допустимости для правил вывода с параметрами.

Распознаваемость разрешимости логических уравнений впервые была отмечена В.В. Рыбаковым для модальной логики S4, интуиционистской логики Int, для модальных логик S и GL, аксиоматизирующих доказуемость и других [4], [5].

В представленной работе положительно решается вопрос о распознаваемости разрешимости логических уравнений с параметрами в табличных и предтабличных локально-конечных модальных логиках PM2-PM5, расширяющих логику S4.

1 Предварительные сведения

Приведём некоторые необходимые определения и теоремы [6], [3].

Шкалой $\langle W, r\rangle$ называется непустое множество W с заданным на нем бинарным отношением r.

Подмножество $S \subseteq W$ называется сгустком, если

$$\exists a \forall b((\langle a,b\rangle \in r) \wedge (\langle b,a\rangle \in r) \Leftrightarrow (b \in S)).$$

Моделью называют тройку $\langle W, r, u\rangle$, где u — функция означивания пропозициональных переменных $\{x_1, x_2, \dots\} \xrightarrow{u} 2^W$. Стандартным образом u распространяется на произвольные формулы:

$u(\neg A) = W \backslash u(A)$,

$u(A \wedge B) = u(A) \cap u(B)$,

$u(\Box A) = \{a \mid (((\langle a,b\rangle \in r) \Rightarrow (b \in u(A))\}$.

Истинность формулы на элементе a модели $\langle W, r, u\rangle$ определяется индуктивно: $a \Vdash_u x_i \Leftrightarrow a \in u(x_i)$;

$a \Vdash_u \neg A \Leftrightarrow a \nVdash_u A \Leftrightarrow a \notin u(A)$;

$a \Vdash_u (A \wedge B) \Leftrightarrow (a \Vdash_u A) \wedge (a \Vdash_u B) \Leftrightarrow a \in u(A) \cap u(B)$;

$a \Vdash_u \Box A \Leftrightarrow \forall b(\langle a,b\rangle \in r) \Rightarrow (b \Vdash_u A)) \Leftrightarrow a \in u(\neg A)$.

Формула A истинна в модели (обозначение $\langle W, r, u\rangle \Vdash A$) тогда и только тогда, когда $\forall a \in W(a \Vdash_u A)$. Аналогично, формула A истинна на шкале (обозначение $\langle W, r\rangle \Vdash A$) тогда и только тогда, когда $\forall u(\langle W, r\rangle \Vdash_u A)$.

Модель $\langle W_n, r_n, u_n\rangle$ называется n-характеристической для логики λ, если для любой формулы A от n переменных $A \in \lambda \Leftrightarrow \langle W_n, r_n, u_n\rangle \Vdash A$.

Элемент a модели $\langle W_n, r_n, u_n\rangle$ называют формульным, если найдётся формула A_a от n переменных такая, что $\forall b \in W_n((b \Vdash_{u_n} A_a) \Leftrightarrow (b = a))$.

Означивание u' называют формульным в модели $\langle W_n, r_n, u_n\rangle$, если для любого x_i существует формула A_i от n переменных такая, что $u'(x_i) = u_n(A_i)$.

Лемма 1. *Пусть u' — формульное означивание в модели $\langle W_n, r_n, u_n\rangle$ и $u'(x_j) = u_n(A_j)$. Тогда для любой формулы $B(x_1, \dots, x_m)$ и любого $a \in W_n$:*

$$a \Vdash_{u'} B(x_1, \dots, x_m) \Leftrightarrow a \Vdash_{u_n} B(A_1, \dots, A_m).$$

Правило вывода с параметрами

$$\frac{A_1(x_1, \dots, x_k, p_1, \dots, p_m), \dots, A_n(x_1, \dots, x_k, p_1, \dots, p_m)}{B(x_1, \dots, x_k, p_1, \dots, p_m)} \tag{1}$$

называется допустимым в логике λ, если для любых формул $C_1, \dots, C_k$ из того, что $A_1(C_i, p_j) \in \lambda$,...,$A_n(C_i, p_j) \in \lambda$ следует, что $B(C_i, p_j) \in \lambda$.

Правило (1) эквивалентно однопосылочному правилу вида:

$$\frac{A(x_1, \dots, x_k, p_1, \dots, p_m)}{B(x_1, \dots, x_k, p_1, \dots, p_m)}, \tag{2}$$

поэтому в дальнейшем рассматриваем только такие. Правило (2) иногда удобнее записывать в форме:

$$\frac{(F_1(x_i, p_j) \equiv G_1(x_i, p_j))}{(F_2(x_i, p_j) \equiv G_2(x_i, p_j))}. \tag{3}$$

Известен критерий допустимости правил вывода с параметрами через n-характеристические модели.

Теорема 1. *Правило с параметрами*

$$\Re = \frac{A(x_1, \dots, x_k, p_1, \dots, p_m)}{B(x_1, \dots, x_k, p_1, \dots, p_m)},$$

допустимо в логике λ тогда и только тогда, когда для любой n-характеристической модели $\langle W_n, r_n, u_n\rangle, n \leqslant m$ и любого формульного означивания u' такого, что $u'(p_j) = u_n(p_j), 1 \leqslant j \leqslant m$ правило $\Re$ истинно в модели $\langle W_n, r_n, u'\rangle$.

Логики, максимальные в классе нетабличных называются предтабличными. Существует в точности пять (PM1-PM5) предтабличных расширений модальной логики $S4$ [1].

По определению $PM_\tau = \{F \mid \forall l = 0, 1, \dots\ T_l^\tau \Vdash F\}, \ \ \tau = \overline{2, 5}$,

где $T_l^\tau = \langle W_l^\tau, r_l^\tau\rangle$ — следующие рефлексивные и транзитивные шкалы:

1. $T_l^2 = \langle \{a_{(2,l,k)} \mid 0 \leqslant k \leqslant l+1\}, r_l^2 \rangle$,

   $\langle a_{(2,l,0)}, a_{(2,l,i)} \rangle \in r_l^2$, $\langle a_{(2,l,i)}, a_{(2,l,l+1)} \rangle \in r_l^2$.

   Антицепь элементов $a_{(2,l,1)}, \ldots, a_{(2,l,l)}$ стянута снизу элементом $a_{(2,l,0)}$ (конакрытие) и сверху элементом $a_{(2,l,l+1)}$ (наднакрытие).

2. $T_l^3 = \langle \{a_{(3,l,k)} \mid 0 \leqslant k \leqslant l\}, r_l^3 \rangle$,

   $\langle a_{(3,l,0)}, a_{(3,l,i)} \rangle \in r_l^3$.

   Это антицепь $a_{(3,l,1)}, \ldots, a_{(3,l,l)}$ с конакрытием $a_{(3,l,0)}$.

3. $T_l^4 = \langle \{a_{(4,l,k)} \mid 0 \leqslant k \leqslant l+1\}, r_l^4 \rangle$,

   $\forall i, j \neq l+1$ $(\langle a_{(4,l,i)}, a_{(4,l,j)} \rangle \in r_l^4)$, $\langle a_{(4,l,i)}, a_{(4,l,l+1)} \rangle \in r_l^4$. Это сгусток элементов $a_{(4,l,0)}, \ldots, a_{(4,l,l)}$ с наднакрытием $a_{(4,l,l+1)}$.

4. $T_l^5 = \langle \{a_{(5,l,k)} \mid 0 \leq k \leq l\}, r_l^5 \rangle$, $\langle a_{(5,l,i)}, a_{(5,l,j)} \rangle \in r_l^5$.

Модальная пропозициональная формула F от переменных $x_1, \ldots, x_n$ полагается истинной на топобулевой алгебре $\mathcal{A}$ (обозначение $\mathcal{A} \Vdash F(x_1, \ldots, x_n)$), если на ней истинно тождество $\forall y_1, \ldots, \forall y_n (f(y_1, \ldots, y_n) = 1)$, где f — терм, соответствующий F в $\mathcal{A}$.

Булева алгебра $\mathcal{B}$ называется модальной, если выполняются условия:

1. $\Box 1 = 1$;
2. $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B) = 1$.

Модальная алгебра называется топобулевой, если:

3. $(\Box A \to A) = 1$;
4. $(\Box A \to \Box\Box A) = 1$.

