УДК 517.55

Программа А.Пуанкаре как альтернатива программе Ф.Клейна (к 100-летию публикации программы)

Валерий К. Белошапка*

Механико-математический факультет,
Московский государственный университет,
ГЗ, Воробьевы горы, ГСП-1, Москва, 119991,
Россия

Получена 1.09.2007, принята 10.10.2007

В работе А.Пуанкаре 1907 года содержался новый, по сравнению с программой Ф.Клейна, подход к изучению бесконечномерных геометрий. Подход основан на вычленении канонического объекта и движении от объекта к группе, а не от группы к объекту, как у Ф.Клейна. Подход может быть рассмотрен как метод конечномерной редукции, конкурирующий с методом редукции G-структур.

Ключевые слова: *G-структура, псевдогруппа преобразований, группа и алгебра Ли, вещественное подмногообразие, модельная поверхность, пространство модулей.*

В 1872 году Ф.Клейн сформулировал концепцию *Геометрии*, которая получила широкое распространение и оказала большое влияние на дифференциальную геометрию XX века и другие математические дисциплины [1]. Вот краткая формулировка. Каждая специфическая геометрическая точка зрения на некое пространство (каждая геометрия этого пространства) определяется выбором своей специфической группы его преобразований. Преобразования этой группы привносят в пространство специфическое понимание *равенства* объектов, расположенных в этом пространстве. Геометрическими, с этой точки зрения, считаются величины, инвариантные относительно выбранной группы. Основными примерами являлись метрическая и проективная геометрии. Итак, схема такова:

$$\text{(пространство)} \to$$
$$\to \text{(группа преобразований)} \to \text{(объекты и их характеристики)}.$$

Позже Э.Картан оснастил эту концепцию адекватным техническим инструментарием — аппаратом G-структур (метод подвижного репера) [2].

Ровно 100 лет назад, в 1907 году, вышла работа А.Пуанкаре [3]. Она была посвящена изучению свойств вещественных 3-мерных гиперповерхностей двумерного комплексного пространства $\mathbf{C}^2$, инвариантных относительно локальных биголоморфных преобразований. Эта геометрия, изучаемая Пуанкаре, по крайней мере непосредственно, не укладывается в рамки схемы Клейна. Причина очевидна. Совокупность локально определенных голоморфных преобразований не является ни группой, ни тем более группой Ли. Это объект, который пришел из анализа и непосредственно, в геометрическом контексте, смотрится довольно дико. Это то, что Кобаяси и Номидзу [4] называют псевдогруппой преобразований.

Для дальнейшего обсуждения вещественных подмногообразий уточним обозначения и терминологию. Итак, M — гладкое вещественное подмногообразие комплексного пространства, ξ — его точка, M_ξ - росток M в точке ξ; $\operatorname{aut} M_\xi$ — алгебра Ли (возможно бесконечномерная), состоящая из ростков вещественных векторных полей, порождающих локальные голоморфные преобразования в окрестности ξ, сохраняющие росток M_ξ ; $\operatorname{Aut} M_\xi$ — совокупность голоморфных автоморфизмов M_ξ, порожденных полями из $\operatorname{aut} M_\xi$; $\operatorname{aut}_\xi M_\xi$ — подалгебра Ли алгебры $\operatorname{aut} M_\xi$, состоящая из ростков полей, равных нулю в ξ; $\operatorname{Aut}_\xi M_\xi$ — это те преобразования из $\operatorname{Aut} M_\xi$, которые сохраняют ξ неподвижной, т.е. порожденные полями из $\operatorname{aut}_\xi M_\xi$; $d(M_\xi) = \dim \operatorname{aut} M_\xi$ — как размерность вещественного линейного пространства.

