УДК 519.145

ПОСТРОЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛУПОЛЕВЫХ ПЛОСКОСТЕЙ РАНГА 3 НАД ПОЛЕМ ПРОСТОГО ПОРЯДКА

Панов С.В.
Научный руководитель – доцент Кравцова О.В.

Сибирский федеральный университет

Проективной плоскостью π называется совокупность элементов двух типов: точки и прямые, с отношением инцидентности между ними, которое удовлетворяет следующим условиям:

1) любые две различные точки инцидентны с единственной прямой;
2) любые две различные прямые инцидентны с единственной точкой;
3) существуют четыре различные точки такие, что никакие три из них не инцидентны с одной прямой.

Изоморфизмом проективной плоскости π_1 на проективную плоскость π_2 называется взаимно однозначное отображение точек π_1 в точки π_2, прямых π_1 – в прямые π_2, сохраняющее отношение инцидентности. Изоморфизм плоскости на себя называется *автоморфизмом (коллинеацией).*

На любой проективной плоскости можно ввести координаты, используя элементы некоторого множества. Алгебраические свойства этого множества определяют геометрические свойства плоскости и строение полной группы автоморфизмов. Пусть координатизирующее множество является полуполем, тогда соответствующая плоскость называется полуполевой. Ее можно задать при помощи линейного пространства и множества невырожденных матриц, называемого регулярным множеством.

Целью данной работы является построение и исследование полуполевых плоскостей, которые задаются при помощи матриц размерности 3×3 над полем простого нечетного порядка. В этом случае все матрицы регулярного множества имеют вид:

$\theta(x,y,z) = xE + yB + zC$, где x,y,z – элементы поля $GF(p)$, E – единичная матрица,

$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & b_5 & b_6 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_4 & c_5 & c_6 \end{pmatrix}$; b_i, c_i – элементы $GF(p)$.

Рассматривая случай $p = 3$, я построил 2016 наборов матриц B и C, т.е. 2016 полуполевых плоскостей порядка 27 описанного вида.

Если регулярное множество $R = \{\theta(x, y, z)| \, x, y, z \in GF(p)\}$ является полем, то соответствующая плоскость – дезаргова, классическая. Доказан следующий результат.

Теорема 1. Пусть регулярное множество полуполевой плоскости имеет вид $R = \{\theta(x, y, z) = xE + yB + zC| \, x, y, z \in GF(p)\}$. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) R – поле,
2) $B^2 \in R, B^3 \in R$,
3) $C^2 \in R, C^3 \in R$.

Проверив эти условия, я выделил среди 2016 построенных полуполевых плоскостей 144 дезарговы. Для остальных плоскостей регулярное множество полем не является, правое, левое и среднее ядра этих плоскостей имеют порядок 3 и состоят только из скалярных матриц.

Правое, среднее и левое ядра полуполевой плоскости – это множества

$$R_r = \{\theta_r \in R | \forall \, \theta \in R \;\; \theta \cdot \theta_r \in R\},$$
$$R_m = \{\theta_m \in R | \forall \theta \in R \;\; \theta_m \cdot \theta \in R\},$$
$$R_l = \{M | \forall \theta \in R \; \theta \cdot M = M \cdot \theta\}$$

соответственно. Правое и среднее ядра являются подполями регулярного множества, левое ядро – подполе в кольце матриц.

В ходе исследования подтвердился следующий факт, что для дезарговых плоскостей справедливо равенство $R = R_l = R_m = R_r$.

Следующим этапом работы было разбиение множества всех плоскостей на классы изоморфных между собой. В общем случае изоморфизм полуполевых плоскостей задается полулинейным преобразованием векторного пространства:

$$x \to x^{\varphi} A,$$

где φ – автоморфизм поля $GF(p)$, A – квадратная матрица над $GF(p)$.

В нашем случае, т.к. поле простого порядка, $\varphi \equiv 1$, и изоморфизм задается линейным произведением, $x \to xA$. Доказан критерий изоморфности двух полуполевых плоскостей ранга 3 над полем простого порядка.

Теорема 2. Пусть π и π' – две полуполевые плоскости с регулярными множествами

$$R = \{\theta(x, y, z) = xE + yB + zC| \, x, y, z \in GF(p)\},$$
$$R' = \{\theta'(x, y, z) = xE + yB' + zC'| \, x, y, z \in GF(p)\}$$

соответственно. Эти плоскости изоморфны тогда и только тогда, когда существуют две невырожденные матрицы G и D такие, что выполняются следующие условия:

1) $GD \in R'$;
2) $GBD \in R'$;
3) $GCD \in R'$.

Расчеты показали, что 2016 построенных плоскостей образуют два класса плоскостей, попарно изоморфных: все 144 дезарговы плоскости изоморфны между собой,все 1872 недезарговы плоскости также изоморфны. Таким образом, доказан результат.

Теорема 3. Существует единственная недезаргова полуполевая плоскость порядка 27.

Далее, при использовании доработанной программы для поиска изоморфизмов, для каждой из плоскостей были найдены автоморфизмы, заданные блочно-диагональными матрицами вида $\begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$. Такие матрицы образуют группу автотопизмов плоскости (преобразований, фиксирующих треугольник). Для дезарговой плоскости порядок группы автотопизмов равен 2028, а для недезарговой – 156.

Следующий этап исследования построенных плоскостей – изучение строения группы автотопизмов и полной группы коллинеаций. Заметим, что описанная методика построения регулярного множества и линейных изоморфизмов может быть применена для полуполевых плоскостей произвольного порядка за счет перехода к векторному пространству большой размерности над полем простого порядка.