Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики
Кафедра алгебры и математической логики

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
________ /В.М. Левчук
«__» _________ 2017 г.

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

Направление 01.03.01 Математика

АЛГОРИТМИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ ДОПУСТИМОСТИ ПРАВИЛ ВЫВОДА В МОДАЛЬНОЙ ЛОГИКЕ $K4 + bw_2$

Научный руководитель
кандидат физико-математических наук, доцент ____________/ В. Р. Кияткин

Выпускник ____________/ Г. М. Шумкина

Красноярск 2017

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

При изучении логических систем кроме постулированных правил вывода обычно применяются и допустимые правила, то есть те, относительно которых логики замкнуты.

Если существует алгоритм, позволяющий по любому правилу вывода распознать его допустимость в изучаемой логике, то последняя называется разрешимой по допустимости. Настоящая работа посвящена исследованию вопроса о разрешимости по допустимости пропозициональной логики K4+$(\bigwedge\limits_{0\leqslant i\leqslant 2} \Diamond p_i \to \bigvee\limits_{0\leqslant i\neq j\leqslant 2} (\Diamond(p_i \wedge (p_j \vee \Diamond p_j)))$ (в дальнейшем обозначаем $K4 + bw_2$).

Проблема допустимости была решена для предтабличных модальных логик [1], конечнослойных модальных логик [2], расширений системы $S4.3$ [3], модальной логики $S4$ и интуиционистской логики Int [4]. В [4], в частности, был найден критерий допустимости правил вывода в $S4$. Одним из достоинств этого критерия является возможность его широкого обобщения на другие решетки модальных логик. Схема из [4] была использована для разрешения проблемы допустимости $S5$, $K4$, $S4.2$, $S4.2Grz$, в суперинтуиционистской логике KC.

Другой подход к решению проблемы допустимости состоит в отыскании конечного базиса для допустимых правил. В случае наличия такого базиса решение указаной проблемы для $K4 + bw_2$ явилось следствие её финитной аппроксимируемости, доказанной, например в [5](стр.256). Но у этой логики отсутствует конечный базис допустимых правил. Поэтому алгоритмический путь решения по схеме [4] является наиболее простым. В результате исследования найден семантический критерий допустимости правил вывода в изучаемой логике и на его основе построен алгоритм, распознающий допустимость правил в этой логике. Таким образом проблема разрешимости по допустимости для логики решена положительно.

1 Основные понятия и предварительные сведения из теории модальных систем

1.1 Синтаксис модальных систем

Алфавит модальных логик состоит из пропозициональных переменных $P = \{p_1, p_2, \dots\}$, логических связок $\neg$, $\wedge$, $\vee$,$\rightarrow$,$\Diamond$,$\Box$ и скобок $()$.

Правила образования формул: к правилам образования формул классического исчисления высказываний добавляется правило: если A — формула, то $\Box A$ и $\Diamond A$ — тоже формулы. Множество всех модальных формул обозначают For_M.

Правила вывода:

$$R1: \ \frac{A, (A \rightarrow B)}{B} \ \text{— modus ponens,}$$

$$R2: \ \frac{A}{\Box A} \ \text{— правило Гёделя,}$$

$$R3: \ \frac{A\,(p_1, \dots, p_n)}{A\,(B_1, \dots, B_n)}, \quad \text{где} \quad B_1, \dots, B_n \in For_M.$$

Квазитавтологией называется формула, полученная из тавтологии исчисления высказываний заменой переменных на некоторые формулы из For_M.

Аксиомами модальной системы K являются все квазитавтологии и формулы:

A_0: $\Box\,(A \vee \neg A) \equiv (A \vee \neg A)$,

A_1: $\Box\,(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$.

Модальной логикой называется подмножество λ из For_M, если оно содержит все теоремы из логики K и замкнуто относительно правил $R1$, $R2$, $R3$.

Аксиомами изучаемой модальной системы являются все квазитавтологии, формулы A_0 и A_1, а также:

A_2: $\Box A \rightarrow \Box\Box A$.

bw_2: $(\bigwedge\limits_{0 \leqslant i \leqslant 2} \Diamond p_i \rightarrow \bigvee\limits_{0 \leqslant i \neq j \leqslant 2} (\Diamond(p_i \wedge (p_j \vee \Diamond p_j)))$

Правила вывода: $R1$, $R2$, $R3$.

1.2 Семантика Крипке для модальных систем и семантические понятия

Шкалой называется пара $F = \langle W, R\rangle$, где W — непустое множество, R — бинарное отношение, определенное на W $R \subseteq W \times W$.

Шкала $F = \langle W, R\rangle$ называется рефлексивной, транзитивной или симметричной, если таковым является отношение R.

Моделью называется тройка $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$, где V — отображение множества P всех пропозициональных переменных во множество всех подмножеств множества W, то есть $P \rightarrow 2^M$. V называют означиванием.

Истинность формулы на элементе (в точке) $a \in \mathcal{M}$ определяется индуктивно:

$a \models_V p_i \Leftrightarrow a \in V(p_i)$,
$a \models_V (A \& B) \Leftrightarrow a \models_V A$ и $a \models_V B$,
$a \models_V (A \vee B) \Leftrightarrow a \models_V A$ или $a \models_V B$,
$a \models_V (A \to B) \Leftrightarrow$ или $a \not\models_V A$, или $a \models_V B$,
$a \models_V \neg A \Leftrightarrow a \not\models_V A$,
$a \models_V \Box A \Leftrightarrow \forall b \in W\,(aRb \Rightarrow b \models_V A)$.

Формула A истинна в модели $\mathcal{M}$, если $\forall a \in \mathcal{M}\,(a \models_V A)$. Обозначение $\mathcal{M} \models A$.

Формула A истинна на шкале $F = \langle W, R \rangle$, если она истинна в модели $\langle W, R, V \rangle$ при любом означивани V. Обозначение $F \models A$.

Шкала называется адекватной для модальной логики λ, если для любой формулы A, доказуемой в λ $(A \in \lambda)$, следует $F \models A$.

Класс шкал $\mathcal{K}$ называется характеристическим для логики λ, если формула A доказуема в λ тогда и только тогда, когда она истинна на всех шкалах из $\mathcal{K}$.

Модальная логика λ называется финитно апроксимируемой, если существует класс конечных шкал, характеристический для λ.

Модель $\mathcal{M}$ называется n-характеристической для логики λ, если для любой формулы $A = A(p_1, \ldots, p_n)$ выполняется: $A \in \lambda \Leftrightarrow \mathcal{M} \models A$.

Означивание V в модели $\mathcal{M}$ называется формульным, если для любой пропозициональной переменной p_i найдется формула A_i такая, что $V(p_i) = \{a \mid a \in W, a \models_V A_i\}$.

Множество $X \subset W$ называется формульным, если:

$$\exists A_i\,(X = \{a \mid a \in W, a \models_V A_i\}).$$

Элемент $a \in W$ называется формульным, если множество $X = \{a\}$ формульно.

Если $F = \langle W, R \rangle$ и $F' = \langle W', R' \rangle$ — шкалы и $W' \subseteq W, R' = R \restriction W'$, то F' называется подшкалой шкалы F.

Если $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$ и $\mathcal{M}' = \langle W', R', V' \rangle$ — модели, подшкала шкалы $F = \langle W, R \rangle$ — $F' = \langle W', R' \rangle$ и $V' = V \restriction W'$, то говорят, что $\mathcal{M}'$ — подмодель модели $\mathcal{M}$.

Если F' подшкала шкалы F ($\mathcal{M}'$ подмодель модели $\mathcal{M}$), то F' называется открытой подшкалой шкалы F ($\mathcal{M}'$ открытой подмоделью модели $\mathcal{M}$), если $(\forall a \in W)(\forall b \in W')(bRa \Rightarrow a \in W')$.

Сгустком шкалы F называется подмножество $C \subseteq W$ со свойствами:

1. $(\forall a, b \in C)(aRb \& bRa)$;
2. $(\forall a \in C, b \in W)((aRb \& bRa) \Rightarrow b \in C)$;

3. $C = \{a\}$, где a — иррефлексивный элемент.

Говорят,что множество сгустков образует антицепь, если сгустки этого множества попарно несравнимы по R.

Отображение φ шкалы $F = \langle W, R\rangle$ в шкалу $F' = \langle W', R'\rangle$ называется p-морфизмом, если:

1. $(\forall a, b \in W)\,(aRb \Rightarrow \varphi(a)R'\varphi(b))$;

2. $(\forall a, b \in W)\,(\varphi(a)R'\varphi(b)) \Rightarrow (\exists c \in W)\,(aRc\&\varphi(c) = \varphi(b))$.

