

## КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

К.В.Митин

*Сибирский федеральный университет*

Изучение процессов управления многими системами связано с моделированием потоков заряженных частиц, электрических и электромагнитных полей. Особенно большое практическое значение такие исследования имеют для оптимального управления электроприводами, электростатическими устройствами очистки газов, агрегатами для покраски крупных объектов, металлургическими процессами (в частности, электролизом алюминия и других металлов), что позволяет эффективно использовать энергию электрического тока.

Моделирование электрических и электромагнитных полей позволяет изучать электрические и магнитные потоки, что актуально как для разработки новых датчиков, так и для проектирования бездатчиковых систем регулирования электропривода. Кроме того моделирование электрических полей, возникающих в процессе электролиза между поверхностью катодом и анодом, помогает исследовать природу взаимодействия катода с анодом. Это позволяет оптимизировать управление процессом. Целью данной работы является моделирование движения заряженных частиц в электрическом поле электродов.

Частицы распределены равномерно на катоде. Вылетая с катода, заряженные частицы летят по параболической траектории. Для расчёта данной траектории в пространстве используются компоненты скорости и ускорения по координатам  $x$  и  $y$  (рис. 1), так как траектории движения заряженных частиц находятся в плоскостях, параллельных координатной плоскости  $xOy$ . При отсутствии столкновений заряженные частицы перемещаются равноускоренно под действием электрического потенциала. Однако реальная траектория движения является случайной, поскольку скорость и ускорение заряженной частицы в каждой точке ее траектории зависят от случайных столкновений с другой заряженной частицей или стенкой ёмкости, являющейся диэлектриком. Поэтому в каждой точке рассчитывается свой вектор ускорения, который затем используется для определения скорости в этой точке.

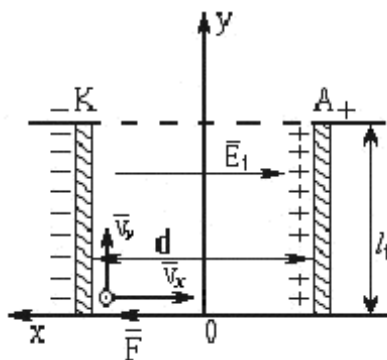


Рис. 1. Движение частицы:  $l_1$  – длина пластин электродов;  $d$  – расстояние между пластинами;  $\bar{v}_x, \bar{v}_y$  – проекции вектора скорости по осям  $X$  и  $Y$ ;  $K$  – катод;  $A$  – анод.

В основу математической модели движения заряженной частицы положены законы движения электрона под действием электрической силы. Для каждого участка траектории строятся отдельные уравнения движения, с помощью которых находятся координаты и скорость частицы в любой момент времени  $t$ . Поскольку вдоль оси  $z$  перемещений нет, мы будем рассматривать движение в плоскости  $xOy$ .

Пусть частица достигает второго электрода за время  $T$ , то есть  $t$  изменяется в промежутке от 0 до  $T$ . Тогда приближенная модель закона движения заряженной частицы представляет собой вектор-функцию  $\vec{S}(t) = (S_x(t), S_y(t))$ , где  $S_x(t)$  и  $S_y(t)$  – это квадратичные сплайны, построенные на сетке  $\omega$ :  $t_i = i\Delta t, i = 1, \dots, n, n = T / \Delta t$ . На каждом промежутке  $[t_i, t_{i+1}]$  вектор-функция  $\vec{S}(t)$  задается функциями  $S_x^i(t_i)$  и  $S_y^i(t_i)$ , которые являются решением задачи Коши с начальными данными:

$$S_x^i(t_i) = S_x^{i-1}(t_i), \quad (1)$$

и

$$E_x = E_{xi} \equiv E_x(S_x^{i-1}(t_i), S_y^{i-1}(t_i)), \quad (2)$$

$$E_y = E_{yi} \equiv E_y(S_x^{i-1}(t_i), S_y^{i-1}(t_i)). \quad (3)$$

Таким образом,

$$S_x^i(t) = \frac{qE_{xi}}{m} \frac{(t-t_i)^2}{2} + v_{xi}(t-t_i) + S_x^{i-1}(t), \quad (4)$$

$$S_y^i(t) = \frac{qE_{yi}}{m} \frac{(t-t_i)^2}{2} + v_{yi}(t-t_i) + S_y^{i-1}(t). \quad (5)$$

Если происходит столкновение двух частиц в момент  $t^* \in [t_i, t_{i+1}]$ , летящих со скоростями  $\vec{v}_1(t^*)$  и  $\vec{v}_2(t^*)$  (рис. 2), то траектория первой частицы меняется по следующему закону:

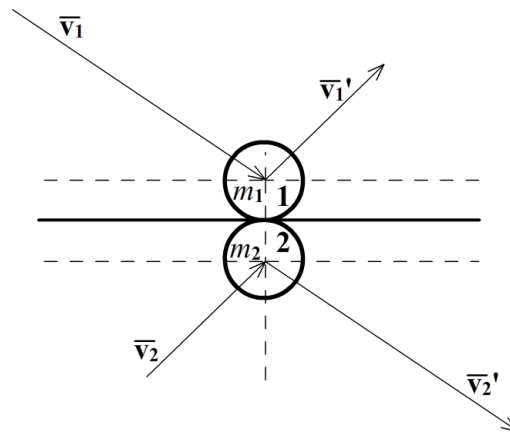


Рис. 2. Столкновение двух частиц:  $m_1, m_2$  – массы частиц;  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  – скорости движения частиц

до столкновения;  $v_1', v_2'$  – скорости движения частиц после столкновения.

$$S_{1x}(t) = \begin{cases} \frac{qE_x(t_i)}{m_1} \frac{(t-t_i)^2}{2} + v_{1x}^i(t-t_i) + x_1(t_i), & t_i \leq t < t^*, \\ \frac{qE_x(t_i)}{m_1} \frac{(t-t^*)^2}{2} + v_{1x}^i(t-t^*) + \frac{qE_x(t_i)}{m_1} \frac{(t-t_i)^2}{2} + \\ + v_{1x}^i(t-t_i) + x_1(t_i), & t^* \leq t < t_{i+1}; \end{cases} \quad (6)$$

$$S_{1y}(t) = \begin{cases} \frac{qE_y(t_i)(t-t_i)^2}{m_1} + v_{1y}^i(t-t_i) + y_1(t_i), & t_i \leq t < t^*, \\ \frac{qE_y(t_i)(t-t^*)^2}{m_1} + v_{1y}^i(t-t^*) + \frac{qE_y(t_i)(t-t_i)^2}{m_1} + \\ + v_{1y}^i(t-t_i) + y_1(t_i), & t^* \leq t < t_{i+1}. \end{cases} \quad (7)$$

Аналогичным образом изменяется траектория второй частицы:

$$S_{2x}(t) = \begin{cases} \frac{qE_x(t_i)(t-t_i)^2}{m_2} + v_{2x}^i(t-t_i) + x_2(t_i), & t_i \leq t < t^*, \\ \frac{qE_x(t_i)(t-t^*)^2}{m_2} + v_{2x}^i(t-t^*) + \frac{qE_x(t_i)(t-t_i)^2}{m_2} + \\ + v_{2x}^i(t-t_i) + x_2(t_i), & t^* \leq t < t_{i+1}; \end{cases} \quad (8)$$

$$S_{2y}(t) = \begin{cases} \frac{qE_y(t_i)(t-t_i)^2}{m_2} + v_{2y}^i(t-t_i) + y_2(t_i), & t_i \leq t < t^*, \\ \frac{qE_y(t_i)(t-t^*)^2}{m_2} + v_{2y}^i(t-t^*) + \frac{qE_y(t_i)(t-t_i)^2}{m_2} + \\ + v_{2y}^i(t-t_i) + y_2(t_i), & t^* \leq t < t_{i+1}. \end{cases} \quad (9)$$

При ударе частицы о стенку емкости угол падения частицы на стенку будет равен углу отражения от нее (рис. 3).

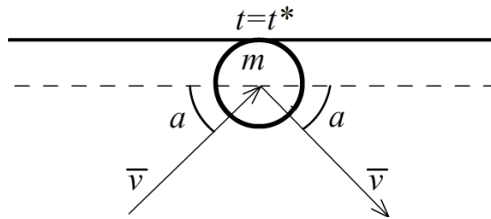


Рис. 3. Изменение направления движения частицы при ударе о стенку:  $m$  – масса частицы;  $\bar{v}$  – скорость движения частицы;  $a$  – угол падения частицы.

В этом случае траектория движения частицы моделируется следующим образом:

$$S_x(t) = \begin{cases} \frac{qE_x}{m} \frac{t^2}{2} + v_x t + x_0, & t < t^*, \\ \frac{qE_x}{m} \frac{(t-t^*)^2}{2} - v_x(t-t^*) + qE_x \frac{(t^*)^2}{2} + v_x t^* + x_0, & t^* \leq t < t_{i+1}; \end{cases} \quad (10)$$

$$S_y(t) = \begin{cases} \frac{qE_y}{m} \frac{t^2}{2} + v_y t + y_0, & t < t^*, \\ \frac{qE_y}{m} \frac{(t-t^*)^2}{2} + v_y(t-t^*) + qE_y \frac{(t^*)^2}{2} + v_y t^* + y_0, & t^* \leq t < t_{i+1}. \end{cases} \quad (11)$$