*e-mail: vkb@strogino.ru

Возвращаясь к росткам 3-мерных гиперповерхностей $\mathbf{C}^2$, мы можем сформулировать альтернативу. Для любого ростка M_ξ вещественно аналитической гиперповерхности в $\mathbf{C}^2$ имеет место ровно одно из утверждений: либо $d(M_\xi) = \infty$ и тогда M_ξ голоморфно эквивалентен ростку вещественной гиперплоскости, либо $d(M_\xi) = 8$ и тогда M_ξ голоморфно эквивалентен ростку стандартной вещественной гиперсферы $S^3 = \{|z_1|^2+|z_2|^2 = 1\}$, либо $d(M_\xi) \leq 3$. Таким образом, сфера решает следующую экстремальную задачу:
В классе всех трехмерных аналитических ростков с конечномерными голоморфными симметриями найти самый симметричный росток.

Работа Пуанкаре состояла в следующем. Он обнаружил эту экстремальную гиперповерхность (сфера действительно самая круглая). Вычислил ее группу голоморфных симметрий — $\mathrm{Aut}\, S^3$. Этой группой оказалась некая 8-мерная подгруппа группы проективных преобразований пространства, обладающая, в частности, структурой группы Ли. А дальше произвольный росток он анализировал как малое возмущение сферы, описывая его многочисленные инварианты и его группу автоморфизмов. В этом смысле сфера у Пуанкаре служила модельной поверхностью по отношению ко всему классу аналитических ростков.

Вот схема подхода Пуанкаре:

$$\begin{gathered}(\text{пространство}) \to (\text{псевдогруппа}) \to \\ \to (\text{модельный объект}) \to (\text{группа симметрий модели}) \to \\ \to(\text{прочие объекты и их характеристики})\end{gathered}$$

Таким образом, ведущее звено в схеме Клейна — движение от группы к объекту, заменяется на обратный ход — движение от объекта (специального объекта, порожденного псевдогруппой) к группе (группе симметрий этого объекта). Это позволяет рассматривать программу Пуанкаре как двойственную в указанном смысле программе Клейна. Главное достижение — это конечномерная редукция: переход от псевдогруппы локальных голоморфных преобразований к группе Ли голоморфных симметрий модельного объекта.

За прошедшие 100 лет этот подход к изучению вещественных подмногообразий комплексного пространства значительно расширил область применимости и был развит (см. [5]). Для гладкого подмногообразия самым грубым классифицирующим параметром является пара (размерность, коразмерность). Для порождающего вещественного подмногообразия комплексного пространства таким параметром служит тип — (размерность комплексной касательной — n, коразмерность — K). Тип определяет размерность многообразия — $(2n + K)$ и размерность объемлющего комплексного пространства — $(n+K)$. Ситуация, рассмотренная в работе Пуанкаре, — это многообразия типа (1,1). В работе [6] было показано, что так же можно подходить к изучению вещественного многообразия произвольного типа $(n, K),\ n \geq 1,\ K \geq 1$. При этом каждому ростку M_ξ типа (n, K) (с некоторым условием общности положения — *полная невырожденность*) ставится в соответствие его касательная модельная поверхность $Q(M_\xi)$ — аналог сферы Пуанкаре, вещественно алгебраическая поверхность того же типа. В общем случае группа голоморфных симметрий модельной поверхности представляет собой группу Ли бирациональных преобразований пространства ограниченной степени. Почти всегда эта группа состоит из полиномиально-треугольных преобразований. Голоморфные автоморфизмы действуют на модельной поверхности транзитивно, стабилизатор точки в этой группе, т.е. $\mathrm{Aut}_\xi\, Q(M_\xi)$, и есть та структурная группа, которую можно теперь использовать для построения соответствующей геометрии по Клейну. Стабилизатор точки в псевдогруппе голоморфных автоморфизмов ростка $\mathrm{Aut}_\xi\, M_\xi$ оказывается канонически изоморфным подгруппе в стабилизаторе точки касательной модельной поверхности $\mathrm{Aut}_\xi\, Q(M_\xi)$.