Верхним конусом элемента a в транзитивной модели $\langle W, R, V\rangle$ называют множество

$$a^{R\leqslant} = \{b \mid \quad (b \in W)\&(aRb)\}.$$

Модель $\mathcal{M}_1 = \langle W_1, R_1, V_1\rangle$ называется открытой подмоделью модели $\mathcal{M}_2 = \langle W_2, R_2, V_2\rangle$, если:

1. $\langle W_1, R_1\rangle$ открытая подшкала шкалы $\langle W_2, R_2\rangle$;

2. $Dom\,(V_1) = Dom\,(V_2)$ и $(\forall p_i \in Dom\,(V_1))\,(V_1\,(p_i) = V_2\,(p_i) \cap W_1)$.

Здесь $Dom\,(V)$ — множество означиваемых пропозициональных переменных $P = \{p_1, p_2, ...\}$.

Шкала $\langle W_1, R_1\rangle$ называется открытой подшкалой шкалы $\langle W_2, R_2\rangle$, если $W_1 \subseteq W_2, R_1 = R_2 \cap W_1^2$ и более того $(\forall a \in W_1)\,(\forall b \in W_2)\,(aR_1b \Rightarrow b \in W_1)$.

Отображение φ шкалы $\langle W_1, R_1\rangle$ в шкалу $\langle W_2, R_2\rangle$ называется p–морфизмом, если:

1. $(\forall a, b \in W_1)\,(aR_1b \Rightarrow \varphi(a)\,R_2\varphi(b))$;

2. $(\forall a, b \in W_1)(\varphi(a)R_2\varphi(b) \Rightarrow (\exists c \in W_c)(aR_1c\&(\varphi(c) = \varphi(b)))$.

Отображение φ шкалы $\langle W_1, R_1, V_1\rangle$ в шкалу $\langle W_2, R_2, V_2\rangle$ называется p–морфизмом, если:

1. φ есть p–морфизм шкалы $\langle W_1, R_1\rangle$ в шкалу $\langle W_2, R_2\rangle$;

2. $Dom\,(V_1) = Dom\,(V_2)$;

3. $(\forall p_i \in Dom\,(V_1))\,(\forall a \in W_1)\,(a \models_{V_1} p_i \Leftrightarrow \varphi\,(a) \models_{V_2} p_i)$.

1.3 Правила вывода в модальных системах

Правило вывода:

$$R : \frac{A_1\,(p_1, \ldots, p_n)\,, \ldots, A_m\,(p_1, \ldots, p_n)}{B\,(p_1, \ldots, p_n)}$$

называется допустимым в логике λ, если для любого набора формул $c_1, ..., c_n$ из того, что $A_1 \left(c_1, \ldots, c_n\right) \in \lambda, \ldots, A_m \left(c_1, \ldots, c_n\right) \in \lambda$, следует $B \left(c_1, \ldots, c_n\right) \in$ $\in \lambda$. Обозначение $R \in Ad \left(\lambda\right)$.

Если в логике λ : $\quad (A \& B) \in \lambda \Leftrightarrow (A \in \lambda \quad$ и $\quad B \in \lambda,)$ то

$$\frac{A_1, \ldots, A_n}{B} \in Ad(\lambda) \Leftrightarrow \frac{A_1 \& \ldots \& A_n}{B} \in Ad(\lambda).$$

В таких логиках можно рассматривать только однопосылочные правила вывода вида: $\dfrac{A \left(p_1, \ldots, p_n\right)}{B \left(p_1, \ldots, p_n\right)}$. Правило $\dfrac{A \left(p_1, \ldots, p_n\right)}{B \left(p_1, \ldots, p_n\right)}$ истинно в модели $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$, если из того, что $F \models A(p_1, ..., p_n)$, следует $F \models B(p_1, ..., p_n)$, где $F = \langle W, R \rangle$.

Правило вывода $(*)$ истинно в модели $\mathfrak{M} = \langle W, R, V \rangle$, если из того, что $\mathfrak{F} \models A \left(p_1, \ldots, p_n\right)$ следует $\mathfrak{F} \models B \left(p_1, \ldots, p_n\right)$, где $\mathfrak{F} = \langle W, R \rangle$.

2 Базовые конструкции для построения критерия допустимости

2.1 N-характеристическая модель для логики $K4 + bw_2$

Глубиной α элемента a в модели $\mathcal{M}$ называется максимальное число сгустков в цепях сгустков, начинающихся со сгустка, содержащего элемент a. Множество элементов модели $\mathcal{M}$ глубины i называется i-тым слоем модели $\mathcal{M}$ и обозначается $Sl_i(\mathcal{M})$. N-характеристическая модель для $K4 + bw_2$ будет предоставлять из себя прямое объединение некоторого количества подмоделей $\mathcal{M}^\infty = \mathcal{M}_1^\infty \bigsqcup \cdots \bigsqcup \mathcal{M}_t^\infty$. N-характеристическая подмодель $\mathcal{M}_j^\infty$, $1 \leqslant j \leqslant t$ строится при помощи последовательности конечнослойных подмоделей $\mathcal{M}_j^1, \mathcal{M}_j^2, \mathcal{M}_j^3, \ldots$, где $\mathcal{M}_j^{k+1}$ получается из $\mathcal{M}_j^k$ достраиванием $(k+1)$-го слоя. При этом элементами $(k+1)$-го слоя являются только ко-накрытия всевозможных антицепей из модели $\mathcal{M}_j^k$, содержащих по крайней мере один элемент из $Sl_k(\mathcal{M}_j^k)$. Таким образом,

$$\mathcal{M}_j^\infty = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_j^k.$$

Напомним, что характеристический класс Fr для логики $K4 + bw_2$ состоит из всевозможных конечных корневых шкал, ширина которых не превосходит 2. По этой причине каждая из подмоделей $\mathcal{M}_1^\infty, \mathcal{M}_2^\infty, \mathcal{M}_3^\infty \ldots$ имеет либо один наибольший элемент, либо два максимальных элемента. В n-характеристической модели каждый элемент в любом сгустке, вырожденном или невырожденном, имеет единственное и уникальное означивание. Эти обстоятельства дают нам возможность точно определить число t прямых слагаемых модели $\mathcal{M}^\infty$.

Мы полагаем, что означиваются пропозициональные переменные из множества $\mathcal{P} = \{p_1, \ldots, p_n\}$. . Тогда всевозможных невырожденных сгустков элементов с уникальным означиванием может быть 2^{2^n}, а всевозможных вырожденных сгустков только 2^n . Итого всего $r = 2^{2^n} + 2^n$ сгустков. Тогда очевидно $t = \mathcal{C}_r^2 + r$.

Зададим некоторую нумерацию подмоделей $\mathcal{M}_j^\infty$, $1 \leqslant j \leqslant t$. По схеме построения $\mathcal{M}_j^\infty$ каждый элемент $a \in Sl_i(\mathcal{M}_j^\infty)$ однозначно характеризуется последовательностью $(j, i, \mathcal{A}, X, x)$, где $a \in \mathcal{M}_j^\infty$, и является конакрытием некоторой антицепи $\mathcal{A}$ из $\mathcal{M}_j^{i-1}$, где x — собственное означивание элемента a. Естественно будет отождествлять каждый элемент из $a \in \mathcal{M}^\infty(K4 + bw_2)$ с последовательностью $(j, i, \mathcal{A}, X, x)$.

Формально подмодель $\mathcal{M}_j^\infty = \langle W_j^\infty, R_j^\infty, V_j^\infty \rangle$ определяем индуктивно. Сначала строим однослойную подмодель $\mathcal{M}_j^1 = \langle W_j^1, R_j^1, V_j^1 \rangle$.

W_j^1 : $\quad W_j^1 = \{S_1, S_2\}$, где S_1, S_2 — произвольные сгустки из множества $O_1 \bigcup O_2$ (если они совпадают, то считаем, что это один сгусток), при этом

$O_1 = \bigcup\limits_{X \subseteq 2^{\mathcal{P}}} O_X,$

$O_X = \{(j, 1, \varnothing, X, x) \mid x \in X\}$, то есть

O_1, — это множество всевозможных сгустков рефлексивных элементов,

$O_2 = \bigcup\limits_{x \in 2^{\mathcal{P}}} O_x,$

$O_x = \{(j, 1, \varnothing, \varnothing, x) \mid x \in 2^{\mathcal{P}}\}$, то есть

O_2, — множество всех иррефлексивных элементов (вырожденных сгустков);

R_j^1 : $(j, 1, \varnothing, X, x) R_j^1 (j, 1, \varnothing, Y, y) \Leftrightarrow X = Y$, при этом R_j^1 — отношение эквивалентности;

V_j^1 : $V_j^1(p_i) = \{(j, 1, \varnothing, X, x) \mid p_j \in x\} \cup \{(j, 1, \varnothing, \varnothing, x) \mid p_i \in x\}$.

Предоложим, что уже построена подмодель $\mathcal{M}_j^k = \langle W_j^k, R_j^k, V_j^k \rangle$. Построим $\mathcal{M}_j^{k+1} = \langle W_j^{k+1}, R_j^{k+1}, V_j^{k+1} \rangle$.