После удара частицы о вертикальную стенку меняется знак проекции  $v_y$  на противоположный, и траектория движения определяется по закону:

$$S_x(t) = \begin{cases} \frac{qE_x}{m} \frac{t^2}{2} + v_x t + x_0, & t < t^*, \\ \frac{qE_x}{m} \frac{(t-t^*)^2}{2} + v_x(t-t^*) + qE_x \frac{(t^*)^2}{2} + v_x t^* + x_0, & t^* \leq t < t_{i+1}; \end{cases} \quad (12)$$

$$S_y(t) = \begin{cases} \frac{qE_y}{m} \frac{t^2}{2} + v_y t + y_0, & t < t^*, \\ \frac{qE_y}{m} \frac{(t-t^*)^2}{2} - v_y(t-t^*) + qE_y \frac{(t^*)^2}{2} + v_y t^* + y_0, & t^* \leq t < t_{i+1}. \end{cases} \quad (13)$$

В любом из описанных случаев координата  $z$  остается постоянной, то есть  $z=z_0$ .

Релятивистские частицы одного и того же типа имеют одинаковую массу. Для релятивистских частиц масса не учитывается, и берется равной единице для всех частиц. Поэтому уравнения свободного движения на каждом промежутке  $[t_i, t_{i+1}]$  имеют вид:

$$S_x(t) = qE_x(t_i) \frac{(t-t_i)^2}{2} + v_x(t_i)(t-t_i) + x(t_i), \quad (14)$$

$$S_y(t) = qE_y(t_i) \frac{(t-t_i)^2}{2} + v_y(t_i)(t-t_i) + y(t_i). \quad (15)$$

В начальный момент времени заряженная частица находится в точке  $(0, y_0, z_0)$ .

В случае соударения частиц или удара частицы о стенку емкости траектории движения частиц формируются по законам (9)–(18) с  $m=1$ .

При параллельном расположении электродов  $v_{0x} = 0$ , первый участок сплайна будет рассчитываться следующим образом:

$$S_x^1(t) = \frac{qE_{x1}}{m} \frac{(t-t_1)^2}{2} + S_x^0(t), \quad (16)$$

$$S_y^1(t) = \frac{qE_{y1}}{m} \frac{(t-t_1)^2}{2} + v_{y1}(t-t_1) + S_y^0(t). \quad (17)$$

Область моделирования представляет собой пространство между катодом и анодом, окруженное стенками, являющимися диэлектриками, она имеет геометрическую форму параллелепипеда. Построение области моделирования начинается с задания фона, затем строятся стенки и сами катод и анод (для процессов газоочистки коронирующий и осадительный электроды). Построение области моделирования проходит с использованием векторной графики.

Начальное положение заряженной частицы моделируется случайным образом по равномерному закону распределения. Далее моделируются следующие координаты частицы  $(x_1, y_1, z_0)$  и среднюю скорость перемещения частицы в точку с этими координатами (4)–(13). Затем осуществляется проверка принадлежности смоделированных координат области моделирования. Случай, когда координаты не входят в область моделирования, означает либо приход частицы на анод, либо удар о стенку емкости.

Если не смоделирован приход частицы на анод, моделируется столкновение частицы со стенкой емкости. Если в данный момент времени координаты моделируемых частиц совпадают, моделируется столкновение частиц. Когда координаты частицы совпадают с координатами анода, частица стирается, происходит осаждение.

Для расчета потенциала была использована пятиточечная разностная схема, построенная на сетке с одинаковым шагом  $h$  по  $x$  и  $y$ . Для решения разностной задачи применялся метод простых итераций:

$$f^k(i, j) = \frac{(f^{k-1}(i-1, j) + f^{k-1}(i+1, j) + f^{k-1}(i, j-1) + f^{k-1}(i, j+1))}{4}, \quad k = 1, \quad (18)$$

2, ...,

где  $i$  – координата узла сетки по оси  $y$ , а  $j$  – по оси  $x$ . Компоненты вектора напряженности вычисляются, с помощью разностных производных:

$$\begin{cases} E_x(i, j) \approx \frac{f(i, j+1) - f(i, j)}{h}, \\ E_y(i, j) \approx \frac{f(i+1, j) - f(i, j)}{h}. \end{cases} \quad (19)$$

После этого значения массива  $f$  содержат значения потенциалов в каждой точке поля и используются как для построения полета заряженных частиц, так и для отрисовки потенциалов, определяя цвет и его глубину. Заряд на электродах распределен равномерно с единичной плотностью, потенциалы электродов моделируются в плоскости координат  $x$  и  $y$ , потому что эти потенциалы не зависят от ширины электродов  $z$ .

Эмулятор был разработан в интегрированной среде разработки приложений Delphi. Для построения графики используется библиотека для работы с 3D графикой OpenGL (Open Graphics Library).

При незначительной модернизации эмулятор можно использовать для моделирования электромагнитных полей.