ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 2 2016

УДК 512.54

О ЛОКАЛЬНО КОНЕЧНОМ РАДИКАЛЕ ГРУППЫ ОГРАНИЧЕННЫХ ПОДСТАНОВОК[1]

Н. М. Сучков, Н. Г. Сучкова

Аннотация. В статье дано описание локально конечного радикала R группы $G = \mathrm{Lim}(N)$ ограниченных подстановок множества натуральных чисел N. Найдена связь между вполне рассеянными подмножествами множества N и элементами из R.

Ключевые слова: группа, ограниченная подстановка, вполне рассеяное множество, локально конечный радикал.

N.M. Suchkov, N.G. Suchkova. On the locally finite radical of limited permutation group.

In this paper we describe the locally finite radical R of limited permutation group $G = \mathrm{Lim}(N)$ of set natural numbers N. The connection between a complite dispersion subsets of N and elements of R is investigated.

Keywords: group, limited permutation, complite dispersion set, locally finite radical.

MSC: 20B07

DOI:

1. Введение

Пусть N — множество всех натуральных чисел, Z — множество всех целых чисел, M — любое из этих множеств. Через $S(M)$ будем обозначать группу всех подстановок множества M.

О п р е д е л е н и е 1. Подстановка $g \in S(M)$ называется ограниченной, если

$$\omega(g) = \max_{\alpha \in M} |\alpha - \alpha^g| < \infty.$$

Из ограниченности подстановок g, h следует, что таковыми являются и подстановки g^{-1} и gh, так как $\omega(g^{-1}) = \omega(g), \omega(gh) \leq \omega(g) + \omega(h)$. Поэтому множество

$$\mathrm{Lim}(M) = \{x | x \in S(M), \omega(x) < \infty\}$$

образует группу, которая является естественным расширением локально конечной группы $\mathrm{Fin}(M)$ всех финитарных подстановок множества M, т.е. таких подстановок $y \in S(M)$, для которых множество $\{\alpha | \alpha \in M, \alpha^y \neq \alpha\}$ конечно.

В работе [1] одного из авторов впервые был построен пример смешанной группы $H = AB$, где A, B — периодические (и даже локально конечные) подгруппы. Затем в [2, 3] установлено, что

$$H = \langle h | h \in \mathrm{Lim}(Z), |h| < \infty \rangle ,$$

любая счетная свободная группа и 2-группа Алешина изоморфно вложимы в H. При этом

$$\mathrm{Lim}(Z) = H \leftthreetimes \langle d \rangle,$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 15-01-04897 А)

где d — сдвиг, $\alpha^d = \alpha + 1$ для любого $\alpha \in Z$.

Факторизация всей смешанной группы $G = \mathrm{Lim}(N)$ двумя локально конечными подгруппами доказана авторами в статье [4]. Там же показано, что группа $\mathrm{Lim}(M)$ порождается подстановками $x \in S(M)$, для которых параметр рассеивания $\omega(x) = 1$. Эти порождающие являются либо инволюциями, в разложении которых на независимые транспозиции участвуют только транспозиции вида $(\alpha\ \alpha{+}1), \alpha \in M$, либо $M = Z$ и $x \in \{d, d^{-1}\}$. Связь между группами G и H найдена в [5]. Предполагая, что подстановки группы $S(N)$ действуют тождественно на множестве $Z \setminus N$, мы получим естественное вложение $S(N) < S(Z)$. Обозначим через t инволюцию группы $S(Z)$, для которой $\alpha^t = -\alpha$ $(\alpha \in Z)$. Доказано,что

$$H = \mathrm{Fin}(Z)(G \times G^t).$$

Из этого равенста и указанной выше связи между группами H и $\mathrm{Lim}(Z)$ следует, что при изучении нормального строения группы $\mathrm{Lim}(Z)$ определяющим является описание нормальных подгрупп группы $G = \mathrm{Lim}(N)$.

Первый результат в этом направлении получен в [5]. Чтобы его сформулировать необходимо привести некоторые введенные в этой работе понятия.