Каждый элемент множества $Sl_{k+1}(\mathcal{M}_j^\infty)$ является ко-накрытием всевозможных антицепей сгустков. Для каждого варианта антицепей построим свои подмножества элементов из $Sl_{k+1}(\mathcal{M}_j^\infty)$.

1. Пусть антицепь $\mathcal{A}$ из $\mathcal{M}_j^k$ состоит из вырожденного сгустка из $Sl_k(\mathcal{M}_j^k)$, иррефлексивного элемента a. (см.Рис 1) Тогда определим множество: $M_j^1 = \bigcup\limits_a \{(j, k+1, \{a\}, X, x) \mid X \subseteq 2^{\mathcal{P}}, x \in X$ или $X = \varnothing, x \in 2^{\mathcal{P}}\}$.

2. Пусть антицепь $\mathcal{A}$ состоит из невырожденного сгустка $S \in Sl_k(\mathcal{M}_j^\infty)$. Тогда $M_j^2 = \bigcup\limits_{X \subseteq 2^{\mathcal{P}}} \{(j, k+1, \{S\}, X, x) \mid X \neq \varnothing, X \not\subseteq \bigcup\limits_{b \in S} V_j^k(b),$ $x \in 2^{\mathcal{P}}\} \cup \bigcup\limits_{x \in \mathcal{P}} (j, k+1, \{S\}, \varnothing, x)$.

3. Пусть антицепь $\mathcal{A}$ из $\mathcal{M}_j^k$ состоит из двух сгустков $\mathcal{A} = \{S_1, S_2\}$ и пусть S_1 с k-того слоя, а S_2 с i-го, $1 \leqslant i \leqslant k$ (см. Рис 2). Полагаем $M_j^3 = \{(j, k+1, \mathcal{A}, X, x) \mid X \subseteq 2^{\mathcal{P}}, x \in X$ или $X = \varnothing, x \in 2^{\mathcal{P}}\}$.

Окончательно $Sl_{k+1}(\mathcal{M}_j^\infty) = M_j^1 \cup M_j^2 \cup M_j^3$.

Тогда подмодель $\mathcal{M}_j^{k+1} = \langle W_j^{k+1}, R_j^{k+1}, V_j^{k+1} \rangle$ определим следующим образом:

W_j^{k+1} : $W_j^{k+1} = W_j^k \cup Sl_{k+1}(\mathcal{M}_j^\infty)$.

R_j^{k+1} : $R_j^{k+1} = R_j^k \cup R'$, где отношение R' :

1. Если $a \in Sl_k(\mathcal{M}_j^\infty)$ и $a \in Irr$, а элементы $b_1 = (j, k+1, a, X, x)$ и $b_2 = (j, k+1, a, Y, y)$ таковы, что $X \neq \varnothing$ и $Y \neq \varnothing$, то $b_1 R' b_2 \Leftrightarrow X = Y$, и R' — отношение эквивалентности.
   Кроме того для любого $b = (j, k+1, a, X, x) \Longrightarrow b R' a$.

2. Если S — сгусток из $Sl_k(\mathcal{M}_j^k)$, а $c_1 = (j, k+1, S, X, x)$ и $c_2 = (j, k+1, S, Y, y)$, то $c_1 R' c_2 \Leftrightarrow X = Y$ и R' — отношение эквивалентности.
   Кроме того для любого $a \in S$ и любого $c = (j, k+1, S, X, x) \Longrightarrow cR'a$

3. Если $\mathcal{A} = \{S_1, S_2\}$ — антицепь сгустков и один из сгустков взят из $Sl_k(\mathcal{M}_j^k)$, $d_1 = (j, k+1, \mathcal{A}, X, x)$ и $d_2 = (j, k+1, \mathcal{A}, Y, y)$, то $d_1 R' d_2 \Leftrightarrow X = Y$ и R' — отношение эквивалентности.
   Кроме того для любого $a_1 \in S_1$, $a_2 \in S_2$ и любого $d = (j, k+1, \mathcal{A}, X, x) \Longrightarrow$ $\Longrightarrow dR'a_i, \quad i \in \{1, 2\}$.

$V_j^{k+1}: \quad V_j^{k+1}(p_i) = \{(j, k+1, a, X, x) \mid p_i \in x\} \cup \{(j, k+1, S, X, x) \mid p_i \in x\} \cup$ $\cup \{(j, k+1, \mathcal{A}, X, x) \mid p_i \in x\}$ для всех антицепей вида $a, S, \mathcal{A}$.

Справедлива следующая теорема:

Теорема 2.1. *1. Модель $\mathcal{M}^\infty$ является n-характеристической для логики $K4 + bw_2$;*

2. Каждый элемент модели $\mathcal{M}^\infty$ — формульный.

Доказательство:
Необходимость: Покажем, что построенная нами модель M^∞ адекватна логике $K4 + bw_2$, т.е.

$$\forall \alpha = \alpha(p_1 \dots p_n) \qquad \alpha \in K4 + bw_2 \Rightarrow M^\infty \Vdash \alpha.$$

Доказательство введём контрпозицией.

Пусть $M^\infty \nVdash \alpha$. Это значит, что найдётся элемент a из M_j при некотором j таком, что $a \nVdash \alpha$. Но элемент a порождает открытую подмодель M' в M_j и $M' \nVdash \alpha$. Подмодель M' — конечная, корневая, транзитивная и ширины $\leqslant 2$. Её шкала попадает в класс Fr характеристических шкал логики $K4 + bw_2$. По этой причине $\alpha \notin K4 + bw_2$. Утверждение доказано.
Достаточность. Доказательство введём также контрпозицией. Пусть $\alpha \notin K4 + bw_2$. Тогда для некоторого фрейма $F \in Fr$ при некотором означивании V. Таким образом $N(F) \nVdash \alpha$, где $N(F)$ — модель, порождённая этим фреймом с означиванием V. Преобразуем $N(F)$.

1. Сжатием φ_1 сгустка $C \in N$ назовём слияние любого элемента a_1 с означиванием $V(a_1)$ с другим элементом a_2 с таким же означиванием $V(a_2) = V(a_1)$. Получим сгусток C'. Очевидно, что такое преобразование является p-морфизмом: $N(F) \overset{\varphi_1}{\to} N_1$. Произведём сжатие всех сгустков модели $N(F)$ до несжимаемых, получим модель N_1.

2. Горизонтальным сжатием φ_2 модели N_1 назовём слияние любых двух сгустков C_1 и C_2 с одинаковым означиванием элементов, т.е. $V_1(C_1) =$ $= V_2(C_2) \subseteq 2^{\mathcal{P}}$ являющихся ко-накрытием одной и той же антицепи или

максимальными элементами в одной и той же подмодели $\mathcal{M}_j^\infty$. Такое сжатие производим по слоям сверху вниз. Очевидно, что такое преобразование φ_2 модели N_1 также является p-морфизмом: $N_1 \overset{\varphi_2}{\to} N_2$. Полученную модель обозначим N_2.

3. Вертикальным сжатием φ_3 модели N_2 назовём слиянием любого невырожденного сгустка C_1 с невырожденным сгустком C_2, если:

   (a) C_1 — есть ко-накрытие C_2 и

   (b) $V_2(C_1) \subseteq V_2(C_2)$.

   Снова φ_3, — это p-морфизм: $N_2 \overset{\varphi_3}{\to} N_3$. Получим модель N_3.

В результате действия p-морфизма $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \varphi_3$ мы получим несжимаемую модель $N_3 = \langle W_3, R_3, V_3 \rangle$. По свойству p-морфизмов: $N_3 \not\Vdash \alpha$.

Следующим шагом построим изоморфное вложение ψ модели N_3 в $\mathcal{M}^\infty$. Вложение производим послойно с 1-го до последнего.

В модели $\mathcal{M}^\infty$ имеется подмодель $\mathcal{M}_j^\infty$ с максимальными сгустками C_1 и C_2 (или одним сгустком C), чьи означивания совпадают соответственно с означиваниями максимальных элементов $\overline{C_1}$, $\overline{C_2} \in N_3$, т.е $V^\infty(C_1) = V_3(\overline{C_1})$ и $V^\infty(C_2) = V_3(\overline{C_2})$ (или только $\overline{C_1}$). Тогда $\forall a \in \overline{C_i}\ \psi(a) = (j, 1, \varnothing, V^\infty(C_i), V_3(a))$, где $V_3(a) \in V^\infty(C_i)$, $i \in 1, 2$.

Предположим, что мы произвели вложения для k первых слоёв модели N_3. Определим вложение для $k+1$-го слоя.

Пусть сгусток $\overline{C}$ лежит в $k+1$ слое модели N_3 и является ко-накрытием антицепи $A = \{\overline{C_3}, \overline{C_4}\}$. Поскольку вложение сгустков из A уже произведено, то для $\forall b \in \overline{C}\ \psi(b) = (j, k+1, \psi(A), V^\infty(C), V_3(b))$, где $V_3(\overline{C}) = V^\infty(C)$, а $V_3(a) \in V^\infty(C)$.