Множество формул $\lambda(\mathcal{A}) = \{F \mid \mathcal{A} \Vdash F\}$ называется логикой алгебры $\mathcal{A}$. Для любой модальной логики λ существует топобулева алгебра $\mathcal{B}$ такая, что $\lambda = \lambda(\mathcal{B})$. Эта алгебра порождает многообразие топобулевых алгебр $var(\mathcal{B})$, соответствующее логике λ.

Логику λ называют табличной, если существует конечная алгебра $\mathcal{A}$ такая, что $\lambda = \lambda(\mathcal{A})$, и нетабличной в противном случае.

Собственно пропозициональные переменные p_j отличают, называя их метапеременными или параметрами, от переменных x_i для формул.

Логическим уравнением называют формулу вида $A(x_1, \ldots, x_k, p_1, \ldots, p_m)$ или более удобную для восприятия формулу $A(x_1, \ldots, x_k, p_1, \ldots, p_m) \equiv \top$.

Решением уравнения $A(x_1, \ldots, x_k, p_1, \ldots, p_m)$ в логике λ называют всякий набор формул $C_1, \ldots, C_k$ таких, что $A(C_1, \ldots, C_k, p_1, \ldots, p_m) \in \lambda$.

Если все переменные формулы A — параметры, то проблема разрешимости уравнения A в логике λ — это проблема выводимости формулы A в λ.

Теорема 2. *Уравнение $A(x_1, \ldots, x_k, p_1, \ldots, p_m)$ разрешимо в логике λ тогда и только тогда, когда в λ недопустимо правило с параметрами*

$$\frac{A(x_1, \ldots, x_k, p_1, \ldots, p_m)}{\perp.}$$

Таким образом, проблема логических уравнений по существу сводится к распознаванию допустимости правил вывода с параметрами.

Теорема 3. *Правило* (3) *допустимо в логике λ тогда и только тогда, когда на свободной алгебре счетного ранга $\Im_w$ многообразия $var(\lambda)$, соответствующего λ, истинно квазитождество*

$$q = \forall x_1, \ldots, \forall x_k ((f_1(x_i, p_j) = g_1(x_i, p_j)) \to (f_2(x_i, p_j) = g_2(x_i, p_j))), \qquad (4)$$

где f_1, f_2, g_1, g_2 — соответствующие термы, а p_j — константы, интерпретирующиеся в $\Im_w$, как свободные образующие.

2 Случай табличных модальных логик

Лемма 2. *На свободной алгебре $\Im_w$ многообразия $var(\mathcal{A})$, порожденного конечной топобулевой алгеброй $\mathcal{A}$, истинность квазитождества $(\star)$ распознаваема.*

Доказательство. По теореме 3 из [2, с.345]:

$$var(\mathcal{A}) = var(\Im_w) = var(\Im_s) = var(\Im_{s+1}) = \dots,$$

где s — наименьшая из мощностей порождающих совокупностей алгебры $\mathcal{A}$. Пусть m — число параметров в q. Выберем наименьшее натуральное число l с условием $l < w$, $\ l \leqslant m$, $l \leqslant s$. Справедливо утверждение: $\Im_w \models q$ тогда и только тогда, когда $\Im_l \models q$.

Действительно, пусть $\Im_w \not\models q$. Тогда в $\Im_w$ найдутся $a_1(p_{11}, \dots, p_{1r(1)}), \dots$ $_k(p_{k1}, \dots, p_{kr(k)})$, от свободных образующих p_{ij} такие, что $f_1(a_i, p_j) = g_1(a_i, p_j)$, а $f_2(a_i, p_j) \neq g_2(a_i, p_j)$.

Из первой теоремы и теоремы 1 из [2, с. 313] следует, что на $\Im_l$ ложно тождество

$$\begin{aligned}\forall y_{11}, \dots, \forall y_{kr(k)}(f_2(a_1(y_{11}, \dots y_{1r(1)}), \dots, a_k(y_{k1}, \dots y_{kr(k)}), p_1, \dots, p_m) = \\ = g_2(a_1(y_{11}, \dots y_{1r(1)}), \dots, a_k(y_{k1}, \dots y_{kr(k)}), p_1, \dots, p_m)).\end{aligned}$$

Тогда в $\Im_l$ найдутся элементы $b_{11}, \dots b_{kr(k)}$ такие, что $f_2(a'_i, p_j) \neq g_2(a'_i, p_j)$, где $a'_i = a_i(b_{11}, \dots b_{kr(k)})$.

Одновременно $f_1(a'_i, p_j) = g_1(a'_i, p_j)$. Таким образом $\Im_l \not\models q$.
Обратное очевидно. По теореме 2 из [2, с.358] $\Im_l \subseteq \mathcal{A}^{|\mathcal{A}|}$, т.е. $\Im_l$ — конечная алгебра. Это значит, что истинность квазитождества (4) на $\Im_w$ распознаваема.

Из леммы 1 и теорем 1 и 2 следует, что верна следующая теорема

Теорема 4. *Табличные модальные логики разрешимы по допустимости для* *правил вывода с параметрами. В табличных модальных логиках разрешимость логических уравнений распознаваема.*

3 Случай предтабличных модальных логик $PM2 - PM5$

Задавая на шкалах T_l^τ различные означивания, получаем всевозможные модели $\langle W_l^\tau, r_l^\tau, u_l^\tau \rangle$. Два элемента a_s и a_t из $\langle W_l^\tau, r_l^\tau, u_l^\tau \rangle$ назовем сжимаемыми, если они отвечают следующим двум условиям:

1) одинаково означены в модели, то есть $a_s \Vdash_{u_l^\tau} x_a \Leftrightarrow a_t \Vdash_{u_l^\tau} x_a$,

где x_a — пропозициональные переменные;

2) являются либо соседними элементами в цепях моделей $\langle W_0^2, r_0^2, u_0^2 \rangle$, $\langle W_1^2, r_1^2, u_1^2 \rangle$, $\langle W_1^3, r_1^3, u_1^3 \rangle$ и $\langle W_0^4, r_0^4, u_0^4 \rangle$, либо разными элементами антицепей в моделях $\langle W_l^2, r_l^2, u_l^2 \rangle$ и $\langle W_l^3, r_l^3, u_l^3 \rangle$, либо разными элементами сгустков в $\langle W_l^4, r_l^4, u_l^4 \rangle$ и $\langle W_l^5, r_l^5, u_l^5 \rangle$.

Модели $\langle W_l^\tau, r_l^\tau, u_l^\tau \rangle$ имеющие сжимаемые элементы, допускают преобразование сжатия, которое заключается в удалении одного из двух сжимаемых элементов.

Возможность для этого дает следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть a_s и a_t сжимаемые элементы модели $\langle W_l^\tau, r_l^\tau, u_l^\tau \rangle$, а $\langle \overline{W_l^\tau}, \overline{r_l^\tau}, \overline{u_l^\tau} \rangle$ — её сжатая модель. Тогда для любой формулы φ справедливо следующее утверждение:*

$(a_s \Vdash_{u_l^\tau} \varphi \Leftrightarrow a_t \Vdash_{u_l^\tau} \varphi)$ в $\langle W_l^\tau, r_l^\tau, u_l^\tau \rangle$ тогда и только тогда, когда $a_t \Vdash_{u_l^\tau} \varphi$ в $\langle \overline{W_l^\tau}, \overline{r_l^\tau}, \overline{u_l^\tau} \rangle$.

Доказательство индукцией по длине φ тривиально.

Последовательное сжатие каждой новой уже сжатой модели приводит по итогу к несжимаемой модели.

Обозначим $P_n = \{x_1, \ldots, x_n\}$, где x_a - пропозициональные переменные.

Следующие модели $\mathcal{T}_\tau(n), \tau = \overline{2,5}$ являются n-характеристическими для PM_τ соответственно [2].

