Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2012, 5(4), 581–585

УДК 512.553+512.541

Проективные модули над csp-кольцами

Егор А. Тимошенко*
Механико-математический факультет,
Томский государственный университет,
Ленина, 36, Томск, 634050,
Россия

Получена 21.03.2012, окончательный вариант 21.05.2012, принята к печати 16.07.2012

Установлено строение проективных модулей над произвольным csp-кольцом. Показано также, что эти модули допускают описание при помощи полной системы кардинальных инвариантов.

Ключевые слова: проективный модуль, csp-кольцо, полная система инвариантов.

Через $\widehat{\mathbf{Z}}_p$, $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{N}$ будут обозначаться соответственно кольцо целых p-адических чисел, кольцо целых чисел и множество натуральных чисел.

Пусть P — некоторое бесконечное множество простых чисел. Допустим также, что для каждого $p \in P$ выбрано кольцо K_p, которое совпадает либо с некоторым кольцом вычетов $\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}$ (для разных p число $m > 0$ может быть разным), либо с $\widehat{\mathbf{Z}}_p$. Обозначим

$$K = \prod_{p \in P} K_p, \qquad T = \bigoplus_{p \in P} K_p \subset K;$$

ясно, что T является идеалом кольца K.

Назовем csp-*кольцом* всякое подкольцо R кольца K такое, что $T \subset R$ и факторкольцо $R/T = R_0$ является полем. Если P есть множество всех простых чисел и все K_p совпадают с кольцами $\widehat{\mathbf{Z}}_p$, а R_0 изоморфно полю рациональных чисел, то соответствующее csp-кольцо (оно определено однозначно) называется *кольцом псевдорациональных чисел.*

Наша задача — описание строения проективных модулей над csp-кольцами. Основная часть работы посвящена доказательству следующего факта:

Теорема 1. *Пусть R — csp-кольцо. Тогда всякий проективный R-модуль разлагается в прямую сумму подмодулей, изоморфных идеалам кольца R.*

Настоящая работа является продолжением статьи [1], в которой было получено полное описание проективных модулей над кольцом псевдорациональных чисел. Там же замечено, что для кольца псевдорациональных чисел теорема 1 верна в силу его наследственности; случай произвольного csp-кольца заметно сложнее.

Кольцо K_p и его единичный элемент e_p можно естественным образом отождествить с соответствующими идеалом и идемпотентом кольца R. Кроме того, кольцо K_p допускает единственную модульную структуру как над самим собой, так и над кольцом R; поэтому в дальнейшем мы рассматриваем все K_p как R-модули, не оговаривая это дополнительно. Все модули считаем унитарными. Заметим, что для всякого $r \in R \setminus T$ смежный класс $r + T$ обратим в R_0, а значит, почти при всех $p \in P$ элемент re_p будет обратимым в кольце K_p.

*tea471@mail.tsu.ru

Кольцо R содержит идемпотенты двух типов:

$$e_X = \sum_{p \in X} e_p, \qquad 1 - e_X = 1 - \sum_{p \in X} e_p,$$

где X есть конечное (возможно, пустое) подмножество множества P. Элемент e_X назовем *идемпотентом конечного типа с носителем* X.

В силу теоремы Капланского [2] всякий проективный модуль можно представить как прямую сумму счетно порожденных подмодулей, а значит, достаточно доказать теорему 1 для счетно порожденных проективных R-модулей.

