

## МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ В ЗАДАЧАХ РАСПРОСТРАНЕНИЯ РАДИОВОЛН НАД ПОВЕРХНОСТЬЮ ЗЕМЛИ

Сенченко А.А.

Научный руководитель - канд. техн. наук, доцент Саломатов Ю.П.

*Сибирский федеральный университет*

Вопросы распространения радиоволн вдоль поверхности земли рассматриваются в большом количестве научных работ. В основном они посвящены теоретическому исследованию данных вопросов, но практическое применение полученных в них результатов сопряжено с вычислительными трудностями. Главная проблема здесь заключается в большом объеме вычислений, который приходится проводить для вычисления поля хотя бы в одной точке. В связи с этим возникает необходимость разработки алгоритмов, способных проводить данные расчеты реальном масштабе времени.

Существует несколько основных методов расчета поля земной волны. Для трассы с произвольным распределением электрофизических параметров (диэлектрическая проницаемость и проводимость) можно использовать интегральное уравнение Хаффорда [1], либо Фейнберга [2, 3]. Если трассу можно разбить на конечное число электрически однородных участков, то можно воспользоваться решением интегрального уравнения Фейнберга для многокусочных трасс [3], либо другими методами, разработанными для многокусочных трасс.

Каждый из перечисленных выше методов содержит однотипный интеграл, который в общем виде может быть представлен, как:

$$I(D, x) = \int_0^x \frac{f(y, D-y)}{\sqrt{y(D-y)}} dy, \quad x \leq D, \quad (1)$$

где  $f(y, D-y)$  – функция, зависящая от метода расчета.

Этот интеграл имеет как минимум одну особую точку в начале интервала интегрирования. Так же, когда  $x = D$ , возникает вторая особая точка на конце участка интегрирования. Для вычисления данного интеграла можно воспользоваться различными численными методами [4]. При необходимости, для исключения особенности в начале участка интегрирования, можно воспользоваться заменой переменной  $y = t^2$  (если, так же, имеется особенность на конце интервала интегрирования, то интеграл можно разбить на 2 части и во второй сделать замену  $y = D - t^2$ ).

Рассмотрим случай, когда интеграл имеет только одну особенность в начале участка интегрирования. В этом случае, интеграл (1) можно представить одним из следующих способов, удобных для численного интегрирования:

$$I(D, x) = 2 \int_0^{\sqrt{h}} \frac{f(t^2, D-t^2)}{\sqrt{D-t^2}} dt + \int_h^x \frac{f(y, D-y)}{\sqrt{y(D-y)}} dy, \quad (2.a)$$

$$I(D, x) = 2 \int_0^{\sqrt{x}} \frac{f(t^2, D-t^2)}{\sqrt{D-t^2}} dt, \quad (2.б)$$

где  $h$  – длина первого участка, на котором интегрирование проводится с заменой переменной  $y = t^2$ . Обычно величину  $h$  принимают равной длине шага интегрирования. Для любого из представленных интегралов можно применить одну из квадратурных формул, например формулу трапеций или Симпсона.

Так же, для вычисления интеграла (1) можно попробовать воспользоваться квадратурной формулой Эрмита [4]:

$$\int_{-1}^1 \frac{f_H(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \approx \frac{\pi}{N} \sum_{i=1}^N f_H(x_i), \quad x_i = \cos\left(\frac{2i-1}{2N} \pi\right), \quad (3)$$

где  $N$  – число узлов интегрирования. Интеграл (1) можно привести к (3), домножив и поделив на  $\sqrt{x-y}$ , а так же сделав замену переменной  $y = \frac{1}{2}x(1+t)$ . Тогда  $f_H(y)$  будет (без замены переменной):

$$f_H(t) = f(y, D-y) \sqrt{\frac{x-y}{D-y}}. \quad (4)$$

Так же, вычисление интеграла (1) можно провести еще одним способом. Для этого разделим участок интегрирования  $y \in [0; x]$  на  $N$  отрезков длиной  $h = x/N$  с координатами  $x_i = h \cdot i, i = 0, 1, \dots, N$ . На каждом из отрезков функцию  $f_1(y) = f(y, D-y)$  аппроксимируем прямыми  $a_i x + b_i$ . Тогда интеграл (1) можно представить в виде суммы:

$$I(D, x) = \int_0^x \frac{f(y, D-y)}{\sqrt{y(D-y)}} dy \approx \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{a_i y + b_i}{\sqrt{y(D-y)}} dy \quad (5)$$