1. $\mathcal{T}_2(n) = \langle \{a_j \mid j \subseteq P_n\} \cup \{b_{ij} \mid i, j \subseteq P_n, i \neq j\} \cup \{c_{ij}^\varepsilon \mid i, j \subseteq P_n, \varepsilon \subseteq 2^{P_n},$

$\varepsilon \neq \emptyset,\ i \in \varepsilon,\ \ \varepsilon \neq \{i\}\}, r_n^2, u_n^2\rangle$,

где $\langle b_{ij}, a_j\rangle \in r_n^2, \langle c_{ij}^{\varepsilon}, b_{ld}\rangle \in r_n^2 \iff (l = \varepsilon) \wedge (j = d), u_n^2(x_a) =$ $= \{a_j \mid x_a \in j\} \cup \{b_{ij} \mid x_a \in i\} \cup \{c_{ij}^{\varepsilon} \mid x_a \in i\}$, $\{b_{ij}\}$ — антицепь элементов модели $\mathcal{T}_2(n)$ со всевозможным означиванием переменных из P_n. Любое подмножество элементов этой антицепи имеет наднакрытие a_j и конакрытие c_{ij}^{ε} также со всевозможным означиванием переменных из P_n.

2. $\mathcal{T}_3(n) = \langle\{a_j \mid j \subseteq P_n\} \cup \{a_{j\varepsilon} \mid \varepsilon \subseteq 2^{P_n}, j \subseteq P_n, \varepsilon \neq \{i\}, \varepsilon \neq \emptyset\}, r_n^3, u_n^3\rangle$, где $\langle a_{j\varepsilon}, a_i\rangle \in r_n^3, \Leftrightarrow (i = \varepsilon) \qquad u_n^3(x_a) = \{a_i | x_a \in i\} \cup \{a_{ij} \mid x_a \in j\}$, $\{a_j\}$ — антицепь элементов модели $\mathcal{T}_3(n)$ со всевозможным означиванием переменных из P_n. Любое подмножество элементов этой антицепи имеет конакрытие $a_{j\varepsilon}$ также со всевозможным означиванием.

3. $\mathcal{T}_4(n) = \langle\{a_j \mid j \subseteq P_n\} \cup \{a_{j\varepsilon\eta} \mid j \in P_n, \varepsilon \subseteq 2^{P_n}, \eta \in \varepsilon, \varepsilon \neq \{i\}\}, r_n^4, u_n^4\rangle$, где $\langle a_{j\varepsilon\eta}, a_j\rangle \in r_n^4, \Leftrightarrow (i = j), \langle a_{i\varepsilon\eta}, a_{jlt}\rangle \in r_n^4, \Leftrightarrow (i = j) \wedge (\varepsilon = l)$, $u_n^4(x_a) = \{a_j \mid x_a \in j\} \cup \{a_{i\varepsilon\eta} \mid x_a \in \eta\}$, $\{a_i\}$ — антицепь элементов модели $\mathcal{T}_4(n)$ со всевозможным означиванием переменных из P_n. Каждый элемент a_j является наднакрытием для всевозможных сгустков со всевозможным означиванием.

4. $\mathcal{T}_5(n) = \langle\{a_{i\varepsilon} \mid i \in P_n, \varepsilon \subseteq 2^{P_n}\}, r_n^5, u_n^5\rangle$, где $\langle a_{i\varepsilon}, a_{jl}\rangle \in r_n^5, \Leftrightarrow (\varepsilon = l), u_n^5(x_a) = \{a_{i\varepsilon}, \mid x_a \in i\}$, $\mathcal{T}_5(n)$ — совокупность всевозможных сгустков элементов $a_{i\varepsilon}$ со всевозможным означиванием переменных из P_n.

Нетрудно заметить, что модели $\mathcal{T}_\tau(n)$ состоят из изолированных фрагментов. Условно назовем их блоками. В $\mathcal{T}_5(n)$ отдельные блоки — это сгустки, в $\mathcal{T}_2(n)$ и $\mathcal{T}_4(n)$ в один блок входят все элементы, из которых достижим элемент $a_j, \mathcal{T}_3(n)$ образует единственный блок. Каждый элемент моделей $\mathcal{T}_\tau(n),\ \ \tau =$ $= \overline{2,5}$ — формульный [2].

Теорема 5. *Правило с параметрами*

$$\Re = \frac{A(x_1, \ldots, x_k, p_1, \ldots, p_m)}{B(x_1, \ldots, x_k, p_1 \ldots, p_m)}$$

допустимо в $PM_\tau, \tau = \overline{2,5}$ *тогда и только тогда, когда оно истинно в* $\mathcal{T}_\tau(k+m)$ *при любом означивании* u^τ *таком, что* $u^\tau(p_j) = u^\tau_{k+m}(p_j)$
для всякого $1 \leqslant j \leqslant m$.

Доказательство. Пусть $\Re$ допустимо в PM_τ. Согласно критерию $\Re$ истинно, в частности, в модели $\mathcal{T}_\tau(k+m)$ при любом формульном означивании u^τ с условием $u^\tau(p_j) = u^\tau_{k+m}(p_j), \quad 1 \leqslant j \leqslant m$.

Но в модели $\mathcal{T}_\tau(k+m)$ любое означивание формульно вследствие конечности этой модели и формульности каждого ее элемента.

Обратно. Пусть $\Re$ недопустимо в PM_τ. Согласно критерию найдется n-характеристическая модель $\mathcal{T}_\tau(n) = \langle W^\tau_n, r^\tau_n, u^\tau_n \rangle$, формульное означивание u^τ с условием $u^\tau(p_j) = u^\tau_n(p_j), \;\; 1 \leqslant j \leqslant m$ и элемент $a_0 \in W^\tau_n$ такой, что

$$a_0 \Vdash_{u^\tau} A(x_i, p_j), \;\; \text{однако} \;\; a_0 \nVdash_{u^\tau} B(x_i, p_j), \tag{5}$$

Обозначим $\mathcal{L}_\tau(n) = \langle W^\tau_n, r^\tau_n, u^\tau_n \rangle$. Если $n = k+m$, то все доказано.

Пусть $n \neq k+m$. Рассмотрим случай, когда $\omega^\tau_n(a_0) \cap P_{k+m} \neq \varnothing$, где $P_{k+m} = \{x_1, \ldots, x_k, p_1, \ldots, p_m\}, \quad \omega^\tau_n(a_0) = \{x_a \mid a \Vdash_{u^\tau_n} x_a\} \cap \{p_\beta \mid a \Vdash_{u^\tau_n} p_\beta\}$.

Если $n > k+m$, то обратимся к $\mathcal{L}'_\tau(n)$ — обеднению модели $\mathcal{L}_\tau(n)$ до сигнатуры $\langle r^\tau_n, u^\tau(x_1), \ldots, u^\tau(x_k), u^\tau(p_1), \ldots, u^\tau(p_m) \rangle$. Затем рассмотрим $\mathcal{L}''_\tau(n)$ — — сужение модели $\mathcal{L}'_\tau(n)$ на множество $\{a \mid a \in \ell'_\tau(n), \omega^\tau_n(a) \subseteq P_k + m\}$.

Соотношения (5) на элементе a_0 в обеих моделях $\mathcal{L}'_\tau(n)$ и $\mathcal{L}''_\tau(n)$ останутся верными, поскольку $A(x_i, p_j)$ и $B(x_i, p_j)$ — формулы от переменных и параметров из P_{k+m}. С этого места доказательство будет общим и для случая $n < k+m$, нужно лишь все дальнейшие преобразования проводить не с $\mathcal{L}''_\tau(n)$, а сразу с $\mathcal{L}_\tau(n)$.

Следующим шагом произведем сжатие модели $\mathcal{L}''_\tau(n)$, то есть каждую подмодель вида $\langle W^\tau_n, r^\tau_n, u^\tau_n\rangle$, $0 \leqslant l \leqslant n$ (или $n+1$) заменим на соответствующую ей несжимаемую подмодель. В полученной таким образом модели $\mathcal{L}'''_\tau(n)$ соотношения (5) на элементе a_0 выполняются в силу леммы 3.

Дальше сделаем всевозможные прореживания в $\mathcal{L}'''_\tau(n)$. Прореживание — это: первое — удаление из каждого блока моделей $\mathcal{L}'''_2(n)$ и $\mathcal{L}'''_3(n)$ одного из двух одинаково означиваемых конакрытия, если они стягивают одно и то же множество антицепи, второе — удаление одного из двух изоморфных сгустков из каждого блока модели $\mathcal{L}'''_4(n)$, третье — удаление одного из двух изоморфных блоков в моделях $\mathcal{L}'''_\tau(n)$. В итоге получим прореженную и несжимаемую модель $\mathcal{L}^*_\tau(n)$, в которой соотношения (5) на элементе a_0 по-прежнему выполняются.

