УДК 539.3

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ В ЭКРАНАХ ПАРОГЕНЕРАТОРОВ

Денисов М.П.
Научный руководитель– доцент Анферов П.И.

Сибирский федеральный университет

При водяной очистке поверхностей нагрева вследствии резкого изменения температурных полей возникают температурные напряжения, которые влияют на работоспособность конструкций.

Рассмотрим плоскую квазистатическую задачу теории термоупругости для полосы $0 \leq y \leq b$, которая первоначально находится при постоянной температуре, а затем на части ее верхней поверхности $y = b$ создается тепловое возмущение (внезапный нагрев или охлаждение), действующее в течение конечного времени. Нижняя и верхняя поверхности полосы предполагаются свободными от напряжений.

При расчетах динамические эффекты не учитываются. В этом случае напряжения зависят от времени неявно как от параметра через температуру. Теплофизические и механические свойства материала полосы полагаются не зависящими от температуры. Запишем основные соотношения, описывающие задачу.

Уравнения равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0. \tag{1}$$

Условие совместности деформаций в напряжениях

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \tag{2}$$

$$f = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \beta\theta, \qquad \beta = \frac{\alpha E}{1-\nu}. \tag{3}$$

Граничные условия для (1) таковы:

$$\sigma_{yy}(x,0) = \sigma_{xy}(x,0) \equiv 0, \qquad \sigma_{yy}(x,b) = \sigma_{xy}(x,b) \equiv 0. \tag{4}$$

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжений; E – модуль Юнга; ν – коэффициент Пуассона; α – коэффициент линейного расширения материала полосы; θ – температура.
Уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = \frac{\partial \theta}{\partial t}, \tag{5}$$

где a – коэффициент температуропроводности.
Начальное и граничные условия для (5):

$$\theta(x,\ y,\ 0)=0; \qquad \frac{\partial\theta(x,\ 0,\ t)}{\partial y}\equiv 0; \qquad \lambda\frac{\partial\theta(x,\ b,\ t)}{\partial y}=q(x)\cdot p(t). \tag{6}$$

Здесь $q(x),\ p(t)$ – заданные функции своих аргументов.

Представим интегралами Фурье в комплексной форме напряжения и температуру, например:

$$\sigma_{jk}(x,\ y,\ t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{\sigma}_{jk}(\omega,\ y,\ t)\exp(i\omega x)\mathrm{d}\omega, \tag{7}$$

$$\overline{\sigma}_{jk}(\omega,\ y,\ t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma_{jk}(x,\ y,\ t)\exp(-i\omega x)\mathrm{d}x, \tag{8}$$

Здесь чертой сверху помечены $\overline{\sigma}_{jk}(\omega,y,t)$ – преобразования Фурье компонент тензора напряжений и температуры соответственно. Исключим σ_{xx} из (1) с помощью (3) и, применив интегральное преобразование (7) ко всем членам уравнений (1-4), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для преобразований Фурье напряжений.

$$\omega\sigma_{yy}+i\sigma'_{xy}=\omega\left(\overline{f}-\beta\overline{\theta}\right), \qquad i\cdot\omega\cdot\overline{\sigma}_{yx}+\overline{\sigma}'_{yy}=0 \tag{9}$$

$$\overline{f}''-\omega^2\overline{f}=0, \tag{10}$$

с граничными условиями:

$$\overline{\sigma}_{yy}(\omega,\ 0)=\overline{\sigma}_{xy}(\omega,\ 0)=0, \qquad \overline{\sigma}_{yy}(\omega,\ b)=\overline{\sigma}_{xy}(\omega,\ b)=0. \tag{11}$$

Здесь и далее штрихи означают дифференцирование по y.

Введем новые неизвестные функции $\sigma_1,\ \sigma_2$ соотношениями:

$$\sigma_1=\overline{\sigma}_{yy}+i\overline{\sigma}_{xy}, \qquad \sigma_2=\overline{\sigma}_{yy}-i\overline{\sigma}_{xy}, \tag{12}$$

которые связаны с искомыми величинами равенствами:

$$\bar{\sigma}_{yy} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2), \qquad \bar{\sigma}_{xy} = \frac{1}{2i}(\sigma_1 - \sigma_2), \tag{13}$$

Комбинируя уравнение (9) с учетом (12), получим два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\sigma_1' + \omega\sigma_1 = \omega\left(\bar{f} - \beta\bar{\theta}\right), \qquad \sigma_2' - \omega\sigma_2 = -\omega\left(\bar{f} - \beta\bar{\theta}\right) \tag{14}$$

Функции σ_1 и σ_2 в соответствии с формулами (12) и (4) должны удовлетворять условиям:

$$\sigma_1(0) = 0, \quad \sigma_2(0) = 0, \quad \sigma_1(b) = 0, \quad \sigma_2(b) = 0. \tag{15}$$