Пусть

$$L = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots\} \text{ —}$$

подмножество множества N, где $\mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_n < \ldots$; m — фиксированное натуральное число. Будем говорить, что элементы μ_i и μ_j эквивалентны, если либо $i = j$, либо при $i < j$ $(j < i)$ выполняются все неравенства $\mu_{k+1} - \mu_k \le m$; $i \le k \le j - 1$ $(j \le k \le i - 1)$. Нетрудно понять, что данное отношение действительно является отношением эквивалентности, а значит, оно индуцирует разбиение множества L на классы эквивалентности. Это разбиение будем называть m-разбиением. Пусть $B_m(L)$ — множество всех классов эквивалентности элементов множества L.

О п р е д е л е н и е 2. Множество L называется m-рассеянным, если все классы множества $B_m(L)$ конечны и вполне m-рассеянным, если

$$c_m = \max_{A \in B_m(L)} |A| < \infty.$$

Множество L называется (вполне) рассеянным, если оно (вполне) m-рассеянное при любом натуральном m.

Из данного определения, очевидно, следует, что каждое конечное подмножество множества N является вполне рассеянным.

Примером вполне рассеянного множества служит множество L, для элементов которого выполняются неравенства

$$\mu_2 - \mu_1 < \mu_3 - \mu_2 < \ldots < \mu_{n+1} - \mu_n < \ldots.$$

Приведем теперь результат работы [5]. Пусть для элементов множества L выполняются неравенства $\mu_n + 1 < \mu_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и

$$a = (\mu_1\ \mu_1 + 1)(\mu_2\ \mu_2 + 1) \ldots (\mu_n\ \mu_n + 1) \ldots \text{ —}$$

разложение инволюции a группы G $(\omega(a) = 1)$ на независимые транспозиции. Доказано, что нормальное замыкание инволюции a в группе G тогда и только тогда локально конечно, когда L — вполне рассеянное множество. В этой же работе сформулированы три гипотезы, доказательства которых по мнению авторов будет существенным продвижением в изучении нормальных подгрупп группы G.

Основным результатом настоящей работы является доказательство одной из этих гипотез. А именно, будет доказана следующая

Теорема 1. *Пусть R — локально конечный радикал группы G. Подстановка g группы G тогда и только тогда содержится в R, когда $L_g = \{\alpha | \alpha \in N, \alpha^g \neq \alpha\}$ — вполне рассеянное множество. Если множество L_g не вполне рассеянное, то нормальное замыкание g в группе G содержит элемент бесконечного порядка.*

Все обозначения, используемые в данной статье либо оговариваются, либо стандартные [6].

2. Вспомогательные результаты

При вычислениях мы будем использовать известное и легко проверяемое

Предложение 1. *Пусть g, h — подстановки некоторого множества. Если*

$$g = \ldots(\ldots \alpha_1\ \alpha_2 \ldots)\ldots\ —$$

разложение подстановки g на независимые циклы, то

$$g^h = h^{-1}gh = \ldots(\ldots \alpha_1^h\ \alpha_2^h \ldots)\ldots.$$

Лемма 1. *Пусть*

$$b = (\alpha_1\ \beta_1)(\alpha_2\ \beta_2)\ldots(\alpha_k\ \beta_k)\ —$$

разложение подстановки b на независимые транспозиции,

$$h = (\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_k\ \beta_k\ \beta_{k-1} \ldots \beta_1)\ —$$

цикл. Тогда подстановка bb^h разлогается в произведение двух независимых циклов длины k, в частности, её порядок равен k.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применяя предложение 1, получим

$$b^h = (\alpha_2\ \alpha_1)(\alpha_3\ \beta_1)(\alpha_4\ \beta_2)\ldots(\alpha_k\ \beta_{k-2})(\beta_k\ \beta_{k-1}).$$

Если k — четное число, то простые вычисления показывают, что

$$bb^h = (\alpha_1\ \alpha_3\ \alpha_5 \ldots \alpha_{k-1}\ \beta_k\ \beta_{k-2} \ldots \beta_2)(\alpha_2\ \alpha_4\ \alpha_6 \ldots \alpha_k\ \beta_{k-1}\ \beta_{k-3} \ldots \beta_1).$$