Возьмём любой блок C из $\mathcal{L}^*_\tau(n)$. По своему строению модель $\mathcal{T}_\tau\ (\ k+m\ ) = = \langle W^\tau_{k+m}, r^\tau_{k+m}, u^\tau_{k+m}\rangle$ обязательно содержит блоки $D_1, \ldots, D_s$, в которых параметры p_j, $0 \leqslant 1 \leqslant n$ означиваются так же как и в C.

На шкале модели $\mathcal{T}_\tau(k+m)$ подберём новое означивание V^τ так, чтобы:

1) $V^\tau(p_j) = u^\tau_{k+m}(p_j), 0 \leqslant j \leqslant m,$

2) при этом означивании среди прореженных и несжимаемых блоков $D^*_1, \ldots$
$\ldots, D^*_s$ оказался один, изоморфный C.

Это сделать всегда можно ввиду исчерпывающего разнообразия блоков $D_1, \ldots, D_s$
и возможности произвольного означивания переменных x_i,
$0 \leqslant i \leqslant k$ на элементах этих блоков.

Тогда в силу упомянутого изоморфизма в прореженном сжатии $\mathcal{L}^*_\tau\ (\ k+m\ )$ модели $\mathcal{T}_\tau(k+m) = \langle W^\tau_{k+m}, r^\tau_{k+m}, V^\tau\rangle$, а значит и в самой этой модели $\mathcal{L}_\tau(k+m)$ найдётся элемент b_0 такой, что $b_0 \Vdash_{V^\tau} A(x_i, p_j)$, но $b_0 \nVdash_{V^\tau} B(x_i, p_j)$, что и требовалось доказать.

В случае $\omega^\tau_n(a) \cap P_{k+m} = \varnothing$ в формулах $A(x_i, p_j)$ и $B(x_i, p_j)$ перейдём к новым переменным $y_i = \neg x_i$ и новым параметрам $q_j = \neg p_j$.

Тогда $\omega_n^\tau(a) \cap Q_{k+m} = \varnothing$, где $Q_{k+m} = y_q, \dots, y_k, q_1, \dots, q_m$ и можно провести все указанные выше рассуждения. Из доказанной теоремы и конечности моделей $\tau_\tau(k + m)$, $\tau = \overline{2, 5}$ следует что верна следующая теорема.

Теорема 6. *Предтабличные модальные логики PM2-PM5 разрешимы по допустимости для правил вывода с параметрами. В предтабличных модальных логиках PM2-PM5 разрешимость логических уравнений распознаваема.*

4 Случай предтабличной модальной логики $PM1$

Рассмотрим подробное строение n-характеристической модели $Ch_{PT1}(n)$.

По определению $PT1 = \{\alpha \mid \forall l = 0, 1, 2, \dots (A_l \Vdash \alpha)\}$, где $\big\langle \{\alpha_{(l,k)} \mid 0 \leqslant k \leqslant l+1\}, R_l \big\rangle$ — рефлексивный и транзитивный фрейм и $\langle \alpha_{(l,k+1)}, \alpha_{(l,k)} \rangle \in R_l$, то есть A_l — это цепь одноэлементных сгустков длинны $l+2$.

Сформулируем некоторые определения для случая логики $PT1$.

Множество всех элементов шкалы $\langle W, R \rangle$, достижимых из фиксированного элемента $a \in W$, то есть $\{b \in W \mid \langle a, b \rangle \in R\}$, называется верхним конусом элемента a (обозначение $\nabla(a)$).

Множество всех элементов шкалы $\langle W, R \rangle$, из которых достижим фиксированный элемент $a \in W$, то есть $\{c \in W \mid \langle c, a \rangle \in R\}$, называется нижним конусом элемента a (обозначение $\triangle(a)$).

Множество $\{b \in \triangle(a) \mid b \neq a, \langle b, c \rangle \in R \Rightarrow (c = a)\}$ называется множеством непосредственных предшественников элемента a (обозначается $\Lambda(a)$).

Теорема 7. [3] *Следующая модель является n-характеристической для предтабличной модальной логики $PT1$:*

$Ch_{PT1}(n) = \langle \{a_{\xi_1,\dots,\xi_d} \mid 1 \leqslant d < \infty,\ \xi_i \subseteq \Omega,\ \xi_j \neq \xi_{j+1},\ 1 \leqslant j \leqslant d-1\},\ R_n, V_n \rangle$,
$\Omega = Dom(V_n) = \{y_1, \dots, y_n\}, \quad \langle a_{\xi_1,\dots,\xi_s}, a_{\zeta_1,\dots,\zeta_t} \rangle \in R \Leftrightarrow \forall k (1 \leqslant k \leqslant t)(\xi_k =$
$= \zeta_k) \wedge (s = t+1), \quad V_n(y_i) = \{a_{\xi_1,\dots,\xi_d} \mid y_i \in \xi_d\}$.

Любой элемент модели $Ch_{PT1}(n)$ формульный.

Модель $Ch_{PT1}(n)$ есть прямое объединение 2^n подмоделей-компонент. Все элементы модели $Ch_{PT1}(n)$ индексируются с помощью всевозможных различных подмножеств $\xi_1, \dots, \xi_{2^n}$ множества Ω, пронумерованных каким-нибудь способом. Элемент a_{ξ_i} считаем максимальным в своей компоненте B_i, $1 \leqslant i \leqslant 2^n$, его глубина d равна 1. Полагаем $a_{\xi_i} \Vdash_{V_n} y_s$ тогда и только тогда, когда $y_s \in \xi_i$, то есть $\xi_i = V(a_{\xi_i})$ — означивание элемента a_{ξ_i} в модели $Ch_{PT1}(n)$. Для каждого элемента a_{ξ_i} в качестве множества $\triangle(a_{\xi_i})$ его непосредственных предшественников берём антицепь элементов $a_{\xi_i,\xi_1}, \ldots$ $\ldots a_{\xi_i,\xi_{i+1}}, \ldots, a_{\xi_i,\xi_{2^n}}$. В компоненте B_i они образуют множество элементов глубины $d = 2$. Полагаем $a_{\xi_i,\xi_j} \Vdash_{V_n} y_s$ тогда и только тогда, когда $y_s \in \xi_j$, то есть $\xi_j = V(a_{\xi_i,\xi_j})$ будет означиванием элемента a_{ξ_i,ξ_j}, $1 \leqslant j \leqslant 2^n$ и $j \neq i$. Затем для каждого элемента a_{ξ_i,ξ_j} в качестве множества $\triangle(a_{\xi_i,\xi_j})$ его непосредственных предшественников берем антицепь элементов $a_{\xi_i,\xi_j,\xi_1}, \ldots, a_{\xi_i,\xi_j,\xi_{j-1}}$, $a_{\xi_i,\xi_j,\xi_{j+1}}, \ldots, a_{\xi_i,\xi_j,\xi_{2^n}}$. Они образуют множество элементов глубины $d = 3$ в компоненте B_i. Полагаем $a_{\xi_i,\xi_j,\xi_k} \Vdash_{V_n} y_s$ тогда и только тогда, когда $y_s \in \xi_k$, то есть $\xi_k = V(a_{\xi_i,\xi_j,\xi_k})$ будет означиванием элемента a_{ξ_i,ξ_j,ξ_k} для $1 \leqslant k \leqslant 2^n$ и $k \neq j$. Данный процесс продолжаем представленным способом, двигаясь по направлению от максимального элемента, учитывая глубину $d = 3, 4, 5, \ldots$. Таким образом, всякая компонента B_i получается последовательным достраиванием множеств непосредственных предшественников для каждого элемента. По существу же компонента B_i представляет из себя пучок бесконечных цепей с максимальным элементом. При этом любые два соседние элемента одной цепи имеют различное означивание. Модель $Ch_{PT1}(n)$ — это некоторая совокупность таких пучков. Если на этой модели положить $\Omega = \{x_1, \ldots, x_q\} \cup$ $\cup \{p_1, \ldots, p_l\}$, $q + l = n$, где x_i — переменные, а p_j — метапеременные, то полученную n-характеристическую модель будем обозначать $Ch_{PT1}\,(\,q + l\,) =$ $= \langle W_{q+l}, R_{q+l}, V_{q+l} \rangle$.