Общее решение уравнения (10)

$$\bar{f}(\omega, y) = A\exp(-\omega y) + B\exp(\omega y) \tag{16}$$

подставим в уравнения (14), после интегрирования запишем:

$$\sigma_1 = Ay\omega\exp(-\omega y) + B\operatorname{sh}(\omega y) - R_1(y),$$

$$\sigma_2 = -A\operatorname{sh}(\omega y) - By\omega\exp(\omega y) + R_2(y). \tag{17}$$

$$R_1(y) = \beta\omega\exp(-\omega y)\int_0^y \bar{\theta}(y)\exp(\omega y)\,\mathrm{d}y, \; R_2(y) = \beta\omega\exp(\omega y)\int_0^y \bar{\theta}(y)\exp(-\omega y)\,\mathrm{d}y. \tag{18}$$

Функции σ_1, σ_2 будут удовлетворять условиям (15) если *A*, *B* в (17) вычисляются по формулам:

$$A = \left(R_1(b)\omega b\exp(\omega b) - R_2(b)\operatorname{sh}(\omega b)\right)\cdot[(\omega b)^2 - \operatorname{sh}^2\omega b]^{-1}, \tag{19}$$

$$B = \left(R_2(b)\omega b\exp(-\omega b) - R_1(b)\operatorname{sh}(\omega b)\right)\cdot[(\omega b)^2 - \operatorname{sh}^2\omega b]^{-1}, \tag{20}$$

Чтобы вычислить интегралы в (18) нужно знать зависимость $\bar{\theta}(\omega, y, t)$.
Для этого применим преобразования Фурье и Лапласа ко всем членам уравнения (5) и его граничным условиям (6). Получим краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\bar{\theta}^{*\prime\prime} - \left(p + \omega^2\right)\bar{\theta}^{*} = 0, \tag{21}$$

$$\left(\overline{\theta}^{*}(\omega,0,p)\right)'=0;\quad -\lambda\left(\overline{\theta}^{*}(\omega,b,p)\right)'=p^{-1}\overline{q}(\omega). \qquad \mathbf{(22)}$$

Ее решением является:

$$\overline{\theta}^{*}(\omega,y,p)=\overline{q}(\omega)\operatorname{ch}\left(y\sqrt{p+\omega^{2}}\right)\left(p\sqrt{p+\omega^{2}}\operatorname{sh}\left(\sqrt{p+\omega^{2}}\right)\right)^{-1}. \qquad (23)$$

$$\overline{\theta}^{*}(\omega,y,p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\theta(x,y,t)\exp(-i\omega x)\,dx\exp(-pt)dt. \qquad (24)$$

Где $\overline{\theta}^{*}$ - изображение по Лапласу преобразования Фурье температуры.

Используя теорему разложения для обращения преобразования Лапласа, найдем зависимость преобразования Фурье температуры от времени t и координаты y

$$\overline{\theta}(\omega,y,t)=\overline{q}(\omega)\left[\frac{\operatorname{ch}(\omega y)}{\omega\operatorname{sh}(\omega)}-\frac{\exp(-\omega^{2}t)}{\omega^{2}}-2\sum_{n=1}^{\infty}V_{n}(\omega,y)\exp\left(-\left(\pi^{2}n^{2}+\omega^{2}\right)t\right)\right], \qquad (25)$$

$$V_{n}(\omega,y)=(-1)^{n}\cos(\pi n\cdot y)\left(\pi^{2}n^{2}+\omega^{2}\right)^{-1}. \qquad (26)$$

Подставим (25) в (18) и после интегрирования для $R_1(y)$ и $R_2(y)$ запишем:

$$R_{1}(\omega,y,t)=\overline{q}(\omega)\left[\varphi_{n}(\omega,t)-2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\exp(-p_{n}t)\psi_{n}(\omega,t)\,p_{n}^{-2}\right], \qquad (27)$$

$$R_{2}(\omega,y,t)=\overline{q}(\omega)\left[\varphi_{n}(-\omega,t)-2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\exp(-p_{n}t)\psi_{n}(-\omega,t)\,p_{n}^{-2}\right], \qquad (28)$$

$$\varphi_{n}(\omega,t)=\left(\operatorname{sh}(\omega y)+\omega y\exp(-\omega y)\right)\left(2\omega^{2}\operatorname{sh}(\omega)\right)^{-1}+\exp\left(-\omega^{2}t\right)\left(\exp(-\omega y)-1\right)\omega^{-3}, \qquad (29)$$

$$\psi_{n}(\omega,t)=\omega\cos(\pi n\cdot y)+\pi n\cdot\sin(\pi n\cdot y)-\omega\exp(-\omega y),\quad p_{n}=\pi^{2}n^{2}+\omega^{2}. \qquad (30)$$

Подставляя (27), (28) в формулы (17) а затем в (13), вычислим $\overline{\sigma}_{jk}(\omega,y,t)$ при всех значениях ω. Обратное преобразование Фурье (18) для конкретных распределений q(x) теплового потока на поверхности полосы y = 1 целесообразно осуществлять численно.