При нечетном k имеем

$$bb^h = (\alpha_1\ \alpha_3\ \alpha_5 \ldots \alpha_k\ \beta_{k-1}\ \beta_{k-3} \ldots \beta_2)(\alpha_2\ \alpha_4\ \alpha_6 \ldots \alpha_{k-1}\ \beta_k\ \beta_{k-2} \ldots \beta_1).$$

Итак, в любом случае подстановка bb^h представима в виде произведения двух независимых циклов длины k. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть в разложении подстановки h группы $G = Lim(N)$ на независимые циклы присутствуют тройные циклы*

$$h_{11}, h_{12}, h_{21}, h_{22}, h_{23}, h_{24}, \ldots, h_{n1}, h_{n2}, \ldots, h_{n2n}.$$

Предположим, что найдется такое натуральное число c, что

$$|\mu_{nj} - \mu_{nj+1}| < c$$

для любых элементов μ_{nj} цикла h_{nj} и μ_{nj+1} цикла h_{nj+1}; $n \in N$, $1 \leq j \leq 2n-1$. Тогда подгруппа $H = \langle h^g | g \in G\rangle$ содержит элемент бесконечного порядка.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $h_{nj} = (\alpha_{nj}\ \beta_{nj}\ \gamma_{nj})$, $n \in N$, $1 \leq j \leq 2n$. Обозначим

$$u = (\alpha_{11}\ \beta_{11})(\alpha_{21}\ \beta_{21})(\alpha_{23}\ \beta_{23})\dots(\alpha_{n1}\ \beta_{n1})(\alpha_{n3}\ \beta_{n3})\dots(\alpha_{n\ 2n-1}\ \beta_{n\ 2n-1})\dots.$$

Ясно, что $\omega(u) \leq \omega(h)$, а потому $u \in G$. Следовательно, коммутатор

$$h_1 = [h, u] = h^{-1}h^u = (\alpha_{11}\ \beta_{11}\ \gamma_{11})(\alpha_{21}\ \beta_{21}\ \gamma_{21})(\alpha_{23}\ \beta_{23}\ \gamma_{23})\dots$$
$$(\alpha_{n1}\ \beta_{n1}\ \gamma_{n1})(\alpha_{n3}\ \beta_{n3}\ \gamma_{n3})\dots(\alpha_{n\ 2n-1}\ \beta_{n\ 2n-1}\ \gamma_{n\ 2n-1})\dots$$

содержится в подгруппе H. Далее, если

$$v = (\beta_{11}\alpha_{12})(\beta_{21}\alpha_{22})(\beta_{23}\alpha_{24})\dots(\beta_{n1}\alpha_{n2})(\beta_{n3}\alpha_{n4})\dots(\beta_{n\ 2n-1}\alpha_{n2n})\dots,$$

то по условию леммы $\omega(v) < c$ и $v \in G$. После несложных вычислений получим, что H содержит иволюцию

$$h_2 = h_1h_1^v = (\alpha_{11}\ \beta_{11})(\gamma_{11}\ \alpha_{12})(\alpha_{21}\ \beta_{21})(\gamma_{21}\ \alpha_{22})(\alpha_{23}\ \beta_{23})(\gamma_{23}\ \alpha_{24})\dots(\alpha_{n1}\ \beta_{n1})(\gamma_{n1}\ \alpha_{n2})$$
$$(\alpha_{n3}\ \beta_{n3})(\gamma_{n3}\ \alpha_{n4})\dots(\alpha_{n\ 2n-1}\ \beta_{n\ 2n-1})(\gamma_{n\ 2n-1}\ \alpha_{n2n})\dots.$$

Пусть теперь

$$t = (\alpha_{11}\ \gamma_{11}\ \alpha_{12}\ \beta_{11})(\alpha_{21}\ \gamma_{21}\ \alpha_{23}\ \gamma_{23}\ \alpha_{24}\ \beta_{23}\ \alpha_{22}\ \beta_{21})\dots(\alpha_{n1}\ \gamma_{n1}\ \alpha_{n3}\ \gamma_{n3}\dots$$
$$\alpha_{n\ 2n-1}\ \gamma_{n\ 2n-1}\ \alpha_{n2n}\ \beta_{n\ 2n-1}\dots\alpha_{n4}\ \beta_{n3}\ \alpha_{n2}\ \beta_{n1})\dots.$$