Пусть $r = \mathcal{A}(\bar{x}, \bar{p})/\mathcal{B}(\bar{x}, \bar{p})$ есть некоторое правило вывода с метапеременными, где $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_k), \bar{p} = (p_1, \ldots, p_m)$. Зададим на шкале $\langle W_n, R_n \rangle$ модели $Ch_{PT1}(n)$ некоторое означивание V переменных их множества $X = \{x_1, \ldots, x_k\}$ и метапеременных из множества $P = \{p_1, \ldots, p_m\}$ (то есть $Dom(V) = X \cup P$). Полученную модель обозначим $T = \langle W_n, R_n, V \rangle$. Возьмём произвольную полную цепь C из модели T. Для каждого элемента $a_d \in C$ глубины d определим некоторое множество $\eta(a_d) = P(a_d) \cup X(a_d) \cup \cup F(a_d)$, где $P(a_d) = \{p_j \mid p_j \in P, a_d \Vdash_V p_j\}$, $X(a_d) = \{x_i \mid x_i \in X, a_d \Vdash_V x_i\}$, $F(a_d) = \{f_t | f_t \in F, a_d \Vdash_V f_t\}$, F-множество всех подформул f формул $\mathcal{A}(x_1, \ldots, x_k, p_1, \ldots, p_m)$ и $\mathcal{B}(x_1, \ldots, x_k, p_1, \ldots, p_m)$, а так же формул вида $\Diamond f$, полученных из них. Пусть $\bar{\bar{F}} = l$. Тогда для элемента a_d глубины d будет однозначно определена последовательность $(\eta(a_1), \ldots, \eta(a_d))$, где $\{a_1, \ldots, a_d\}$ — верхний конус a_d.

Множество $\pi(a_d) = \{\eta(a_1), \ldots, \eta(a_d)\}$, состоящее из элементов этой последовательности, назовём **потенциалом** элемента (a_d).

Поскольку $\pi(a_{d+1}) = \{\pi(a_d), \eta(a_{d+1})\}$, то мощности потенциалов соседних элементов различаются не более, чем на 1. Следовательно потенциал монотонно (может быть нестрого) возрастает с увеличением глубины. Так как $\overline{\overline{P \cup X \cup F}} = k + m + l$, то мощности потенциалов ограничены числом 2^{k+m+l}.

Пару $\tau(a_d) = (\eta(a_d), \pi(a_d))$ назовём **типом** элемента (a_d) на цепи C в модели T, где $\pi(a_d)$ — потенциал элемента (a_d). Для любого фиксированного потенциала π существует ровно $\bar{\bar{\pi}}$ типов элементов. Отсюда следует произвольная цепь модели T может содержать максимум различных типов элементов. Множество M элементов модели T назовём **полным**, если для любого подмножества $\beta \subseteq P$ найдётся по крайней мере один элемент $a \in M$ такой, что $\{p_j \mid a \Vdash_{V_n} p_j\} = \beta$, то есть чьё означивание на параметрах совпадает с β. Например, нижний конус любого элемента модели $Ch_{PT1}(n)$ и множества непосредственных предшественников любого элемента из $Ch_{PT1}(n)$ являются полными множествами.

Теорема 8. *Правило вывода с метапеременными*

$$r = \frac{\mathcal{A}(x_1, \ldots, x_k, p_1, \ldots, p_m)}{\mathcal{B}(x_1, \ldots, x_k, p_1, \ldots, p_m)}$$

допустимо в логике $PT1$ тогда и только тогда, когда оно истинно в любой конечной модели $\mathcal{T}$ такой, что:

1) $\mathcal{T}$ является открытой подмоделью модели T_s, которая получается из n-характеристической модели $Ch_{PT1}(s) = \langle W_s, R_s, V_s\rangle$ для логики $PT1$ при $s \leqslant m+k$ заданием некоторого означивания V^* такого, что $V^*(p_j) = V_s(p_j)$, $1 \leqslant j \leqslant m$;

2) модель $\mathcal{T}$ содержит все максимальные элементы модели T_s;

3) любая цепь модели $\mathcal{T}$ содержит не более $(1 + 2^{k+m+l})2^{k+m+l-1}$ элементов, где k-мощность множества переменных $X = \{x_1, \ldots, x_k\}$, m — мощность множества метапеременных $P = \{p_1, \ldots, p_m\}$, l — мощность множества F всех формул f формул $\mathcal{A}(x_1, \ldots, x_k, p_1, \ldots, p_m)$ и $\mathcal{B}(x_1, \ldots, x_k, p_1, \ldots, p_m)$, а так же формул вида $\Diamond f$, полученных из них;

4) для любого элемента $a \in \mathcal{T}$, есть множество $\triangle(a)$ его непосредственных предшественников неполно, то для каждого подмножества β из множества P в верхнем конусе $\nabla(a)$ найдётся соответствующий ему элемент c_β такой, что $\{p_j \mid c_\beta \Vdash_{V^*} p_j\} = \beta$ и его потенциал $\pi(c_\beta)$ равен $\pi(a)$.

Доказательство. Пусть правило вывода r недопустимо в логике $PT1$. По Теореме 1 найдутся некоторая s-характеристическая модель $Ch_{PT1}(s) = \langle W_s, R_s, V_s\rangle$, формульное означивание V', удовлетворяющее условию $Dom(V') = X \cup P = \{x_1, \ldots, x_k\} \cup \{p_1, \ldots, p_m\}$, $V'(p_j) = V_s(p_j)$,
$1 \leqslant j \leqslant m$ и элемент $a_0 \in W_s$ такой, что $\forall a \in W_s(a \Vdash_{V'} \mathcal{A}(\bar{x}, \bar{p}))$, но $a_0 \nVdash_{V'} \mathcal{B}(\bar{x}, \bar{p})$, то есть $\langle W_s, R_S, V'\rangle \nVdash r$. Докажем, что существует модель $\mathcal{T}$ с указанными свойствами такая, что $\mathcal{T} \nVdash r$.

Лемма 4. *Если $s > k + m$, то правило r будет ложно на фрейме некоторой $(k+m)$-характеристической модели $Ch_{PT1}(k+m) = \langle W_{k+m}, R_{k+m}, V_{k+m}\rangle$ при некотором означивании V'' таком, что $V''(p_j) = V_{k+m}(p_j)$, $1 \leqslant j \leqslant m$.*

Указанную (k+m)-характеристическую модель получим, преобразуя модель $T_1 = \langle W_s, R_s, V'\rangle$. Произведём преобразование отождествления элементов одной и той же конечной глубины модели T_1. Начнём с элементов глубины 1. Пусть максимальный элемент $a_{\xi_i} \in T_1$ таков, что его означивание $V'(a_{\xi_i}) = \alpha \cup \beta$, где $\alpha \subseteq X$ и $\beta \subseteq P$. Возьмём все остальные элементы a_{ξ_i} модели T_1, удовлетворяющие условию $V'(a_{\xi_i}) = \alpha \cup \beta$ и отождествим их с элементом a_{ξ_i}, то есть сольём последовательно один за другим с a_{ξ_i}. Элемент a_{ξ_i} назовём элементом слияния. Далее перейдём к следующему максимальному элементу и выполним преобразование отождествляя, затем к следующему и так далее пока не останутся только элементы слияния. В результате максимальных элементов в модели будет не больше 2^{k+m}. Если это число строго меньше 2^{k+m}, то мы добьёмся точного равенства. Для этого отменим отождествление необходимого количества тех или иных элементов так, чтобы для всякого $\beta \subseteq P$ осталось ровно 2^k элементов a_{ξ_i}, чьё означивание на параметрах в точности совпадает с β, то есть $V(a_{\xi_i}) \cap P = \beta$. В итоге в результатирующей модели останется ровно 2^{k+m} максимальных элементов, то есть столько же сколько их в модели $Ch_{PT1}(k+m)$. Очевидно, ровно столько же будет и компонент.

