УДК 517.95+532

О ГРУППОВОЙ КЛАССИФИКАЦИИ ДВУМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ В ПЕРЕМЕННЫХ ТРАЕКТОРИИ-ПОТЕНЦИАЛ ВЕБЕРА

Козлова С.В.,
научный руководитель доктор физ.-мат. наук Андреев В.К.
Сибирский Федеральный Университет

1. Уравнения Эйлера в лагранжевых координатах

Уравнения идеальной несжимаемой жидкости - уравнения Эйлера

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} + \nabla_x p = \vec{g}(\vec{x},t), \tag{1}$$

$$div_x \vec{u} = 0. \tag{2}$$

В (1),(2) искомыми являются вектор скорости $\vec{u}(\vec{x},t)$ и давление $p(\vec{x},t)$, а $\vec{g}(\vec{x},t)$ - заданные внешние силы.

Зададим траекторию движения точки жидкости вектором $\vec{x}(\vec{\xi},t)$, где $\vec{\xi} = \vec{x}\,|_{t=0}$ - вектор, характеризующий координаты точки в начальный момент времени; $\vec{\xi} = (\xi,\eta,\zeta)$ Тогда в лагранжевых координатах система (1),(2) принимает вид

$$M^*(\vec{x}_{tt} - \vec{g}(\vec{x},t)) + \nabla_\xi p = 0, \tag{3}$$

$$|M| = 1, \tag{4}$$

где M – матрица Якоби отображения, а M*- транспонированная к M матрица; в (4) $|M| = detM$.

Во многих практически важных задачах внешние силы являются потенциальными, $\vec{g} = \nabla_x h.$ Это равенство в координатах Лагранжа переписывается в виде $\vec{g} = M^{*-1}\nabla_\xi h,$ уравнение импульса (3) интегрируется (Г.Вебер, 1868 г.)

$$M^*\vec{x}_t = \nabla_\xi \varphi + \vec{u}_0(\xi), \tag{5}$$

где $\varphi(\vec{\xi},t)$ - потенциал Вебера, а $\vec{u}_0(\vec{\xi})$ - начальное поле скоростей, причем $div_x \vec{u}_0(\vec{\xi}) = 0.$

Если функция $\varphi(\vec{\xi},t)$ известна, то давление восстанавливается из (3) в виде

$$p = 1/2|\vec{x}_t|^2 + h(\vec{x},t) - \varphi_t + \chi(t) \tag{6}$$

с произвольной функцией времени $\chi(t)$.

Нас будут интересовать двумерные течения, т.е. $\vec{u} = (u_1(\xi,\eta,t), u_2(\xi,\eta,t))$, $p = p(\xi,\eta,t)$ и $\vec{u}_0 \equiv (u(\xi,\eta), v(\xi,\eta))$, $u_\xi + v_\eta = 0$. В этом случае система (4),(5) упрощается и принимает вид

$$\begin{aligned} x_\xi &= \frac{1}{y_\eta} + \frac{x_\eta}{x_t}\left(\frac{\varphi_\eta + v}{y_\eta} - y_t\right), \\ y_\xi &= \frac{1}{x_t}(\varphi_\eta + v - y_t y_\eta), \\ \varphi_\xi &= \frac{1}{y_\eta}(x_t + x_\eta(\varphi_\eta + v)) - u. \end{aligned} \tag{7}$$

Производные по переменной ξ выделены для удобства применения техники группового анализа.

2. Групповые свойства уравнений плоского потенциального движения

В случае плоского потенциального движения в (7) следует положить $u = v = 0$ (достаточно произвести замену $\varphi \leftrightarrow \varphi + \varphi_0$, $u = \varphi_{0\xi}$, $v = \varphi_{0\eta}$):

$$\begin{aligned} x_\xi &= \frac{1}{y_\eta} + \frac{x_\eta}{x_t}\left(\frac{\varphi_\eta}{y_\eta} - y_t\right), \\ y_\xi &= \frac{1}{x_t}(\varphi_\eta - y_t y_\eta), \\ \varphi_\xi &= \frac{1}{y_\eta}(x_t + x_\eta \varphi_\eta). \end{aligned} \tag{8}$$

Инфинитезимальный оператор системы (8) ищем в виде

$$X = \xi^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha(x,u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha}$$

с неизвестными координатами $\xi^i, \eta^\alpha, i = 1,2,3, \alpha = 1,2,3$. Продолженный на первые производные оператор записывается так

$$\overset{1}{X} = \xi^1\frac{\partial}{\partial t} + \xi^2\frac{\partial}{\partial \xi} + \xi^3\frac{\partial}{\partial \eta} + \eta^1\frac{\partial}{\partial x} + \eta^2\frac{\partial}{\partial y} + \eta^3\frac{\partial}{\partial \varphi} + \zeta_1^1\frac{\partial}{\partial x_t} + \zeta_2^1\frac{\partial}{\partial x_\xi} +$$

$$\zeta_3^1\frac{\partial}{\partial x_\eta} + \zeta_1^2\frac{\partial}{\partial y_t} + \zeta_2^2\frac{\partial}{\partial y_\xi} + \zeta_3^2\frac{\partial}{\partial y_\eta} + \zeta_1^3\frac{\partial}{\partial \varphi_t} + \zeta_2^3\frac{\partial}{\partial \varphi_\xi} + \zeta_3^3\frac{\partial}{\partial \varphi_\eta}.$$