В результате построенного вложения мы получили подмодель N модели $\mathcal{M}^\infty$, изоморфную N_3. При этом $N \not\Vdash \alpha$. Тогда и $\mathcal{M}^\infty \not\Vdash \alpha$, что и требовалось доказать.

Элемент a n-характеристической модели $\mathcal{M}^\infty = \langle W^\infty, R^\infty, V^\infty \rangle$ называется формульным, если существует формула $\alpha(p_1, \ldots, p_n)$ такая, что $a \Vdash \alpha(p_1, \ldots, p_n)$.

В работе [1] Рыбакова показано, что каждый элемент n-характеристической модели $\mathcal{M}^\infty(K4 + bw_2)$ — формульный. Формула α для элемента a строится регулярным способом из формул, построенных ранее для всех элементов подмодели, порожденной a. Поскольку построенная нами модель $\mathcal{M}^\infty(K4 + bw_2)$ является открытой подмоделью $\mathcal{M}^\infty(K4)$, то и каждый элемент $a \in \mathcal{M}^\infty(K4 + bw_2)$ является формульным. Доказательство теоремы 2.1 завершено.

3 Алгоритмический критерий допустимости

Любое правило вывода в модальной системе $K4 + bw_2$ эквивалентно однопосылочному. Не нарушая общности рассуждений, будем в дальнейшем рассматривать только правила с одной посылкой.

Известно ([2, 4]), что для произвольного однопосылочного правила A/B существует эквивалентное ему правило в редуцированной форме, т.е. правило вида:

$$r = \frac{\bigvee\limits_{1\leqslant j\leqslant n} \varphi_j}{\neg\Diamond p_0},$$

где

$$\varphi_j := \bigwedge_{0\leqslant i\leqslant m} p_i^{k(i,j,1)} \wedge \bigwedge_{0\leqslant i\leqslant m} (\Diamond p_i)^{k(i,j,2)}$$

и $k(i,j,1), k(i,j,2) \in \{0,1\}, \quad t^0 = t,\ t^1 = \neg t.$

Обозначим $D(r)$ — множество всех дизъюнктивных членов посылки правила r, т.е. $D(r) = \{\varphi_1, \dots, \varphi_l\}$.

Зафиксируем и следующие обозначения:
$\Phi_1(\varphi_j) = \{p_i \mid \quad 0 \leqslant i \leqslant m,\ k(i,j,1) = 0\};$
$\Phi_2(\varphi_j) = \{p_i \mid \quad 0 \leqslant i \leqslant m,\ k(i,j,1) = 0\}.$

Рассмотрим некоторую модель $\mathcal{M}_X = \langle X, R, V\rangle$, где X — подмножество из $D(r)$. Отношение достижимости R и означивание определим следующим образом:
$\forall\varphi_j, \varphi_k \in X(\varphi_j R\varphi_k \Leftrightarrow \Phi_1(\varphi_k) \cup \Phi_2(\varphi_k) \subseteq \Phi_2(\varphi_j));$
$\forall\varphi_j \in X(\varphi_j \in V(p_i) \Leftrightarrow p_i \in \Phi_1(\varphi_j)).$
Замечание:

1. Так определенное R будет транзитивным. Действительно, пусть $\varphi_i R\varphi_j$ и $\varphi_j R\varphi_k$. Это значит, что $\Phi_1(\varphi_j) \cup \Phi_2(\varphi_j) \subseteq \Phi_2(\varphi_i)$ и $\Phi_1(\varphi_k) \cup \Phi_2(\varphi_k) \subseteq$ $\subseteq \Phi_2(\varphi_j)$. Отсюда $\Phi_1(\varphi_j) \cup (\Phi_1(\varphi_k) \cup \Phi_2(\varphi_k)) \subseteq \Phi_2(\varphi_i)$ и, наконец, $\Phi_1(\varphi_k) \cup \Phi_2(\varphi_k) \subseteq \Phi_2(\varphi_i)$, т.е. $\varphi_i R\varphi_k$.

2. Рефлексивным будет элемент φ_j такой, что $\Phi_1(\varphi_j) \cup \Phi_2(\varphi_j) \subseteq \Phi_2(\varphi_j)$, т.е. $\Phi_1(\varphi_j) \subseteq \Phi_2(\varphi_j)$.

3. Два рефлексивных элемента φ_j и φ_k входят в один сгусток тогда и только тогда, когда $\Phi_2(\varphi_j) = \Phi_2(\varphi_k)$, это следует из определения R.

Теорема 3.1. *Если правило r_f имеет редуцированную форму и не является допустимым в $K4 + bw_2$, то модель $\mathcal{M}_X$ имеет следующие свойства:*

1. $\mathcal{M}_X$ может иметь рефлексивные и иррефлексивные элементы;

2. В $\mathcal{M}_X$ имеется φ_j такое, что $p_0 \in \Phi_2(\varphi_j)$;

3. В $\mathcal{M}_X$ есть элементы φ_j такие, что $\Phi_2(\varphi_j) = \varnothing$ и есть сгустки $\mathcal{C} = \{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ такие, что $\Phi_2(\varphi_j) = \bigcup\limits_{i=1}^{m} \Phi_1(\varphi_i)$ для $\forall i, 1 \leqslant i \leqslant m$;

4. Для любого максимального сгустка C модели $\mathcal{M}_X$, любого элемента φ_j и любого $p_i \in \Phi_2(\varphi_j) \backslash \Phi_1(\varphi_j)$ существует $\varphi_k \in C$ такое, что $p_i \in \Phi_1(\varphi_k)$;

5. Для любого $\varphi_j \in X$ выполняется $\varphi_j \models_V \varphi_j$;

6. Ширина шкалы модели M_X не превосходит 2;

7. Для любой антицепи ∇ в модели $\mathcal{M}_X$ существуют:

(a) $\varphi^*_\nabla \in \mathcal{M}_X$ такой, что $\Phi_2(\varphi^*_\nabla) = \Phi_1(\varphi^*_\nabla) \cup (\bigcup\limits_{\varphi \in \nabla} \Phi_2(\varphi))$;

(b) $\varphi_\nabla \in \mathcal{M}_X$ такой, что $\Phi_2(\varphi_\nabla) = \bigcup\limits_{\varphi \in \nabla} (\Phi_1(\varphi) \cup \Phi_2(\varphi))$.

Пусть правило r не допустимо в $K4 + bw_2$. По Теореме 2.1 существует означивание S переменных из r на шкале модели $\mathcal{M}^\infty$, при котором посылка правила r истинна всюду, а заключение ложно, то есть

$$\bigcup_{j=1}^{n} S(\varphi_j(p_0, \dots, p_m)) = W^\infty, \qquad S(\neg \Diamond p_0) \neq W^\infty$$

или иначе

$$\bigcup_{j=1}^{n} \varphi_j(S(p_0), \dots, S(p_m)) = W^\infty, \qquad \Diamond S(p_0) \neq \varnothing. \tag{3.1}$$

В качестве подмножества X из $D(r)$ будем рассматривать только подмножества элементов φ_j, принимающих в (3.1) непустые значения.

Утверждение 3.1. Если $\check{C}$ — произвольный сгусток из $\mathcal{M}^\infty$, то либо $\check{C} \in S(C)$, либо $\check{C} \cap S(C) = \varnothing$, где C — некоторый сгусток из X.

Доказательство:

Пусть $(a, b) \in R^\infty, a \in S(\varphi_j), b \in S(\varphi_k)$. Иными словами: $a \models_S \varphi_j$ и $b \models_S \varphi_k$. Для любого $p_i \in \Phi_1(\varphi_k)$ из того, что $b \models_S p_i$ следует $a \models_S \Diamond p_i$ и $\Phi_1(\varphi_k) \subseteq \Phi_2(\varphi_j)$.

Для любого $p_i \in \Phi_2(\varphi_k)$ из того, что $b \models_S \Diamond p_i$ следует $a \models_S \Diamond p_i$ и в виду транзитивности R^∞ $\Phi_2(\varphi_k) \subseteq \Phi_2 \varphi_j)$. Это означает, что $\Phi_1(\varphi_k) \cup \Phi_2(\varphi_k) \subseteq \Phi_2(\varphi_j)$, то есть $(\varphi_j, \varphi_k) \in R$.

Если теперь элементы a и b из одного сгустка $\check{C} \in \mathcal{M}^\infty$, то $(a, b) \in R^\infty \Rightarrow (\varphi_j, \varphi_k) \in R$ и $(b, a) \in R^\infty \Rightarrow (\varphi_k, \varphi_j) \in R$, то есть φ_j и φ_k тоже из одного сгустка C и $\check{C} \subseteq S(C)$. Утверждение 3.1 доказано.

Утверждение 3.2. Если $a \in S(\varphi_j)$ и $(a, a) \in R^\infty$, то $(\varphi_j, \varphi_j) \in R$.