Возьмём одну из компонент полученной модели. Пусть a_{ξ_q} её максимальный элемент, а $V(a_{\xi_q}) = \alpha_1 \cup \beta_1$ его означивание ($\alpha_1 \subseteq X, \beta_1 \subseteq P$). Элементы глубины 2 этой компоненты образуют множество $\triangle(a_{\xi_q})$ непосредственных предшественников элемента a_{ξ_q}. Произведём над ними преобразование отождествления. Эта процедура позволяет нам оставить во множестве $\triangle(a_{\xi_q})$ результирующей модели для каждого $\beta_t \subseteq P, \beta_1 \neq \beta_1$ ровно 2^k элементов с означиванием β_t на параметрах модели $Ch_{PT1}(k+m)$. Далее возьмем какой-нибудь элемент $a_{\xi_i\xi_s}$ в полученной модели. Они образуют множество элементов глубины 3. Проведем процедуру отождествления над ними. Это нам даст возможность оставить во множестве $\triangle(a_{\xi_q\xi_s})$ непосредственных предшественников в результирующей модели для каждого $\beta_2 \subseteq P,\ \ \beta_t \neq \beta_2$ ровно 2^k элементов с означиванием β_t на параметрах и 2^k-1 элементов с означиванием β_2 то есть точно столько, сколько их в модели $Ch_{PT1}(k+m)$. Такие же преобразования проводим для каждого оставшегося элемента $a_{\xi_q \xi_s}$ из множества $\triangle(a_{\xi_q})$.

Далее переходим к элементам глубины 4, 5, 6 и так далее, двигаясь по направлению от максимальных элементов вглубь. Точно такие же преобразования производим со всеми остальными компонентами модели T_1. Результирующую модель обозначим $\tilde{T}$. По построению модель $\tilde{T}$ имеет фрейм, совпадающий с фреймом модели $Ch_{PT1}(k+1)$ и $V''(p_j) = V_{k+m}(p_j), 1 \leqslant j \leqslant m$, то есть фактически $\tilde{T} = \langle W_{k+m}, R_{k+m}, V'' \rangle$. Отметим, что для любой полной модели T_1 некоторый ее дубликат (относительно означивания V'') содержится в модели $\tilde{T}$.

Определим отображение φ модели T_1 на модель $\tilde{T}$. Произвольному элементу модели T_1 поставим в соответствие его элемент слияния из модели $\tilde{T}$, если отображение не отменялось и сам этот элемент из $\tilde{T}$, если отождествление для него отменялось. Очевидно, что отображение φ является p-морфизмом. Поскольку любой p-морфизм сохраняет истинность формул, то

$$\forall a \in W_{k+m}(a \Vdash_{V''} \mathcal{A}(\bar{x}, \bar{p})), \quad \text{но} \quad a'_0 \nVdash_{V''} \mathcal{B}(\bar{x}, \bar{p}),$$

где $a'_0 = \varphi(a_0)$, то есть $\langle W_{k+m}, R_{k+m}, V'' \rangle \nVdash r$. Лемма доказана.

Вернёмся к модели $T_1 = \langle W_s, R_s, V' \rangle$ и трансформируем её поэтапно в модель $\mathcal{T}$. Доказанная лемма позволяет считать, что $s \leq k+m$. Возьмём некоторое преобразование цепей, которое назовём **прореживанием**. Пусть a — максимальный элемент произвольной цепи C какой-либо компоненты модели T_1. Все элементы того же типа, что и a образуют некоторую подцепь цепи C с данным элементом a в качестве максимального. Элемент a назовём **представителем** данного типа на C. Удаляем все элементы этой подцепи, кроме самого элемента a, сохраняя его означивание (прореживаем по типу элемента a).

В преобразованной таким образом цепи возьмём элемент b глубины 2. Все элементы одинакового с ним типа также образуют некоторую подцепь. Удаляем все элементы этой подцепи, кроме самого элемента b, также сохраняя его означивание (прореживаем по типу элемента b). Во вновь полученной цепи производим такую же процедуру с элементом глубины 3, затем 4 и так далее. В результате получим прореженную цепь C^*, состоящую только из представителей типов, вместе с их означиванием из цепи C. Поскольку различных типов элементов всего $\Theta(r) = (1 + 2^{k+m+l})2^{k+m+l-1}$, то и длинна цепи C^* не превосходит $\Theta(r)$. Для любого элемента $a \in C$ через $m(a)$ обозначим представителя его типа на цепи C^*.

Лемма 5.

$$\forall a \in C \quad (\tau(a) = \tau(m(a))),$$

в частности, представитель любого типа сохраняет свой тип на прореженной цепи C^*.

Доказательство ведем индукцией по глубине элемента a_d. Пусть для удобства нижний индекс элемента указывает его глубину. Если $d = 1$, то утверждение очевидно верно. Пусть оно верно также для всех элементов глубины $d < l$. Возьмём на цепи C элемент a_{l+1} глубины $l + 1$. Если он не максимальный в подцепи однотипных элементов, то тогда на цепи C найдётся элемент a_q того же типа, но глубины $q \leq l$. По индуктивному предположению $\tau(a_q) = \tau(m(a_q))$. Поскольку $\tau(a_{l+1}) = \tau(a_q)$ и $\tau(m(a_q)) = \tau(m(a_{l_1}))$, то $\tau(a_{l+1}) = \tau(m(a_{l+1}))$.

Пусть a_{l+1} максимальный в подцепи однотипных элементов на C, то есть именно он, сохранив свое означивание, под именем $m(a_{l+1})$ займёт соответствующее место на цепи C^*. По определению $\pi(a_{l+1}) = \{\pi(a_l), \eta(a_{l+1})\}$, где $\eta(a_{l+1}) = F(a_{l+1}) \cup P(a_{l+1}) \cup X(a_{l+1})$.

Очевидно, что $F(a_{l+1}) = \{f_t | f_t \in F, a_{l+1} \Vdash_{V' f_t}\}$ определяется только множествами $\pi(a_l), P(a_{l+1}) = \{p_j \mid p_j \in P, a_{l+1} \Vdash_{V'} p_j\}$ и $X(a_{l+1}) = \{x_i \mid$
$x_i \in X, a_{l+1} \Vdash_{V'} x_i\}$. Аналогично, $\pi(m(a_{l+1})) = \{\pi(m(a_l)), \eta(m(a_{l+1}))\}$ и точно так же множество $F(m(a_{l+1}))$ определяется только множествами $P(m(a_{l+1}))\cup$

$\cup X(m(a_{l+1})$ и $\pi(m(a_l))$. По построению элементы a_l и a_{l+1} имеют одинаковое означивание, то есть $P(a_{l+1}) = P(m(a_{l+1}))$ и $X(a_{l+1}) \cup P(m(a_{l+1}))$. По индуктивному предположению $\pi(a_l) = \pi(m(a_l)$. Отсюда $\tau(a_{l+1}) = \tau(m(a_{l+1}))$. Лемма доказана.

Возьмём произвольную компоненту модели $T_1 = \langle W_s, R_s, V' \rangle$ с максимальным элементом a. Произведём прореживание всех цепей нижнего конуса $\triangle(a)$ по типу элемента a. В преобразованной компоненте рассмотрим множество $\triangle$ непосредственных предшественников элемента a. Для каждого $b \in \triangle(a)$ произведём прореживание всех цепей нижнего конуса $\triangle(b)$ по типу элемента b. В полученной компоненте рассмотрим множество $\triangle(b)$. Для всякого $c \in \triangle(b)$ произведём прореживание всех цепей нижнего конуса $\triangle(c)$ по типу элемента c и так далее. Указанное преобразование продолжаем, двигаясь по направлению от максимального элемента вглубь. Аналогично преобразуем и все остальные компоненты модели T_1. Таким образом будет прорежена каждая цепь модели T_1. Полученную в итоге модель обозначим $T_2 = \langle W_2, R_2, V_2 \rangle$. Докажем, что

$$\forall f \in F(T_1 \Vdash f \Leftrightarrow T_2 \Vdash f).$$

Действительно, пусть для некоторой формулы $f_1 \in F$ и некоторого элемента $a \in T_1 a \nVdash_{V'} f_1$. По Лемме 5 элемент $b = m(a)$ из T_2 имеет один и тот же тип, что элемент a. Тогда $b \nVdash_{V_2} f_1$.