Интеграл (5) под знаком суммы может быть вычислен аналитически и будет равен:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{a_i y + b_i}{\sqrt{y(D-y)}} dy = \left( a_i + \frac{b_i}{D} \right) [F_1(x_i, D) - F_1(x_{i-1}, D)] + \frac{b_i}{D} [F_2(x_i, D) - F_2(x_{i-1}, D)], \quad (6)$$

$$F_1(x, D) = -D \cdot \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{D-x}{x}} \right) - \sqrt{x(D-x)} \quad (7)$$

$$F_2(x, D) = D \cdot \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{x}{D-x}} \right) + \sqrt{x(D-x)} \quad (8)$$

Для оценки эффективности численных методов, проведем расчеты функции ослабления на втором участке для двухкусовой трассы с параметрами первого участка  $\varepsilon_1 = 4, \sigma_1 = 10^{-3}$  (суша) и второго  $\varepsilon_1 = 80, \sigma_1 = 4$  (море) для частоты  $f = 2$  МГц. Функцию ослабления вычисляли по формуле Фейнберга для второго участка трассы [3]. Вычисление интегралов будем проводить с использованием формулы трапеций, Симпсона, квадратурной формулы Эрмита и формулы (5). Результаты численных расчетов сведены в таблицу 1.

Таблица 1 – Сравнение методов численного интегрирования

Метод численного	Интеграл	Число узлов
------------------	----------	-------------

интегрирования		$x_1 = 10$ км, $D = 12,31$ км	$x_1 = 100$ км, $D = 123,1$ км
1	2	3	4
Метод трапеций	(2.а)	129	2898
Метод трапеций	(2.б)	14	97
Метод Симпсона	(2.а)	10	208
Метод Симпсона	(2.б)	6	30
Формула Эрмита	(3)	18	121
Формула (5)	(1)	389	19830
Формула (5)	(2.а)	177	5492

В таблице в третьем и четвертом столбцах приведено минимальное число узлов интегрирования, необходимое для вычисления функции ослабления, при условии, что ошибка по фазе, в пересчёте на метры, составит не более 5 м. В таблице обозначено:  $x_1$  – длина первого участка,  $D$  – длина всей трассы. Во втором столбце указано, какой вид интеграла использовался для численного интегрирования.

Из таблицы можно сделать вывод, что наилучшие результаты дает формула Симпсона, при вычислении интеграла (2.б). Интересно отметить, что квадратурная формула Эрмита дает более худшие результаты, чем формула Симпсона. Видимо это возникает из-за недостаточной гладкости функции  $f_H(t)$ , поскольку наилучшие по точности результаты она дает при  $f_H(t) = \text{const}$ .

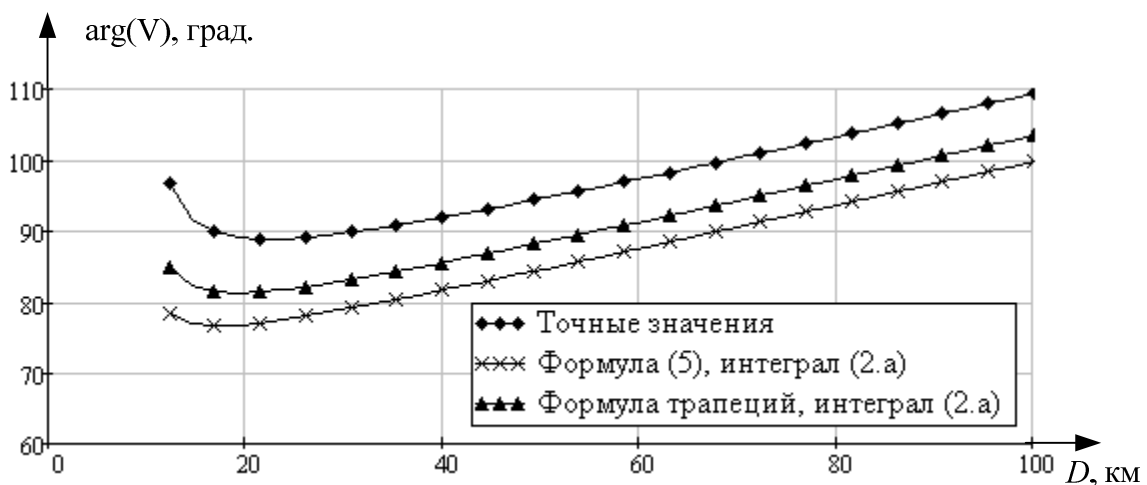


Рисунок 1 – Сравнение результатов расчета фазы функции ослабления при 129 узлах

При интегрировании по формуле (5) ожидалось увидеть меньшее число необходимых узлов интегрирования, чем для формулы трапеций, при одинаковой точности. Однако, как показывают расчеты, при одинаковом числе точек интегрирования, формула трапеций даёт более точные результаты (рисунок 1). Однако, при сравнении модулей функции ослабления, при одинаковом числе точек, формула (5) дает более точные результаты (рисунок 2).