Доказательство:

Действительно, $a \in S(\varphi_j) \Rightarrow a \models_S \varphi_j$ и пусть $k(i,j,1) = 0$, то есть $a \models_S p_i, (p_i \in \Phi_1(\varphi_j))$ Из рефлексивности элемента a следует $a \models_S \Diamond p_i$, $(p_i \in \Phi_2(\varphi_j))$. Это значит $\Phi_1(\varphi_j) \subseteq \Phi_2(\varphi_j)$, то есть элемент φ_j рефлексивен в $\langle X, R, V\rangle$. Утверждение 3.2 доказано.

Следствие: Если φ_j — иррефлексивный, то $S(\varphi_j)$ не содержит рефлексивных элементов из $\mathcal{M}^\infty$.

Действительно, если $(\varphi_j, \varphi_j) \notin R$, но $\exists a \in S(\varphi_j)$ такой, что $(a, a) \in R^\infty$, то согласно Утверждению 3.2 $\Rightarrow (\varphi_j, \varphi_j) \in R$. Противоречие.

Для произвольного сгустка C из X обозначим $m(C)$ — множество максимальных сгустков и максимальных иррефлексивных элементов из $S(C)$: $m(C) = \{\check{C}_1, \ldots, \check{C}_t, a_1, \ldots, a_u\}$.

Определим некоторое подмножество $\mathcal{H}$ в C:
$\mathcal{H}(C) = \{\varphi_l \mid \ \ \varphi_l \in C, \ (\exists \check{C} \in m(C))(S(\varphi_l) \cap \check{C} \neq \varnothing)$ или $(\exists a \in m(C))(a \in S(\varphi_l))\}$. Очевидно, что $\mathcal{H}(\{\varphi\}) = \{\varphi\}$ для любого одноэлементного сгустка $\{\varphi\}$.

Определим X_{irr} как множество всех иррефлексивных элементов из X:

$$\forall p_i \left(p_i \in \Phi_1\left(\varphi_l\right) \Rightarrow \left(\exists \varphi_p\right)\left(\varphi_p \in C \& p_i \in \Phi_1\left(\varphi_p\right) \& \Phi_2\left(\varphi_l\right) = \Phi_2\left(\varphi_p\right)\right)\right).$$

Полагаем $X = (\bigcup\limits_{C \in X} \mathcal{H}(C)) \cup X_{irr}$ (все одноэлементные сгустки из X входят в X).

Выполнимость условия 1.

Из Утверждения 3.1 и 3.2 следует,что на сгустках из $\mathcal{M}^\infty$ истинны элементы из сгустков множества X. Это означает, что в X имеются рефлексивные элементы.

Рассмотрим любой иррефлексивный элемент a 1-го слоя модели $\mathcal{M}^\infty$ и пусть $a \models_S p_l, \quad 0 \leqslant l \leqslant m$. Для a не существует ни одного p_i такого, что $a \models_{V^\infty} \Diamond p_i$. Но $a \in S(\varphi_\alpha)$ для некоторого φ_α, т.е. $a \models_S \varphi_\alpha$. Тогда $\Phi_2\left(\varphi_\alpha\right) = \varnothing$. Это значит, что φ_α — иррефлексивный элемент из X.

Выполнимость условия 2.

Из (3.1):$S(\neg\Diamond p_0) = W^\infty \setminus S(\Diamond p_0) \neq W^\infty$. Отсюда $S(\Diamond p_0) \neq \varnothing$. Тогда найдётся $a \in S(\Diamond p_0)$ такой, что $a \models_S \Diamond p_0$. С другой стороны $\exists \varphi_\beta \in \mathcal{M}$ с условием $a \in S(\varphi_\beta)$, что означает $a \models_S S(\varphi_\beta)$. Из сказанного выше следует, что $p_0 \in \Phi_2\left(\varphi_\beta\right)$, что и требовалось.

Замечание: В дальнейшем полагаем, что подмножество X состоит из элементов φ_j, лежащих в верхнем конусе $\varphi_\beta^{R\leqslant}$.

Выполнимость условия 3.

Пусть a — иррефлексивный элемент первого слоя модели $\mathcal{M}^\infty$ и $a \in S(\varphi_j)$ для некоторого φ_j. Пусть $p_i \in \Phi_2(\varphi_j) \neq \varnothing$. Тогда $a \Vdash \Diamond p_i$, что для элемента a невозможно, значит всё-таки $\Phi_2(\varphi_j) = \varnothing$. Очевидно, что это условие определяет максимальный вырожденный сгусток в $\langle X, R, V\rangle$.

Рассмотрим теперь невырожденный сгусток $\check{C}$ с первого слоя модели $\mathcal{M}^\infty$. Согласно утверждению 3.1 $\check{C}$ целиком лежит в $S(C)$, где $C = \{\varphi_1, \ldots$ $\ldots, \varphi_m\}$ есть некоторый сгусток из $\langle X, R, V\rangle$ и целиком в $S(\varphi_j)$ для некоторого j. По причине максимальности $\check{C}$: $\{p_i \mid \forall a \in \check{C}, a \Vdash_{V^\infty} \Diamond p_i\} =$
$= \bigcup\limits_{a\in S(C)} \{p_i \mid a \Vdash_{V^\infty} p_i\}$. Первое из этих множеств совпадает с $\Phi_2(\varphi_j)$, а второе с $\bigcup\limits_{i=1}^{m} \Phi_1(\varphi_i)$. Отсюда следует : $\Phi_2(\varphi_j) = \bigcup\limits_{i=1}^{m} \Phi_1(\varphi_i)$. Указанное условие определяет максимальный невырожденный сгусток C в модели $\langle X, R, V\rangle$.

Выполнимость условия 4.

Рассмотрим произвольный максимальный сгусток C из $\mathcal{M}_X$, произвольный элемент $\varphi_j \in C$ и $\forall p_i \in \Phi_2(\varphi_j) \setminus \Phi_1(\varphi_j)$.

Пусть $\check{C}$ — какой-нибудь максимальный в $\mathcal{M}^\infty$ сгусток из $S(\varphi_j)$. Пусть $a \in \check{C}$ и $a \models_S \Diamond p_i$.

Сгусток $\check{C}$ не может быть вырожденным, то есть просто иррефлексивным элементом. Тогда $\exists b \in \check{C}$ такой, что $(a, b) \in R^\infty$ и $b \models_S p_i$.

Пусть $b \in S(\varphi_k)$. Согласно Утверждению 3.1 в $S(\varphi_k)$ содержится и весь сгусток $\check{C}$. В силу максимальности $\check{C}$ $\varphi_k \in X$. Покажем, что $\varphi_k \in C$. Поскольку $a, b \in \check{C}$, то и $\varphi_j, \varphi_k \in C'$, где $C' \in Y$. Последнее означает, что $\Phi_2(\varphi_j) = \Phi_2(\varphi_k)$. Но это же означает также, что $\varphi_k \in C$.

Выполнимость условия 5.

По определению означивания V на φ_j истинна немодальная часть всех конъюнктов φ_j. Рассмотрим модальную часть.

Пусть $\Diamond p_i$ — конъюнктивный член φ_j. По определению существует элемент $a \in S(\varphi_j)$ такой, что $a \models_S \Diamond p_i$. Тогда найдётся b такое, что $(a, b) \in R^\infty$ и $b \models_S p_i$. При этом $b \in S(\varphi_j)$ для некоторого φ_k. Тогда конечно $\varphi_k \models_V p_i$. Более того $(\varphi_j, \varphi_k) \in R$.

Действительно, если $p_t \in \Phi_1(\varphi_k) \cup \Phi_2(\varphi_k)$, тогда $b \models_S \Diamond p_t$ или $b \models_S p_t$. Следовательно, $a \models_S \Diamond p_t$, что означает $p_t \in \Phi_2(\varphi_j)$. Таким образом, $\varphi_j R \varphi_k$ и $\varphi_j \models_V \Diamond p_i$.

Обратно, пусть $\varphi_j \models_V \Diamond p_i$. Это значит, что найдётся $\varphi_k \in X$ такое, что $\varphi_j \models_V p_i$ и $(\varphi_j, \varphi_k) \in R$. Тогда $p_i \in \Phi_1(\varphi_k)$ и так как $\Phi_1(\varphi_k) \cup \Phi_2(\varphi_k) \subseteq$
$\subseteq \Phi_2(\varphi_j)$, то $p_i \in \Phi_2(\varphi_j)$. Это значит, что $\Diamond p_i$ — конъюнктивный член φ_j.

Выполнимость условия 6.

Рассмотрим произвольный элемент $\varphi_x \in \mathcal{M}$. Если φ_x — максимальный, то условие накрытия выполняется тривиальным образом. Допустим φ_x — не максимальный элемент, и пусть имеются элементы φ_y и φ_z такие, что $(\varphi_x, \varphi_y) \in R$ и $(\varphi_x, \varphi_z) \in R$. На φ_x, φ_y и φ_z можно посмотреть, как на элементы x, y, z из $\mathcal{M}^\infty$ соответственно. Но для y и z в модели $\mathcal{M}^\infty$ существует максимальный элемент u такой, что $(y, u) \in R^\infty$ $(z, u) \in R^\infty$.