Случай произвольного типа позволяет обнаружить ряд явлений, отсутствующих в ситуации $(1, 1)$ или присутствующих там рудиментарным образом. Опишем одно из них. Модельная поверхность типа (1,1) единственна, тогда как для произвольного типа это некая совокупность, обладающая структурой конечномерного вещественного линейного пространства многочленов специального вида. Действие псевдогруппы голоморфных замен на ростках порождает линейное действие на пространстве модельных поверхностей. Это связано с тем, что голоморфная эквивалентность двух ростков устанавливает линейную эквивалентность их касательных модельных поверхностей (эта эквивалентность осуществляется линейной частью отображения). Таким образом, вопрос о голоморфной классификации модельных поверхностей — это задача об описании пространства орбит действия некоторой подгруппы линейной группы на линейном пространстве. Эта задача представляет собой задачу классической теории инвариантов, она была в центре внимания математической общественности во времена Клейна и Пуанкаре. Теорема Гильберта о инвариантах [7] позволяет в этой ситуации корректно определить пространство модулей (фактор пространства модельных поверхностей по действию линейной группы, порожденной голоморфными заменами). Общие конструкции обсуждаются в [6] и [8]. А здесь мы ограничимся многообразиями типа (n,k), где $k \leq n^2$. В этой ситуации модельное многообразие — это пересечение k вещественных квадратичных гиперповерхностей пространства $\mathbf{C}^{n+k}$

$$\operatorname{Im} w_1 =< z,\bar z >_1, \dots, \operatorname{Im} w_k =< z,\bar z >_k$$

где $< z,\bar z >_1, \dots, < z,\bar z >_k$ — набор линейно независимых эрмитовых форм в $\mathbf{C}^n$ без общего ядра и пусть $(H_1,\dots,H_k)$ — их матрицы. Тогда линейное действие, индуцированное голоморфными заменами, — это действие $GL(n,\mathbf{C}) \oplus GL(k,\mathbf{R})$ вида

$$(C,\rho) \bullet (H_1,\dots,H_k) = (\rho)^{-1}(C^* H_1 C, \dots, C^* H_k C)$$

Если $k = 2$, то пространство модулей — $\mathcal{M}(n,2)$ находится в естественном соответствии с проективными классами вещественных гиперэллиптических кривых. Проективно неэквивалентные наборы из n различных точек $\mathbf{CP}^1$ — характеристических значений $(t_1 : t_2) \in \mathbf{CP}^1$, т.е. корней уравнения $\det(t_1 H_1 + t_2 H_2) = 0$, параметризуют $\mathcal{M}(n,2)$. $\mathcal{M}(2,2)$ и $\mathcal{M}(3,2)$ — это точки. В ситуации $(4,2)$ мы получаем набор из четырех характеристических значений. И если ν — это двойное отношение (для какой-либо нумерации), а

$$j = \frac{(\nu^2-\nu+1)^3}{\nu^2(\nu-1)^2}$$

— j-инвариант, то, выразив j через элементы H_1 и H_2, мы получим единственную образующую поля рациональных инвариантов и $\mathcal{M}(4,2)$ — это $\mathbf{RP}^1$, т.е. окружность.

Коль скоро пространство модулей модельных поверхностей устроено топологически нетривиально, мы можем использовать это для определения соответствующих *CR-характеристических классов* на многообразии типа $(4,2)$. Если M — вполне невырожденное многообразие типа $(4,2)$, ξ — его точка, M_ξ — росток M в точке ξ, $Q(M_\xi)$ — касательная модельная поверхность к M_ξ, то композиция отображений

$$\xi \in M \mapsto M_\xi \mapsto Q(M_\xi) \mapsto \text{точка многообразия } \mathcal{M}$$

канонически определяет "гауссово"отображение

$$\Gamma : M \mapsto \mathcal{M}(n,K).$$

Группа одномерных когомологий окружности $H^1(\mathcal{M}(1,4),\mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}$, и если ω — ее образующая, то форма Ω, индуцированная отображением Γ на M, представляет собой форму, инвариантную относительно голоморфных отображений, а соответствующий класс одномерных когомологий M инвариантен в классе гладких изотопий в объемлющем шестимерном комплексном пространстве. Геометрический смысл этого инварианта ясен: это степень определенного выше „гауссова“ отображения.