Снова в силу условия леммы $t \in G$. Остается заметить, что согласно лемме 1 длины независимых циклов из разложения подстановки $h_2h_2^t$ подгруппы H неограничены, а значит, $|h_2h_2^t| = \infty$. Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы

Предположим, что множество $L_g = \{\alpha | \alpha \in N, \alpha^g \neq \alpha\}$ вполне рассеянное для некоторой подстановки $g \in G$. Если оно конечно, то g — финитарная подстановка, т.е. g содержится в локально конечной нормальной в группе G подгруппе $\mathrm{Fin}(N)$. Очевидно, что $\mathrm{Fin}(N)$ является подгруппой локально конечного радикала R группы G, а значит, $g \in R$. Пусть теперь множество L_g бесконечно, $\omega(g) = k$. Тогда из построения локально конечной нормальной в G подгруппы $Q = Q(L_g)$ [5, с. 351 – 352] следует, что $g \in Q_k < Q < R$.

Допустим теперь, что множество L_g не вполне рассеянное для некоторого элемента $g \in G$. Для доказательства теоремы достаточно установить, что нормальное замыкание g в группе G содержит элемент бесконечного порядка.

В силу определений найдется такое натуральное число m, что

$$\max_{A \in B_m(L_g)} |A| = \infty. \tag{3.1}$$

Заметим, что из включения $A \in B_m(L_g)$ вытекает существование такого класса $D \in B_{m+1}(L_g)$, что $A \subseteq D$. Поэтому мы можем предполагать, что $m > k$.

Так как для элемента g бесконечного порядка доказуемое утверждение очевидно, то считаем, что $|g| < \infty$. В этом случае подстановка g разлагается на конечные независимые циклы, длины которых не превосходят $|g|$. Пусть $l_1 = (\alpha_1 \dots \alpha_t)$, $l_2 = (\beta_1 \dots \beta_q)$ — два различных таких цикла. Полагаем

$$l_1 < l_2 \Leftrightarrow \min\{\alpha_1, \dots, \alpha_t\} < \min\{\beta_1, \dots, \beta_q\}.$$

Таким образом, если

$$g = g_1 g_2 \dots g_n \dots \text{ —} \tag{3.2}$$

разложение g на независимые циклы, то мы можем считать, что

$$g_1 < g_2 < \ldots < g_n < \ldots.$$

Как обычно, одноэлементные циклы в разложении 3.2 подстановки g опускаются, а потому L_g совпадает с объединением элементов циклов g_n $(n = 1, 2, , \ldots)$.

Предположим сначала, что все классы эквивалентности множества $B_m(L_g)$ конечны. Тогда в силу 3.1 их порядки неограничены. Если A — один из этих классов, то из неравенства $m > k = \omega(g)$ следует, что $A^g = A$, т.е. A совпадает с объединением элементов нескольких последовательных циклов из разложения 3.2 подстановки g. Отсюда ввиду ограниченности длин циклов разложения 3.2 вытекает существование такой последовательности

$$A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \tag{3.3}$$

различных классов эквивалентности множества $B_m(L_g)$, что при каждом натуральном n класс A_n содержит элементы не менее n последовательных циклов из разложения 3.2 подстановки g.

Пусть теперь $B_m(L_g)$ содержит бесконечный класс C. Если α_0 — наименьший элемент класса C, то в силу определений $C = \{\alpha | \alpha \in L_g, \alpha \geq \alpha_0\}$. Среди циклов разложения 3.2 имеется цикл $(\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_q)$; полагаем $A_1 = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_q\}$. Допустим, что уже определены конечные множества $A_1, \dots, A_{n-1}$. Тогда через A_n обозначим любое множество всех элементов n последовательных циклов разложения 3.2 при условии, что $A_n \subset C$ и $A_n \cap (A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1}) = \varnothing$.

Итак, в любом случае определена последовательность 3.3 конечных подмножеств A_n $(n = 1, 2, \ldots)$ множества L_g со следующими свойствами: $A_i \cap A_j = \varnothing$ при всех $i \neq j$; Каждое подмножество A_n есть объединение всех элементов не менее чем n последовательных циклов из разложения 3.2 подстановки g и содержится в одном классе m-разбиения множества L_g.