Обратно, пусть для некоторой формулы $f_2 \in F$ и некоторого элемента $c \in T_2 c \nVdash_{V_2} f_2$. Возьмём любой элемент $d \in T_1$ такой, что $m(d) = c$. По Лемме 5 типы элементов d и c равны, то есть $d \nVdash_{V'} f_2$. Из этого утверждения следует, что

$$\forall a \in W_2(a \Vdash_{V_2} \mathcal{A}(\bar{x}, \bar{p})), \quad \text{но} \quad a_0'' \nVdash_{V_2} \mathcal{B}(\bar{x}, \bar{p}),$$

где $a'' = m(a_0)$, то есть $\langle W_2, R_2, V_2 \rangle \nVdash r$. В полученной конечной модели T_2, двигаясь по направлению от максимальных элементов вглубь, произведём преобразование отождествления элементов множества $\triangle(a)$ для каждого $a \in T_2$, описанное в Лемме 5, не отменяя ни одного из них. Полученную результирующую модель обозначим $\mathcal{T} = \langle W_3, R_3, V_3 \rangle$. По построению все максимальные элементы модели T_1 остались таковыми в модели $\mathcal{T}$. Все блоки модели $\mathcal{T}$ представляют собой пучки конечных цепей длинны не более $\Theta(r) = (1+2^{k+m+l})2^{k+m+l-1}$ с максимальными элементами. Все элементы из множества $\triangle(a)$ непосредственных предшественников любого элемента $a \in \mathcal{T}$ имеют одинаковое означивание. Очевидно, что модель $\mathcal{T}$ является открытой подмоделью модели $Ch_{PT1}(k+m)$ при некотором означивании V^* таком, что $V^*(p_j) = V_{k+m}(p_j), \quad 1 \leqslant j \leqslant m$. Отображение ψ, ставящее в соответствие всякому элементу модели T_2 его элемент слияния из $\mathcal{T}$, является p-морфизмом. Поскольку любой p-морфизм сохраняет истинность формул, то

$$\forall a \in W_3(a \Vdash_{V_3} \mathcal{A}(\bar{x}, \bar{p})), \quad \text{но} \quad a_0'' \nVdash_{V_3} \mathcal{B}(\bar{x}, \bar{p}),$$

где $a_0''' = \psi(a'')$, то есть $\mathcal{T} \nVdash r$. Таким образом условия 1), 2) и 3) из формулировки настоящей теоремы справедливы для модели $\mathcal{T}$.

Докажем справедливость условия 4). Пусть элемент $a \in \mathcal{T}$ таков, что множество $\triangle(a)$ его непосредственных предшественников неполно. Это значит, что в ходе прореживания из модели T_1 был удален некоторый непосредственный предшественник $\tilde{a}$ элемента a со всем своим нижним конусом $\triangle(\tilde{a})$. Пусть β — произвольное подмножество из P. Означивание V' в модели T_1 таково, что $V'(p_j) = V_s(p_j), \quad 1 \leqslant j \leqslant m$. Это значит, что нижний конус любого элемента в модели T_1 является полным множеством. Поэтому в $\triangle(\tilde{a}) \subset T_1$ найдется элемент b, чьё означивание на параметрах β. Тогда $\nabla(a) \subset T_1$ обязательно найдётся элемент c, максимальный среди элементов того же типа, что и b. С одной стороны при этом $\pi(c) \subseteq \pi(a) \subseteq \pi(b)$ ввиду монотонности потенциала, со стороны другой $\pi(c) = \pi(b)$ как потенциалы однотипных элементов. В итоге $\pi(c) = \pi(a)$ и согласно Лемме 5 условие 4) теоремы тоже выполнено.

Обратно. Пусть некоторая модель $\mathcal{T} = \langle W, R, V''' \rangle$ удовлетворяет условиям настоящей теоремы, то есть является открытой подмоделью некоторой s-характеристической модели $\langle W_s, R_s, V_s \rangle, \quad s \leq m + k$ с заданным на ней означиванием V^* таким, что $V^*(p_j) = V_s(p_j), \quad 1 \leqslant j \leqslant m$. При этом $W \subset W_s, \bar{\bar{W}} < \infty, R = R_s \upharpoonright W, V''' = V^* \upharpoonright W, V'''(p_j) = V^*(p_j) \upharpoonright W, 1 \leqslant j \leqslant m$. Пусть $\mathcal{T} \nVdash r$. Тогда найдётся элемент $a_1 \in W$ такой, что

$$\forall a \in W (a \Vdash_{V'''} \mathcal{A}(\bar{x}, \bar{p})), \quad \text{но} \quad a_1 \nVdash_{V'''} \mathcal{B}\bar{x}, \bar{p},$$

Докажем, что тогда $\langle W_s, R_s, V^* \rangle \nVdash r$ для некоторого формульного означивания V^* такого, что $V^*(p_j) = V_s(p_j), \quad 1 \leqslant j \leqslant m$. Достроим модель $\mathcal{T}$ до модели $T = \langle W_s, R_s, V^* \rangle$ и докажем формульность V^*.

Для этой цели введём преобразования, в некотором смысле обратные преобразованиям прореживания и отождествления. Пусть a есть произвольный элемент модели $\mathcal{T}$ и α — его означивание на параметрах. Первое преобразование относится к случаю, когда множество $\triangle(a)$ непосредственных предшественников элемента a неполно. Пусть $\beta \subset P$ недостающее подмножество. По условиям теоремы в верхнем конусе $\nabla(a)$ найдётся элемент c такой, что $\pi(c) = \pi(a)$ и его означивание на параметрах совпадает с β. Добавим во множество $\triangle(a)$ модели $\mathcal{T}$ элемент b с означиванием, совпадающим с означиванием элемента c, то есть $\eta(b) = \eta(c)$. Полученное расширение модели обозначим $\hat{\mathcal{T}} = \langle \hat{W}, \hat{R}, \hat{V}''' \rangle$. Потенциалы элементов соседствующих элементов a и b могут различаться по мощности лишь на 1. Поскольку $\eta(b) = \eta(c), \eta(c) \in \pi(c)$ и $\pi(c) = \pi(a)$ и значит $\eta(b) \in \pi(a)$ $\pi(b) = \pi(a) = \pi(c)$. Отсюда следует, что типы элементов c и b в модели $\hat{\mathcal{T}}$ равны. По этой причине из того, что $c \Vdash_{V'''} \mathcal{A}(\bar{x}, \bar{p})$ следует $b \Vdash_{\hat{V}'''} \mathcal{A}(\bar{x}, \bar{p})$, то есть в модели $\hat{\mathcal{T}}$ сохранится истинность посылки и ложность следствия правила r. Тогда $\hat{\mathcal{T}} \nVdash r$. Произведём такое же преобразование для всех оставшихся недостающих подмножеств из P. Таким образом в преобразованной модели множество $\triangle(a)$ непосредственных предшественников элемента

a уже будет полным. Введенное преобразование будем называть **пополнением** множества $\triangle(a)$. Второе преобразование относится к случаю, когда множество $\triangle(a)$ непосредственных предшественников элемента a будет полным. Возьмем любой элемент b из этого множества. Пусть означивание b на параметрах равно β. Достигнем, если это необходимо, чтобы общее количество элементов с таким же означиванием на параметра в $\triangle(a)$ равнялось 2^t в случае $\alpha \neq \beta$ и $2^t - 1$ в случае $\alpha = \beta$, где $t = s - m$, то есть в точности столько сколько их в модели $T = \langle W_s, R_s, V^* \rangle$. Для этого добавим в $\triangle(a)$ необходимое количество элементов, означивание которых совпадает с означиванием элемента b. Полученное расширение модели обозначим $\tilde{\mathcal{T}} = \langle \tilde{W}, \tilde{R}, \tilde{V}''' \rangle$. Заметим, что все добавочные элементы будут иметь тот же тип в модели $\tilde{\mathcal{T}}$, что и элемент b, поскольку будут иметь тот же потенциал. Отображение ϱ модели $\tilde{\mathcal{T}}$ на модель $\mathcal{T}$, переводящее каждый добавленный элемент в элемент b, а остальные элементы в самих себя, очевидно является p-морфизмом. Любой p-морфизм сохраняет истинность формул, значит

$$\forall a \in \tilde{W}(a \Vdash_{\tilde{V}'''} \mathcal{A}(\bar{x}, \bar{p})), \quad \text{но} \quad a_1 \nVdash_{\tilde{V}'''} \mathcal{B}(\bar{x}, \bar{p}),$$

где $a_1' = \varrho(a_1)$, то есть $\tilde{\mathcal{T}} \nVdash r$. Указанное преобразование произведем для каждого $b \in \triangle(a)$. В преобразованной таким образом модели множество $\triangle(a)$ непосредственных предшественников элемента a будем называть **абсолютно полным**. Введенное преобразование назовем **абсолютным пополнением** множества $\triangle(a)$.