Подействовав оператором $\overset{1}{X}$ на систему уравнений (8) и проведя достаточно длинные выкладки, получим

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial x_i} = \frac{\partial \xi^i}{\partial u_i} = \frac{\partial \eta^i}{\partial x_i} = \frac{\partial \eta^i}{\partial u_i} = 0, \frac{\partial \eta^3}{\partial t} \neq 0.$$

Значит, все координаты оператора $\overset{1}{X}$ без ограничения общности можно считать равными единице. Следовательно, допускаемые системой (8) операторы таковы

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, X_2 = \frac{\partial}{\partial \xi}, X_3 = \frac{\partial}{\partial \eta}, X_4 = \frac{\partial}{\partial x}, X_5 = \frac{\partial}{\partial y}, X_\nu = \nu(t)\frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Им соответствуют конечные преобразования:

$$X_1 : t' = t + a_1, X_2 : \xi' = \xi + a_2, X_3 : \eta' = \eta + a_3, X_4 : x' = x + a_4, X_5 : y' = y + a_5, X_\nu : \varphi' = \varphi + \nu(t)a,$$

3. Специальные решения

В процессе вывода системы (7) (или (8)) мы производили деление на y_η и x_t, поэтому рассмотрим отдельно случаи обращения в ноль этих величин.

Случай $y_\eta = 0$ невозможен; если $x_t = 0$, то $x = \xi,\ y = \eta + \int_0^t \mu(\tau)d\tau,$ $\varphi = \mu(t)\eta, \mu(0) = 0$, $u(\xi,\eta) = 0$, $v(\xi,\eta) = f_t(\xi,0)$, где функция $f(\xi,t)$ должна удовлетворять соотношению $f(\xi,t) = f_t(\xi,0)t + \int_0^t \mu(\tau)d\tau,\ \mu(0) = 0.$ В частности, для потенциального течения $f_t(\xi,0)=0$ и $f(\xi,t)=\int_0^t \mu(\tau)d\tau$. В этом случае получим течение жидкости, параллельное оси y. Давление p восстанавливается по формуле (6) $p=1/2 f_t^2(\xi,t)+h(\xi,\eta+f(\xi,t))-\mu_t\eta+\chi(t)$.

4. Групповые свойства уравнений плоского вихревого движения

Вернемся к системе уравнений (7). В случае плоского вихревого движения начальное поле скоростей $u_\eta - v_\xi = \omega(\xi,\eta)\neq 0$, и система (7) запишется в виде:

$$\begin{aligned} x_t &= y_\eta(\varphi_\xi+u)-x_\eta(\phi_\eta+v),\\ y_t &= y_\xi(\varphi_\xi+u)-x_\xi(\phi_\eta+v),\\ x_\xi y_\eta &= 1+x_\eta y_\xi \end{aligned} \tag{10}$$

Подействуем на (10) уже имеющимся оператором

$$\overset{1}{X}=\xi^1\frac{\partial}{\partial t}+\xi^2\frac{\partial}{\partial \xi}+\xi^3\frac{\partial}{\partial \eta}+\eta^1\frac{\partial}{\partial x}+\eta^2\frac{\partial}{\partial y}+\eta^3\frac{\partial}{\partial \varphi}+\zeta_1^1\frac{\partial}{\partial x_t}+\zeta_2^1\frac{\partial}{\partial x_\xi}+$$

$$\zeta_3^1\frac{\partial}{\partial x_\eta}+\zeta_1^2\frac{\partial}{\partial y_t}+\zeta_2^2\frac{\partial}{\partial y_\xi}+\zeta_3^2\frac{\partial}{\partial y_\eta}+\zeta_1^3\frac{\partial}{\partial \varphi_t}+\zeta_2^3\frac{\partial}{\partial \varphi_\xi}+\zeta_3^3\frac{\partial}{\partial \varphi_\eta}.$$

Снова проведя достаточно длинные выкладки, получим $\xi^1=c_1$, $\xi^2=c_3$, $\xi^3=c_3$, $\eta^1=c_4$, $\eta^2=c_5$, $\eta^3=\eta^3(\xi,\eta,t)$, причем имеется классифицирующая система

$$\begin{aligned} \eta_\xi^3+c_2u_\xi+c_3u_\eta&=0,\\ \eta_\eta^3+c_2v_\xi+c_3v_\eta&=0, \end{aligned} \tag{11}$$

Ядро алгербы Ли операторов системы (10) имеет вид

$$L_0=\{\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},f(t)\frac{\partial}{\partial t}\}.$$