Как было отмечено, в XX веке подход Ф.Клейна в интерпретации Э.Картана был популярнее. Это нетрудно понять на фоне всеобщего стремления к бескоординатным методам и языкам. И, конечно, дифференциальная геометрия G-структур разрабатывала и применяла свою технику борьбы за конечномерность. Это идущая от Э.Картана и развитая в работах японских авторов (Н.Танака [9] и др.) техника редукции G-структур. Тогда подход Пуанкаре можно квалифицировать как ценную альтернативу этой техники. В связи с этим нельзя не упомянуть совместную работу двух известных математиков С.Черна и Ю.Мозера 1974 года [10], которые на примере многообразий типа $(n, 1)$ продемонстрировали оба подхода: Мозер использовал модельные поверхности, Черн — G-структуры. Однако вещественное подмногообразие произвольного типа с точки зрения геометрии G-структур является весьма неудобным объектом. Как известно, на сегодняшний день на языке G-структур отсутствуют достаточно универсальные подходы к их описанию.

В связи с этим альтернатива, предложенная Пуанкаре ровно 100 лет назад, продолжает оставаться конкурентноспособной, хотя и не столь популярной.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ 08-01-00735 и РФФИ 08-01-00743

Список литературы

[1] Ф.Клейн, Лекции о развитии математики в 19 столетии, М.-Л., 1937.

[2] E.Cartan, Œuvre completes, p.II, t.2, Paris, Gautier-Villars, 1953.

[3] H.Poincare, Les fonctions analytiques de deux variables et la représentation conforme, *Rend. Circ. Mat.*, Palermo (1907), 185-220.

[4] Ш.Кобаяси, К.Номидзу, Основы дифференциальной геометрии, М.: Наука, т.1, 1981.

[5] В.К.Белошапка, Вещественные подмногообразия комплексного пространства их полиномиальные модели, автоморфизмы и проблемы классификации, *Успехи мат. наук*, **57**(2002), №1, 3-44.

[6] В.К.Белошапка, Универсальная модель вещественного подмногообразия, *Матем. заметки*, **75**(2004), №4, 507.

[7] D.Hilbert, Ueber die Theorie der algebraischen Formen, *Math. Ann.*, **36**(1890), 473-534.

[8] V.K.Beloshapka, Moduli Space of Model Real Submanifolds, *Russian Journal of Mathematical Physics*, **13**(2006), №3, 245-252.

[9] N.Tanaka, On the pseudo-conformal geometry of hypersurfaces of the space of n complex variables, *J. Math. Soc. Japan*, **14**(1962), 397-429.

[10] S.S.Chern, J.K.Moser, Real hypersurfaces in complex manifold, *Acta Math.*, **133**(1974), №3-4, 219-271.

The Programm of Poincaré as Alternative to Klein's Programm (to Centenary of Publication)

Valery K.Beloshapka

In 1907, H. Poincaré suggested a new approach to infinite-dimensional geometry. In a sense, his approach is dual to the famous Klein's program. The first step of Poincaré's approach is to single out a canonical object and then to consider the symmetry group of the object, whereas the Klein's program is the passage from a prescribed structure group to objects. Now, a century later, Poincaré's methods can compete with É. Cartan's G-structure reduction. In the present paper, this competition is illustrated by some results in the geometry of real submanifolds of the complex space.

Key words: G-strucrure, pseudogroup of transformations, Lie group, Lie algebra, real submanifold, model surface, moduli space.