Возьмем произвольную компоненту модели $\mathcal{T}$ с максимальным элементом a. Рассмотрим элементы глубины 2. Произведем, при необходимости, преобразования пополнения и абсолютного пополнения множества $\triangle(b)$ непосредственных предшественников элемента b. В преобразованной модели множество $\triangle(b)$ так же будет абсолютно полным. Произведем указанную процедуру для каждого элемента $b \in \Lambda(a)$. В преобразованной таким образом модели возьмем произвольный элемент c глубины 3 и перейдем к элементам глубины 4. Продолжим указанный выше процесс, переходя к элементам глубины 5, глубины 6 и так далее, двигаясь по направлению от максимального элемента вглубь. Аналогично преобразуем и все остальные компоненты модели $\mathcal{T}$. По условию теоремы модель $\mathcal{T}$ содержит все максимальные элементы модели T_3. В результате произведенных преобразований модель $\mathcal{T} = \langle W, R, V''' \rangle$ окажется достроенной до модели $T_3 = \langle W_s, R_s, V^* \rangle$. Из доказанных выше свойств преобразований пополнения и абсолютного пополнения следует, что $\langle W_s, R_s, V^* \rangle \nVdash r$.

Докажем формульность означивания V^*. Для любого $\eta \subseteq X \cup P \cup F$ построим формулы:

$$\varphi(\eta) = \left(\bigwedge_{x_i \in \eta} x_i \wedge \bigwedge_{x_i \notin \eta} \neg x_i \right) \wedge \left(\bigwedge_{p_j \in \eta} p_j \wedge \bigwedge_{p_j \notin \eta} \neg p_i \right) \wedge \left(\bigwedge_{f_t \in \eta} f_t \wedge \bigwedge_{f_t \notin \eta} \neg f_t \right),$$

$$\psi(\eta) = \diamond \left(\bigwedge_{x_i \in \eta} x_i \wedge \bigwedge_{x_i \notin \eta} \neg x_i \right) \wedge \diamond \left(\bigwedge_{p_j \in \eta} p_j \wedge \bigwedge_{p_j \notin \eta} \neg p_i \right) \wedge \diamond \left(\bigwedge_{f_t \in \eta} f_t \wedge \bigwedge_{f_t \notin \eta} \neg f_t \right).$$

Пусть $\tau = (\eta_d, \{\eta_1, \dots, \eta_d\})$ — некоторый тип элементов модели $\langle W_s, R_s, V^* \rangle$, где $\eta_i \subseteq X \cup P \cup F, \quad 1 \leqslant i \leqslant d$.

Определим формулу $f(\tau) = \varphi(\eta_d) \wedge (\psi(\eta_1) \wedge \dots \wedge \psi(\eta_d))$. Покажем,что $f(\tau)$ истинна только на элементах типа τ. Пусть $\tau_1 = \tau_2$ и a — элемент типа τ_1, тогда $a \nVdash_{V^*} f(\tau_2)$. Действительно, если у этих типов разные потенциалы, то найдется такое η_s из потенциала типа τ_2 такое, что $a \nVdash_{V^*} \psi(\eta_s)$, где $\psi(\eta_s)$ — подформулы формулы $f(\tau_2)$. Если же потенциалы одинаковые, то в них найдется некоторое η_q такое, что $a \nVdash_{V^*} \varphi(\eta_q)$, где $\varphi(\eta_q)$ — подформула формулы $f(\tau_2)$. В обоих случаях $a \nVdash_{V^*} f(\tau_2)$. Таким образом, множество M_τ элементов модели $\langle W_s, R_s, V^* \rangle$ типа τ формульно: $M_\tau = V^*(f_\tau)$. Возьмем произвольную переменную или метапеременную $y_i \in X \cup P$. Пусть $y_i \in \tau$, то есть $y_i \in \eta_d$ в типе $\tau = (\eta_d \{\eta_1, \dots, \eta_d\})$. Для любого элемента a данного типа τ $a \Vdash_{V^*} f(\tau)$ и, следовательно, $a \Vdash_{V^*} y_i$. Иными словами $M_\tau \subseteq V^*(y_i)$ для любого τ такого, что $y_i \in \tau$. С другой стороны, любое $a \in V^*(y_i)$ содержится в M_τ для подходящего τ. Это означает, что $V^*(y_i) = M_\tau \cup \dots \cup M_{\tau_u} = V^*(f(\tau_1)) \cup \dots \cup V^*(f(\tau_u)) = V^*(\bigvee_{j=1}^u f(\tau_j))$, где $\tau_1, \dots, \tau_u$ — все типы такие, что $y_i \in \tau_j, \quad 1 \leq j \leq u$. Обозначим формулу $\bigvee_j^u = 1 f(\tau_j) = \mathcal{F}_i$, тогда $V^*(y_i) = V^*(\mathcal{F}_i)$. Это доказывает, что означивание V^* формульное. Тогда согласно критерию допустимости правил с метапеременными правило r ложно в логике $PM1$. Теорема доказана.

Глубина любой модели $\mathcal{T}$, из условия Теоремы 8, не превосходит некоторого числа $\Theta(r)$, значит имеется лишь конечное число таких моделей. В результате справедлива следующая теорем.

Теорема 9. *Для предтабличной логики $PT1$ существует алгоритм, распознающий допустимость правил с параметрами.*

Существует алгоритм, распознающий разрешимость логических уравнений для предтабличной модальной логики $PT1$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В магистерской диссертации были получены следующие результаты:

1. В табличных модальных логиках разрешимость логических уравнений распознаваема;
2. Табличные модальные логики разрешимы по допустимости для правил вывода с параметрами;
3. В предтабличных модальных логиках PM2-PM5 разрешимость логических уравнений распознаваема.;
4. Предтабличные модальные логики PM2-PM5 разрешимы по допустимости для правил вывода с параметрами;
5. Существует алгоритм, распознающий разрешимость логических уравнений для предтабличной модальной логики $PT1$;
6. Для предтабличной логики $PT1$ существует алгоритм, распознающий допустимость правил с параметрами.

Полученные результаты имеют теоретическое значение и могут быть использованы в исследованиях по нестандартным логикам.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1.Максимова, Л. Л. Предтабличные расширения логики $S4$ Льюиса./ Л. Л. Максимова // Алгебра и логика. 1975. 28-56с.

2. Мальцев, А. И. Алгебраические системы./ А. И. Мальцев - М: Наука, 1970. - 392с.

3. Рыбаков, В. В. Допустимые правила предтабличных модальных логик./ В. В. Рыбаков // Алгебра и логика. 1986. 404-464с.

4. Рыбаков, В.В. Уравнения в свободной топобулевой алгебре./ В. В. Рыбаков // Алгебра и логика. 1986. 172-204с.

5. Рыбаков, В. В. Допустимость правил вывода и логические уравнения в модальных логиках, аксиоматизирующие доказуемость./ В. В. Рыбаков // Изв. АНСССР. 1990. 357-377с.

6. Rybakov V. V. Admissibility of logical inference rules: Book/ V. V. Rybakov. - Elsevier Publ. Amsterdam, New-York. - 1997. - V. 136. - P. 617.

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Институт математики и фундаментальной информатики
Кафедра алгебры и математической логики

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
_______ / В.М. Левчук
«10» июня 2017 г.

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

ПРАВИЛА ВЫВОДА С МЕТАПЕРЕМЕННЫМИ И ЛОГИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ В ТАБЛИЧНЫХ И ПРЕДТАБЛИЧНЫХ МОДАЛЬНЫХ ЛОГИКАХ

Направление 01.04.01 Математика

Магистерская программа 01.04.01.02 Алгебра, логика и дискретная математика

Научный руководитель
кандидат физико-математических наук,
доцент _______ / В.Р. Кияткин
10.06.17

Выпускник _______ / П.С. Березина
10.06.17

Красноярск 2017