Далее, уравнение совместности для системы (11) дает равенство

$$c_2\omega_\xi+c_3\omega_\eta=0, \tag{12}$$

поэтому в данном случае функции $\bar{u}(\xi,\eta)=u(\xi,\eta)-z(\eta)$, $v(\xi,\eta)$ являются гармоническими: $\bar{u}_{\xi\xi}+\bar{u}_{\eta\eta}=0$, $v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta}=0$, а

$$z(\eta)=\int\omega(\eta)d\eta. \tag{13}$$

Подстановка $\omega(\eta)$ в (12) дает $c_3=0$, или $\omega=\omega_0=const$. Тогда ядро L_0 расширяется оператором

$$\frac{\partial}{\partial\xi}-(u(\xi,\eta)-z(\eta))\frac{\partial}{\partial\varphi} \tag{14}$$

с функцией $z(\eta)$ из (13). Так как c_2 и c_3 - произвольные, ядро L_0 расширяется двумя операторами:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}-(u(\xi,\eta)-\omega_0\eta)\frac{\partial}{\partial\varphi},\frac{\partial}{\partial\eta}-(v(\xi,\eta)+\omega_0\xi)\frac{\partial}{\partial\varphi}. \tag{15}$$

Для $\omega=\omega(\xi)$ L_0 расширяется оператором

$$\frac{\partial}{\partial\eta}-(v(\xi,\eta)+z(\xi))\frac{\partial}{\partial\varphi} \tag{16}$$

При $a\neq 0$, $b\neq 0$ имеем $\omega=\Omega(\gamma\xi-\eta),\gamma\neq 0$, и ядро L_0 расширяется оператором

$$\frac{\partial}{\partial\xi}+\gamma\frac{\partial}{\partial\eta}-[u(\xi,\eta)+\gamma v(\xi,\eta)-3z(\gamma\xi-\eta)]\frac{\partial}{\partial\varphi} \tag{17}$$

Функции $u(\xi,\eta), v(\xi,\eta)$ связаны уравнениями $u_\xi+v_\eta=0, u_\eta-v_\xi=\Omega(\gamma\xi-\eta)$. В частности, если $u=u(\lambda), v=v(\lambda)$, то $\gamma u'_\lambda-v'_\lambda=0$, $u'_\lambda+\gamma v'_\lambda=-\Omega(\lambda)$, поэтому

$$u=-\frac{1}{1+\gamma^2}z(\lambda), v=-\frac{\gamma}{1+\gamma^2}z(\lambda) \tag{18}$$

с функцией $z(\lambda)=\int^{\lambda}\Omega(\lambda)d\lambda$ При этом оператор (17) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial\xi}+\gamma\frac{\partial}{\partial\eta}-4z\lambda\frac{\partial}{\partial\varphi} \tag{19}$$

5. Конечные преобразования

Для восстановления группы непрерывных преобразований уравнений необходимо найти решение уравнений Ли с начальными условиями при $a=0$, именно

$$\bar{t}=t, \bar{\xi}=\xi, \bar{\eta}=\eta, \bar{x}=x, \bar{y}=y, \bar{\varphi}=\varphi. \tag{20}$$

В случае операторов ядра L_0 группа Ли такова

$$\bar{t}=t+a_1, \bar{x}=x+a_2, \bar{y}=y+a_3, \bar{\varphi}=\varphi+f(t)a_4,$$

причем в каждом из случаев остальные переменные преобразуются тождественно.

Для оператора (14) находим

$$\bar{t}=t, \bar{\xi}=\xi+a, \bar{\eta}=\eta, \bar{x}=x, \bar{y}=y,$$

$$\bar{\varphi}=\varphi(\xi,\eta,t)+z(\eta)a-\int_0^a u(\xi+a,\eta)da.$$

Аналогично, для первого оператора (15) найдем

$$\bar{\xi}=\xi+a, \bar{\varphi}=\varphi+\omega_0\eta a-\int_0^a u(\xi+a,\eta)da,$$

а для второго -

$$\bar{\eta}=\eta+a, \bar{\varphi}=\varphi-\omega_0\xi a-\int_0^a v(\xi,\eta+a)da, \tag{21}$$

Для оператора (16) имеем

$$\bar{\eta}=\eta+a, \bar{\varphi}=\varphi-z(\xi)a-\int_0^a v(\xi,\eta+a)da \tag{22}$$

и видно, что преобразования (22) есть частный случай преобразований (21).

Наконец, для оператора (19) имеем

$$\bar{\xi}=\xi+a, \bar{\eta}=\eta+\gamma a,\ \bar{\varphi}=\varphi+3z(\gamma\xi-\eta)a-\int_0^a[u(\xi+a,\eta+\gamma a)+\gamma v(\xi+a,\eta+\gamma a)]da.$$

Если u,v определяются из (18), то $\bar{\varphi}=\varphi+4z(\gamma\xi-\eta)a_6$, где учтено, что $\gamma\bar{\xi}-\bar{\eta}=\gamma\xi-\eta$ $(\bar{\lambda}=\lambda)$.