При этом $u \in S(\varphi_u)$ для некоторого $\varphi_u \in \mathcal{M}$.

Получаем, что $(\varphi_y, \varphi_u) \in R$ и $(\varphi_z, \varphi_u) \in R$. Таким образом свойство накрытия в модели $\mathcal{M}$ выполняется. Покажем, что φ_u — максимальный элемент в $\mathcal{M}$.

Пусть u принадлежит некоторому сгустку $C \in \mathcal{M}^\infty$.

1. Если C — вырожденный, то u — иррефлексивный элемент и $\varphi_u = u$. Тогда $\Phi_2(\varphi_u) = \varnothing$, то есть элемент φ_u — максимальный в $\mathcal{M}$.

2. Пусть C — невырожденный и $\varphi_u \in C \subseteq \mathcal{M}^\infty$. Поскольку C — максимальный сгусток, то $\Phi_2(\varphi_u)$ определяется только означиваниями элементов из C. С другой стороны, пусть $\varphi_u \in C$, где C — некоторый сгусток модели $\mathcal{M}$.

Тогда $\forall \varphi \in C(\Phi_2(\varphi) = \Phi_2(\varphi_u))$. Предположим теперь, что из сгустка C достижим максимальный сгусток C' и $\exists p^* \notin \bigcup\limits_{\varphi \in C} \Phi_1(\varphi)$ и $p^* \in \Phi_1(\varphi_k)$, где $\varphi_k \in C'$. В этом случае $(\varphi_u, \varphi_k) \in R$ и по определению $\Phi_1(\varphi_k) \cup \Phi_2(\varphi_k) \subseteq$ $\subseteq \Phi_2(\varphi_u)$. Тогда $\Phi_1(\varphi_k) \subseteq \Phi_2(\varphi_u)$ и p^* попадает в означивание некоторого элемента a из сгустка C.

Из максимальности сгустка C в $S\,(C)$ следует, что найдётся $\varphi_l \in C$ такое, что $a \models_S \varphi_l$ и $a \models_S p^*$.

Отсюда $p^* \in \Phi_1(\varphi_l) \subseteq \bigcup\limits_{\varphi \in C} \Phi_1(\varphi)$. Противоречие. Таким образом доказано, что C — максимальный сгусток в модели $\mathcal{M}$, что и требовалось.

Выполнимость условия 7.

Рассмотрим произвольную антицепь ∇. Если $\nabla = \varnothing$, то в качестве φ^*_∇ возьмём φ_s с условием $\Phi_1(\varphi_s) = \Phi_2(\varphi_s)$, а в качестве φ_∇ — элемент φ_t с условием $\Phi_2(\varphi_t) = \varnothing$.

Существование таких элементов следует из доказанного выше условия *3*.

Пусть ∇ — односгустковая. Тогда в качестве $\varphi^*_\nabla = \varphi_\nabla$ можно выбрать любой элемент $\varphi_\alpha \in \nabla$, так как для $\forall \varphi_j \in \nabla \Phi_2(\varphi_j) = \Phi_2(\varphi_\alpha)$ и $\Phi_1(\varphi_\alpha) \subseteq$ $\subseteq \Phi_2(\varphi_\alpha)$ следует

$$\Phi_2(\varphi^*_\nabla) = \Phi_2(\varphi_\alpha) = \Phi_1(\varphi_\alpha) \cup \bigcup_{\varphi_j \in \nabla} \Phi_2(\varphi_j) = \bigcup_{\varphi_j \in \nabla} \Phi_2(\varphi_j) = \Phi_2(\varphi_\nabla).$$

Пусть теперь ∇ состоит из сгустков $C_1, \dots, C_q$ и иррефлексивных элементов $\varphi_{j_1}, \dots, \varphi_{j_u}$. Выберем в каждом $m(C_i), 1 \leqslant i \leqslant q$ по сгустку $\check{C}_i$, и в каждом $m(\varphi_{j_k}), 1 \leqslant k \leqslant u$ по иррефлексивному элементу a_{j_k}. Получим антицепь $\check{\nabla} = \left\{\check{C}_1, \dots, \check{C}_q, a_{j_1}, \dots, a_{j_u}\right\}$ из $\mathcal{M}^\infty$. По построению n-характеристической модели существует одноэлементный сгусток $\{b\}$, покрывающий ∇.

Теорема 3.2. *Если r — правило в редуцированной форме и существует подмножество X из $D(r)$, для которого справедливы условия (1)-(6) из Теоремы 3.1, то r не допустимо в логике $K4 + bw_2$.*

Пусть справедливы условия (1)-(7) из Теоремы 3.1 для $X \subseteq D(r)$ и $\|X\| = m$. Основываясь на Теореме 3.1 можем считать, что $\mathcal{M} = \langle X, R, V\rangle$ — есть открытая подмодель глубины s n-характеристической модели $\mathcal{M}^{\infty}$. Зафиксируем это вложение и будем считать каждое $\varphi_j \in X$ элементом из $\mathcal{M}^{\infty}$ с означиванием $\Phi_1(\varphi_j)$.

Для каждого $\varphi_j \in X$ построим последовательность наборов φ_j^t элементов из $\mathcal{M}^{\infty}$, удовлетворяющую условиям:

1. $\varphi_\alpha^t \cap \varphi_\beta^t = \varnothing$ при $\alpha \neq \beta$;
2. $\varphi_\alpha^t \subseteq \varphi_\alpha^{t+1}$.

Первоначально полагаем $\varphi_j^0 = \{\varphi_j\}$ для $\forall \varphi_j \in X$.

Согласно условию 3 Теоремы 3.1 существует φ_s такой, что $\Phi_1(\varphi_s) = \Phi_2(\varphi_s)$. Зафиксируем этот φ_s и переопределим φ_s^0, положив:

$$\varphi_s^0 = \{\varphi_s\} \cup \{Sl_1\{\mathcal{M}^{\infty}\} \setminus (\bigcup_{k\neq s} \varphi_k^0)\},$$

если $\Phi_2(\varphi_s) = \varnothing$ и

$$\varphi_s^0 = \{\varphi_s\} \cup (\bigcup_{a\in A_s} \{a\}),$$

если $\Phi_2(\varphi_s) \neq \varnothing$ и

$$A_s = \{a \mid \ \ a \in Sl_1\{\mathcal{M}^{\infty}\},\ \ (a,a) \in R^{\infty},\ \ a \notin \varphi_k^0,\ \ k \neq s\}.$$

Также согласно условию 3 Теоремы 3.1 существует φ_t такой, что $\Phi_2(\varphi_t) = \varnothing$.

Переопределим и φ_t, положив:

$$B_t = \{b \mid \ b \in S_1(\mathcal{M}^{\infty}), \quad (b,b) \notin R^{\infty}, \quad b \notin \varphi_k^0,\ \ k \neq t\}.$$

Из этих определений непосредственно следует выполение условия (3.1) для φ_j^0.

Вводим вспомогательные множества:

$$[\varphi_j^0] = \{a \mid \ \ a \in W^{\infty} \setminus (\bigcup_{\varphi_k \in X} \varphi_k^0),\ a \in \Diamond\varphi_j^0,\ a \notin \Diamond\varphi_j^0,\ k \neq j\}.$$

Полагаем $\varphi_j^1 = \varphi_j^0 \cup \left[\varphi_j^0\right]$.

Свойства (1) и (2) следуют из этих определений.

Предположим, что $\varphi_j^t, \quad 0 \leqslant t < \|X\|$ для всех $\varphi_j \in X$ уже построены.

Рассмотрим вспомогательные множества:

$$[\varphi_{j_1}^t, \ldots, \varphi_{j_{t+1}}^t] = \{a \mid a \in \mathcal{M}^{\infty} \setminus (\bigcup_{\varphi_j \in X} \varphi_j^t), a \in \bigcap_{i=1}^{t+1} \Diamond\varphi_{j_i}^t, a \notin \Diamond\varphi_l^t, l \neq j_1, \ldots, j_{t+1}\}.$$

Это множество элементов $a \in \mathcal{M}^\infty$ таких, что из a достижимы все элементы из $\varphi^t_{j_1}, \dots, \varphi^t_{j_{t+1}}$, но не достижимы элементы из других наборов.

Возьмём антицепь ∇ минимальных сгустков и иррефлексивных элементов множества $\{\varphi_{j_1}, \dots, \varphi_{j_{t+1}}\} \subseteq X$. По условию 6 Теоремы 3.1 существуют рефлексивный φ^*_∇ и иррефлексивный φ_∇ элементы из X.