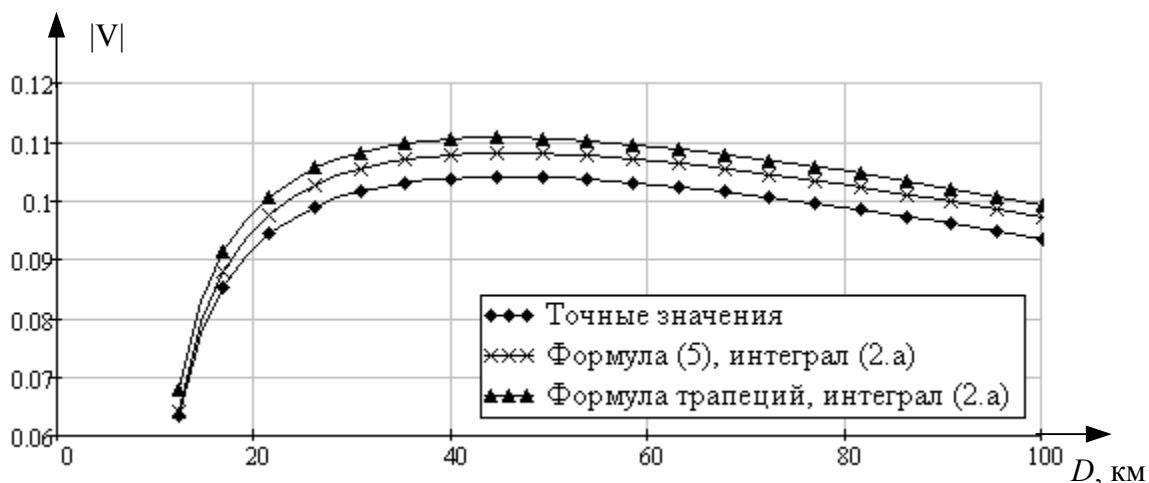


Рисунок 2 – Сравнение результатов расчета модуля функции ослабления при 129 узлах

Использование формулы Симпсона, хоть и дает наилучшие результаты, но накладывает ограничение на число узлов, которое должно быть не четным. Например, это ограничение не позволяет использовать только формулу Симпсона для численного решения интегральных уравнений. Вместо этого, её придется комбинировать с какой-либо иной формулой, которая позволяет вычислять интеграл по четному числу точек.

Таким образом, из проведенного сравнения можно сделать вывод, что наиболее универсальной является формула трапеций, особенно при вычислении интеграла (2.б). Если при вычислениях функции ослабления требуется знать более точно модуль функции ослабления, то можно использовать формулу (5). Некоторый выигрыш по числу узлов интегрирования в формуле (5), по-видимому, можно получить, если преобразовать её для интеграла (2.б). При нечетном числе узлов интегрирования следует использовать формулу Симпсона, поскольку она показывает наилучшие результаты. По возможности, для вычисления интеграла (1), следует использовать его форму (2.б), которая позволяет дополнительно уменьшить число необходимых точек интегрирования. Применение этой формулы эквивалентно уменьшению шага в начале интервала интегрирования, где функция  $f(y, D - y)$  меняется быстрее, и увеличению шага по мере приближения к концу интервала.

#### Список литературы

1. Hufford G.A. An Integral equation approach to the problem of wave propagation over on irregular surface. – Quart. Appl. Math., 1952, vol.9, p. 391-404.
2. Дембелов М. Г. Башкуев Ю. Б. Метод численного решения обобщенного интегрального уравнения Фейнберга для геометрически и электрически неоднородных трасс. - Физика волновых процессов и радиотехнические системы. Т. 11, №1, 2008 г. – 89-94 с.
3. Фейнберг, Е. Л. Распространение радиоволн вдоль Земной поверхности / Е. Л. Фейнберг – М.: Наука, 1999. – 496 с.
4. Вержбицкий В. М. Основы численных методов: Учебник для вузов. – М.: Высш. шк., 2002. – 840 с.