Покажем, что если g_s, g_{s+1} — два цикла, элементы которых содержатся в одном множестве A_n последовательности 3.3, то для любых элементов α, β цикла g_s и произвольного элемента γ цикла g_{s+1} выполняются неравенства

$$|\alpha - \beta| < k|g|, \ |\alpha - \gamma| < 3k \cdot |g| + m. \tag{3.4}$$

В самом деле, так как $\beta = \alpha^g$ для некоторого целого r $(0 \leq r < |g|)$ и $|\epsilon - \epsilon^g| \leq k = \omega(g)$, то отсюда легко вытекает первое из неравенств 3.4. Далее, пусть t — такое наименьшее натуральное число, что элементы цикла g_t содержатся в множестве A_n; α_i — минимальное число цикла g_i, $(t \leq i \leq s+1)$. В силу нашего упорядочения циклов из разложения 3.2 подстановки g выполняются неравенства $\alpha_t < \alpha_{t+1} < \ldots < \alpha_s < \alpha_{s+1}$. При этом все элементы g_i принадлежат отрезку $U_{\alpha_i}^{\alpha_i + k \cdot |g|}$. Обозначим через S объединение элементов циклов $g_t, g_{t+1}, \dots, g_s$.

Из вышеизложенного следует, что наибольшее число λ множества S удовлетворяет неравенствам $\alpha_s < \lambda < \alpha_s + k \cdot |g|$, а в силу свойства множества A_n для двух его соседних (при естественном упорядочении) элементов ϵ, σ выполняется неравенство $|\epsilon - \sigma| \leq m$. Поэтому $\alpha_s < \alpha_{s+1} < \alpha_s + k \cdot |g| + m$, и значит,

$$0 < \alpha_{s+1} - \alpha_s < k \cdot |g| + m.$$

Отсюда с учетом доказанного первого из неравенств 3.4 получаем результат

$$|\alpha-\gamma| \leq |\alpha-\alpha_s| + |\alpha_s-\alpha_{s+1}| + |\alpha_{s+1}-\gamma| < 3k\cdot|g|+m.$$

Неравенства 3.4 доказаны.

Возможны два случая.

1. Найдется последовательность $A_{i_1},\ldots,A_{i_n},\ldots$ последовательности множеств 3.3 и транспозиции

$$g_{j_1}, g_{j_1+1},\ldots,g_{j_n},g_{j_n+1},\ldots,g_{j_n+n},\ldots$$

из разложения 3.2 подстановки g такие, что при каждом n элементы транспозиций $g_{j_n}, g_{j_n+1},\ldots$, g_{j_n+n} содержатся в множестве A_{in}. Тогда если

$$g_{j_1}=(\alpha_{j_1}\beta_{j_1}), g_{j_1+1}=(\alpha_{j_1+1}\beta_{j_1+1}),\ldots,g_{j_n}=(\alpha_{j_n}\beta_{j_n}), g_{j_n+1}=(\alpha_{j_n+1}\beta_{j_n+1}),\ldots,$$

$$g_{j_n+n}=(\alpha_{j_n+n}\beta_{j_n+n}),\ldots,$$

то полагаем

$$x=(\alpha_{j_1}\ \alpha_{j_1+1}\ \beta_{j_1+1}\beta_{j_1})\ldots(\alpha_{j_n}\ \alpha_{j_n+1}\ldots\alpha_{j_n+n}\ \beta_{j_n+n}\ldots\beta_{j_n+1}\ \beta_{j_n})\ldots.$$

Согласно неравенствам 3.4 $\omega(x) < 3k\cdot|g|+m$, в частности, $x\in G$. Таким образом, элемент gg^x принадлежит нормальному замыканию g в группе G; в силу леммы 1 он разлагается на независимые циклы, длины которых неограничены, а потому $|gg^x|=\infty$.

2. Существует такое натуральное число t_0, что при любом $n\in N$ число подряд идущих транспозиций из разложения 3.2 подстановки g, элементы которых содержатся в одном множестве A_n, не превосходит t_0.