Если $\varphi^*_\nabla = \varphi_\nabla$ (элементы из X с пустым означиванием), то обозначим его $\varphi_\alpha = \varphi^*_\nabla = \varphi_\nabla$ и положим $\varphi^{t+1}_\alpha = \varphi^t_\alpha \cap \left[\varphi^t_{j_1}, \dots, \varphi_{j_{t+1}}\right]$.

Если $\varphi^*_\nabla \neq \varphi_\nabla$, то введём множества:

$$[\varphi_{j_1}, \dots, \varphi_{j_{t+1}}]^* = \{a \mid \quad a \in [\varphi^t_{j_1}, \dots, \varphi^t_{j_{t+1}}], a \in \Diamond(\bigcap_{i=1}^{t+1} \varphi_{j_i})$$

и

$$[\varphi_{j_1}, \dots, \varphi_{j_{t+1}}]^- = [\varphi^t_{j_1}, \dots, \varphi^t_{j_{t+1}}] \setminus [\varphi_{j_1}, \dots, \varphi_{j_{t+1}}]^*.$$

Полагаем $(\varphi^*_\nabla)^{t+1} = (\varphi^*_\nabla)^t \cup [\varphi_{j_1}, \dots, \varphi_{j_{t+1}}]^*$,

$(\varphi_\nabla)^{t+1} = (\varphi_\nabla)^t \cup \left[\varphi_{j_1}, \dots, \varphi_{j_{t+1}}\right]^-$.

Очевидно, что $\varphi^{t+1}_\alpha \cap \varphi^{t+1}_\beta = \varnothing$ при $\alpha \neq \beta$, так как множества, присоединяемые к φ^t_α в определении φ^{t+1}_α попарно не пересекаются и не пересекаются с $\bigcup\limits_{\varphi_\alpha \in X} \varphi^t_\alpha$. Свойство 2 выполняется по построению.

После того, как все построения φ^t_j до φ^m_j, $m = \|X\|$ завершены, приступим к доказательству трех свойств этих последовательностей.

Свойство 1.

Если $a \in W^\infty$ *и* $a \neq \bigcup\limits_{\varphi_j \in X} \varphi^{t+1}_j$, *то* $a \in \bigcap\limits_{1 \leqslant i \leqslant t+2} \Diamond\varphi^t_{j_i}$ *для некоторых* $j_1, \dots, j_{t+2}$.

Действительно, пусть $a \neq \bigcup\limits_{\varphi_j \in X} \varphi^{t+1}_j$. Ввиду того, что $\Diamond\varphi^l_j \subseteq \Diamond\varphi^{l+1}_j$ имеем $a \notin \bigcup\limits_{\varphi_j \in X} \varphi^0_j$. По построению $Sl_1(\mathcal{M}^\infty) = \bigcup\limits_{\varphi_j \in X} \varphi^0_j$.

Однако, найдётся φ_{j_1} такое, что $a \in \Diamond\varphi^0_{j_1}$.

Если $a \notin \Diamond\varphi^0_l$ для $\forall l \neq j_i$, то $a \in \left[\varphi^0_\alpha\right]$ и $a \in \varphi^1_\alpha \subseteq \varphi^{t+1}_\alpha$, что противоречит условию. Следовательно, найдётся φ_{j_2} такое, что $j_1 \neq j_2$ и $a \in \Diamond\varphi^0_{j_2}$ и $a \in \Diamond\varphi^1_{j_1} \cap \Diamond\varphi^1_{j_2}$.

Пусть $t \geqslant 1$, тогда $a \neq \bigcup\limits_{\varphi_j \in X} \varphi^1_j$ и $a \in \left[\varphi^1_{j_1}, \varphi^1_{j_2}\right]$,

откуда $a \in \varphi^1_j \cup \left[\varphi^1_{j_1}, \varphi^1_{j_2}\right] \subseteq \varphi^2_j$ и $a \in \bigcup\limits_{\varphi_j \in X} \varphi^2_j \subseteq \bigcup\limits_{\varphi_j \in X} \varphi^{t+1}_j$, что противоречит условию. Значит найдётся φ_{j_3} такое, что $a \in \Diamond\varphi^1_{j_3}$ и

$$a \in \Diamond\varphi^1_{j_1} \cap \Diamond\varphi^1_{j_2} \cap \Diamond\varphi^1_{j_3} \subseteq \Diamond\varphi^2_{j_1} \cap \Diamond\varphi^2_{j_2} \cap \Diamond\varphi_{j_3}.$$

Продолжим эти рассуждения, получим:

$$a \neq \bigcup_{\varphi_j \in X} \varphi^t_j, x \in \Diamond\varphi^{t-1}_{j_1} \cap \dots \cap \Diamond\varphi^{t-1}_{j_{t+1}} \subseteq \Diamond\varphi^t_{j_1} \cap \dots \cap \Diamond\varphi^t_{j_{t+1}}.$$

Тогда, если $a \in \Diamond\varphi_k^t, k \neq j_1, \ldots, j_{t+1}$, то $a \in \left[\varphi_{j_1}^t, \ldots, \varphi_{j_{t+1}}^t\right] \subseteq \bigcup\limits_{\varphi_j \in X} \varphi_j^{t+1}$. Снова противоречие. Следовательно, найдётся $\varphi_{j_{t+2}}$ отличное от уже найденных и такое, что $a \in \bigcup\limits_{i=1}^{t+2} \Diamond\varphi_{j_i}$. Свойство 1 доказано.

Свойство 2.

Если $\|X\| = m \geqslant 2$, *то* $\forall a \in \mathcal{M}^\infty (a \in \bigcup\limits_{\varphi_j \in X} \varphi_j^m)$.

Предположим, что $a \notin \bigcup\limits_{\varphi_j \in X} \varphi_j^{m-1}$. Применяем доказанное свойство 1 при $t = m - 2$. Получаем:

$$a \in \varphi_{j_1}^{m-2} \cap \cdots \cap \Diamond\varphi_{j_m}^{m-2} \subseteq \Diamond\varphi_{j_1}^{m-1} \cap \cdots \cap \Diamond\varphi_{j_m}^{m-1}.$$

Поскольку элементов φ_j с $j \neq j_1, \ldots, j_m$ в X нет, то $a \in \left[\varphi_{j_1}^{m-1}, \ldots, \varphi_j^{m-1}\right] \subseteq$ $\subseteq \bigcup\limits_{\varphi_j \in X} \varphi_j^m$.

Свойство 2 доказано.

Пусть $m = 1$. Это значит, что посылка правила r состоит из одного дизъюнкта. Поскольку условия 2 и 3 из Теоремы 3.1 выполняются для $\mathcal{M} = \langle X, R, V\rangle$, то единственный элемент $\varphi_j \in X$ обладает свойствами $p_0 \in \Phi_2(\varphi_j)$ и $\Phi_2(\varphi_j) = \Phi_1(\varphi_j)$. В этом случае r влечёт правило $\Diamond p_0 / \neg\Diamond p_0$. Оно очевидно ложно. Поэтому для случая $m = 1$ Теорема 3.2 доказана. Продолжаем доказательство для $m \geqslant 2$.

На основании доказанного свойства 2 можем ввести новое означивание $\psi : \{p_1, \ldots, p_n\} \to 2^{W^\infty}$ такое, что для $\forall a \in \varphi_j^m (a \models_\psi p_i \Leftrightarrow p_i \in \Phi_1(\varphi_j))$. Для такого означивания ψ справедливо:

Свойство 3.

$\forall a \in \varphi_j^m (a \models_\psi \varphi_j)$.

Доказательство ведём индукцией по минимальному t такому, что $a \in \varphi_j^t$.

Пусть $t = 0$, то есть $a \in \varphi_j^0$. Рассмотрим случай, когда $j \neq s$ и $j \neq t$(см.определение φ_j^0). Шкалы $a^{R^\infty \leqslant}$ и $\varphi_j^{R\leqslant}$ изоморфны по предположению.

Рассмотрим случай, когда элемент a — рефлексивен. Возьмём φ_β такой, что $(\varphi_j, \varphi_\beta) \in R$. Тогда $\varphi_\beta = b \in W^\infty$ и $(a, b) \in R^\infty$. По определению φ_β^0 : $\{\varphi_\beta\} = \{b\}$, поэтому $b \in \varphi_\beta^0 \subseteq \varphi_\beta^m$ и $b \models_\psi p_i \Leftrightarrow p_i \in \Phi_1(\varphi_\beta) \Leftrightarrow \varphi_\beta \models_V p_i$. Это означает, что $a^{R^\infty \leqslant}$ и $\varphi_j^{R\leqslant}$ изоморфны и как модели. Тогда из условия 5 Теоремы 3.1 $\forall \varphi_j \in \mathcal{M}(\varphi_j \models_V \varphi_j)$ следует $a \models_\psi \varphi_j$.