В этом случае для каждого натурального n найдутся $2n$ циклов

$$l_{n1} < l_{n2} < \ldots < l_{n2n}$$

длины ≥ 3 из разложения 3.2 подстановки g, все элементы которых содержатся в некотором множестве A_{j_n}; $j_{n_1}\neq j_{n_2}$ при $n_1\neq n_2$ и если $l_{ni}=g_{\phi(n,i)}$, то

$$0<\phi(n,i+1)-\phi(n,i)\leq t_0+1\ (n=1,2,\ldots;\ 1\leq i<2n).$$

Отсюда ввиду второго из неравенств 3.4 следует, что для любых элементов μ_{ni} цикла l_{ni} и $\mu_{n\ i+1}$ цикла $l_{n\ i+1}$ $(n\in N, 1\leq i<2n)$ выполняется неравенство

$$|\mu_{ni}-\mu_{n\ i+1}| < c, \tag{3.5}$$

где $c=(t_0+1)(3k\cdot|g|+m)$.

Далее, будем считать для определенности, что первым в каждом цикле l_{ni} стоит его наименьший элемент α_{ni}. Если $l_{ni}=(\alpha_{ni}\ \beta_{ni}\ \gamma_{ni})$, то полагаем $z_{ni}=(\alpha_{ni}\ \beta_{ni})$; если же $l_{ni}=(\alpha_{ni}\ \beta_{ni}\ \gamma_{ni}\ldots)$, то $z_{ni}=(\alpha_{ni}\ \beta_{ni}\ \gamma_{ni})$. Зададим подстановку z множества N её разложением на независимые циклы:

$$z=z_{11}\ z_{12}\ldots z_{n1}\ z_{n2}\ldots z_{n2n}\ldots.$$

В силу первого из неравенств 3.4 мы имеем $\omega(z)<k\cdot|g|$, т.е. $z\in G$. Несложные вычисления показывают, что

$$h=[g,z]=h_{11}\ h_{12}\ldots h_{n1}\ h_{n2}\ldots h_{n2n}\ldots,$$

где $h_{ni}=l_{ni}$, если l_{ni} — цикл длины 3; $h_{ni}=(\alpha_{ni}\ \beta_{ni}\ \gamma_{ni})$, если l_{ni} — цикл длины >3.

Таким образом, ввиду неравенства 3.5 коммутатор $h = [g, z]$ удовлетворяет условию леммы 2, согласно которой его нормальное замыкание в группе G содержит элемент x бесконечного порядка. Ясно, что x содержится и в нормальном замыкании элемента g.Как отмечалось выше, это доказывает теорему.

В заключении отметим следующий открытый вопрос: верно ли, что подстановка группы G тогда и только тогда содержится в собственной нормальной подгруппе, когда её носитель есть рассеяное множество натуральных чисел?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Сучков Н.М.** Пример смешанной группы, факторизуемой двумя периодическими подгруппами // Алгебра и логика. 1984. Т. 23, № 5. С. 573–577.
2. **Сучков Н.М.** О подгруппах произведения локально конечных групп // Алгебра и логика. 1985. Т. 24, № 4. С.408–413.
3. **Сучков Н.М.** О группе ограниченных перестановок // Конструкции в алгебре и логике: сб. науч. тр. Тверь: Изд-во ТГУ, 1990. С.84–89.
4. **Сучков Н.М., Сучкова Н.Г.** О группах ограниченных подстановок // Журнал Сиб. Федерал. ун-та. 2010. Т. 3, № 2. С.262–266.
5. **Сучков Н.М., Сучкова Н.Г.** О нормальных подгруппах групп ограниченных подстановок // Сиб. электрон. матем. изв. 2015. Т. 12. С. 344–355.
6. **Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И.** Основы теории групп. М.: Наука, 1982. 288 с.

Сучков Николай Михайлович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Сибирский федеральный университет
e-mail: ns7654321@mail.ru

Поступила 10.12.2015

Сучкова Надежда Георгиевна
канд. физ.-мат. наук, доцент
Сибирский федеральный университет
e-mail: ns7654321@mail.ru