Если же a — иррефлексивный элемент, то изоморфными оказываются модели $a^{R^\infty <}$ и $\varphi_j^{R<}$. Поскольку $a \in \varphi_j^0 \subseteq \varphi_j^m$, то на a истинна при означивании ψ вся немодальная часть φ_j. В модели $\mathcal{M}$ φ_j накрывает некоторую антицепь ∇ и при этом согласно условию 7 б) $\Phi_2(\varphi_j) = \bigcup\limits_{\varphi \in \nabla} (\Phi_1(\varphi) \cup \Phi_2(\varphi))$.

Поскольку $\nabla \subseteq \varphi_j^{R<}$ и модели $\varphi_j^{R<}$ и $\varphi_j^{R^\infty<}$ изоморфны, то на a истинна и при ψ вся модальная часть φ_j. Окончательно $a \models_\psi \varphi_j$.

Предположим, что $\varphi_j = \varphi_s$ из условия 3 Теоремы 3.1. Тогда φ_s — невырожденный одноэлементный сгусток 1-го слоя.

Если $a \in \varphi_s^0$, то либо $a = \varphi_s$, либо $a \in S_1(\mathcal{M}^\infty) \setminus \bigcup\limits_{k\neq s} \varphi_k^0$. В первом случае, рассуждая аналогично предыдущему, получим $a \models_\psi \varphi_s$. Во втором случае для $\forall b \in a^{R^\infty\leqslant}$ и $b \in \varphi_s^0 \subseteq \varphi_s^m$ имеем $b \models_\psi p_i \Leftrightarrow p_i \in \Phi_1(\varphi_s)$ и $\Phi_1(\varphi_s) = \Phi_2(\varphi_s)$. По этому $b \models_\psi \varphi_s$.

Предположим, что $\varphi_j = \varphi_t$ из условия 3 Теоремы 3.1. Тогда φ_t — иррефлексивный элемент 1-го слоя. Если $a \in \varphi_t$, то либо $a = \varphi_t$, либо $a = b$ — некоторый иррефлексивный элемент 1-го слоя и $b \in \varphi_k^0, k \neq t$.

В первом случае $a = \varphi_t \in \varphi_t^0 \subseteq \varphi_t^m$ и по определению на a истинна вся немодальная часть φ_t. Поскольку $\Phi_2(\varphi_t) = \varnothing$, то $a \models_\psi \varphi_j$.

Во втором случае $b \in \varphi_t^0 \subseteq \varphi_t^m$ и, следовательно, на b истинна вся немодальная часть φ_t. Из иррефлексивности элемента b получаем, что
$b \models_\psi \varphi_t$.

Предположим теперь, что для всех $t \leq k$ свойство 3 доказано и $a \in \varphi_j^{k+1} \setminus \varphi_j^k$. Тогда $a \in \left[\varphi_{j_1}^k, \ldots, \varphi_{j_{k+1}}^k\right]$ и φ_j удовлетворяет условию 7 а) или 7 б) Теоремы 3.1, где ∇ — антицепь минимальных сгустков среди $\{\varphi_{j_1}, \ldots, \varphi_{j_{k+1}}\}$. Заметим, что $a \models_\psi p_i \Leftrightarrow p_i \in \Phi_1(\varphi_j)$,так как $a \in \varphi_j^k \subseteq \varphi_j^m$, то есть на a истинна немодальная часть φ_j.

Предположим, что $\varphi_i = \varphi_\nabla^*$ и по условию 7 а) Теоремы 3.1:

$$\Phi_2(\varphi_\nabla^*) = \Phi_1(\varphi_\nabla^*) \cup \bigcup_{\varphi\in\nabla} \Phi_2(\varphi) \qquad (*),$$

то есть $\Phi_1(\varphi_\nabla^*) \subseteq \Phi_2(\varphi_\nabla^*)$ и элемент $a = \varphi_\nabla^*$ — иррефлексивный. Тогда $a \models_\psi p_i \Rightarrow a \models_\psi \Diamond p_i$.

Возьмём $p_i \in \Phi_2(\varphi_\nabla^*) \setminus \Phi_1(\varphi_\nabla^*)$. Из $(*)$ следует, что $p_i \in \Phi_2(\varphi_{j_g})$ для некоторого $\varphi_{j_g} \in \nabla$.

Условие $a \in [\varphi_{j_1}^k, \ldots, \varphi_{j_{k+1}}^k]$ влечёт $a \in \bigcap\limits_{i=1}^{k+1} \Diamond\varphi_{j_1}^k$. Отсюда $a \in \Diamond\varphi_{j_g}^k$ и тогда существует $b:\ b \in \varphi_{j_g}^k$ и $(a,b) \in R^\infty$. По индуктивному предположению $b \models_\psi \varphi_{j_g}$ и $b \models_\psi \Diamond p_i$. Тогда $a \models_\psi \Diamond p_i$.

Покажем обратное: $a \models_\psi \Diamond p_i$ влечёт $p_i \in \Phi_2(\varphi_\nabla^*)$. Существует $c \in W^\infty$ такой, что $(a,c) \in R^\infty$ и $c \models_\psi p_i$. Поскольку $a \in \left[\varphi_{j_1}^k, \ldots, \varphi_{j_{k+1}}^k\right]$ и $a \notin \Diamond\varphi_l$,
$l \neq j_1, \ldots, j_{k+1}$, то методом от противного можно показать, что $c \notin \Diamond\varphi_l^k$.

Пусть $c \in \bigcup\limits_{\varphi\in X} \varphi^k$. Тогда для некоторого $\varphi_\gamma : c \in \varphi_\gamma^k$ и $a \in \Diamond\varphi_\gamma^k$.

Следовательно $\varphi_\gamma \in \left\{\varphi_{j_1}, \ldots, \varphi_{j_{k+1}}\right\}$. По индуктивному предположению

$C \models_\psi \varphi_\gamma$ и $p_i \in \Phi_2(\varphi_\gamma)$. Но $\varphi_\gamma \in \nabla$, следовательно $p_i \in \Phi_2(\varphi_\gamma) \subseteq \Phi_2(\varphi_j)$, что и требовалось.

Случай $\varphi_j = \varphi_\nabla$ рассматривается аналогичным образом. Свойство 3 доказано.

По свойству 2 для любого элемента $a \in \mathcal{M}^\infty$ найдётся φ_j такое, что $a \in \varphi_j^m$. По свойству 3 $a \models_\psi \varphi_j$. Тогда при означивании ψ истинна вся посылка правила r.

В модели $\mathcal{M}_X$ имеется φ_α такое, что $p_0 \in \Phi_2(\varphi_\alpha)$. Возьмём $a \in \varphi_\alpha^m$. По свойству 3 $a \models_\psi \varphi_\alpha$ и $a \models_\psi \Diamond p_0$. Тогда $a \not\models \neg\Diamond p_0$, то есть заключение правила r ложно. Следовательно правило r недопустимо в $K4 + bw_2$.

Теорема 3.2 доказана.

Из Теоремы 3.1 и Теоремы 3.2 непосредственно следует основная:

Теорема 3.3. *Правило вывода A/B допустимо в логике $K4 + bw_2$ тогда и только тогда, когда его редуцированная форма r не удовлетворяет условию Теоремы 3.2, то есть для любого X из модели $\mathcal{M}_X = \langle X, R, V \rangle$ невыполнимо хотя бы одно из условий (1)-(7).*

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе были получены следующие результаты:

1. Найден семантический критерий допустимости правил вывода в логике $K4 + bw_2$.
2. Построен алгоритмический критерий, распознающий допустимость правил в логике $K4 + bw_2$.

Проблема разрешимости по допустимости для логики $K4+bw_2$ решена положительно.

Полученные результаты имеют теоретическое значение и могут быть использованы в теории нестандартных логик.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Рыбаков В.В. Допустимые правила предтабличных модальных логик. // Алгебра и логика. — 1981. — Т. 20, № 4. — С. 404-464.

2. Рыбаков В.В. Разрешимость по допустимости в конечнослойных модальных логиках. // Алгебра и логика. — 1984. — Т. 23, №1. — С. 100-116.

3. Рыбаков В. В. Разрешимость проблемы допустимости в расширениях $S4.3$. / Тезисы докладов, VI–Всесоюзная конференция по математической логике. Тбилиси. — 1982. — С. 158.

4. Рыбаков В. В. Критерии допустимости правил в модальной системе $S4$ и интуиционистской логике. // Алгебра и логика. — 1984. — Т. 23, №5. — С. 546-572.

5. Rybakov V.V. Admissibility of logical inference rules. Amsterdam, New-York: Elsevier Publ. — 1997. — 617c.

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики
Кафедра алгебры и математической логики

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
_______ /В.М. Левчук
«16» ___06___ 2017 г.

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

Направление 01.03.01 Математика

АЛГОРИТМИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ ДОПУСТИМОСТИ ПРАВИЛ ВЫВОДА В МОДАЛЬНОЙ ЛОГИКЕ $K4 + bw_2$

Научный руководитель
кандидат физико-математических наук, _______/ В. Р. Кияткин
доцент
16.06.2017

Выпускник _______/ Г. М. Шумкина
16.06.2017.

Красноярск 2017