Доказательство теоремы 1. Пусть M — счетно порожденный проективный R-модуль. Мы можем считать, что $M \subset F$, где F есть прямая сумма счетного числа копий R. Легко убедиться, что фактормодуль M/MT представляет собой линейное пространство над R_0. Пусть $\Psi = \{a_1, a_2, ...\}$ — некоторая система элементов модуля M (конечная либо счетная) такая, что система $\{a_1 + MT, a_2 + MT, ...\}$ служит для M/MT базисом. Тогда

$$M = MT + \sum_{a \in \Psi} aR. \tag{1}$$

Всякий элемент модуля $M \subset F$ можно представить как бесконечный вектор $(r_1, r_2, ...)$, у которого почти все координаты равны нулю (здесь $r_k \in R$). Естественный эпиморфизм $M \to M/MT$ мы можем отождествить с отображением, сопоставляющим всякому вектору $(r_1, r_2, ...) \in M$ вектор $(r_1 + T, r_2 + T, ...)$ с координатами из R_0. Пусть $a_n = (\beta_{n1}, \beta_{n2}, ...)$, где $\beta_{nk} \in R$. Из условия $a_n \notin MT$ следует, что хотя бы одна из координат β_{nk} не принадлежит идеалу T; обозначим эту координату через β_n.

Для натурального $n \leqslant |\Psi|$ выберем наименьшее $s \in \mathbf{N}$, обладающее свойством

$$\text{при всех } j \in \{1, 2, ..., n\} \text{ и } k > s \text{ выполнено } \beta_{jk} = 0. \tag{2}$$

Рассмотрим для этого числа s две матрицы:

$$B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{21} & \dots & \beta_{n1} \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \dots & \beta_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{1s} & \beta_{2s} & \dots & \beta_{ns} \end{pmatrix}, \qquad \overline{B} = \begin{pmatrix} \beta_{11}+T & \beta_{21}+T & \dots & \beta_{n1}+T \\ \beta_{12}+T & \beta_{22}+T & \dots & \beta_{n2}+T \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{1s}+T & \beta_{2s}+T & \dots & \beta_{ns}+T \end{pmatrix}.$$

Система Ψ является линейно независимой по модулю MT, а значит, столбцы матрицы $\overline{B}$ линейно независимы над R_0. Поэтому $\overline{B}$ содержит некоторый ненулевой минор порядка n. Соответствующий ему минор матрицы B обозначим через Δ_n (очевидно, что $\Delta_n \notin T$).

Через P_n обозначим множество всех чисел $p \in P$ таких, что по крайней мере один из элементов $\Delta_n e_p$ и $\beta_n e_p$ необратим в кольце K_p. Ясно, что все P_n конечны. Пусть $\{p_1, p_2, ...\}$ есть множество (имеющее конечную или счетную мощность τ) всех простых чисел $p \in P$, не принадлежащих ни одному из построенных множеств P_n. Условимся, что L_0 — пустое множество; далее, для всякого $n \geqslant 0$ зададим L_{n+1} как множество $L_n \cup P_{n+1}$, к которому присоединен элемент p_{n+1} (в случае $\tau \leqslant n$ присоединять ничего не нужно). Мы получаем цепочку $L_0 \subset L_1 \subset L_2 \subset ... \subset L_n \subset ...$ конечных подмножеств множества P, объединение которой совпадает с P. Обозначим через ε_n идемпотент конечного типа с носителем L_n.

Имеет место равенство $a_n R = a_n \varepsilon_n R + a_n(1 - \varepsilon_n)R$; ясно, что $a_n \varepsilon_n R \subset MT$. Поэтому далее можно считать, что система Ψ из разложения (1) состоит не из элементов a_n, а из элементов $a_n(1-\varepsilon_n)$. Заметим, что аннулятором элемента $a_n(1-\varepsilon_n) \in M$, как и элемента $\beta_n(1-\varepsilon_n) \in R$, служит идеал $\varepsilon_n R$. Следовательно, $a_n(1-\varepsilon_n)R \cong (1-\varepsilon_n)R$.

Замечание. *Если система Ψ конечна и содержит n элементов, то будем считать, что $a_{n+1} = a_{n+2} = \ldots = 0$, $L_{n+1} = L_{n+2} = \ldots = P$ и $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_{n+2} = \ldots = 1$. Это позволит нам сделать дальнейшие рассуждения применимыми как к случаю счетной, так и к случаю конечной системы Ψ.*

Итак, для всякого $n \in \mathbf{N}$ модуль $a_n(1-\varepsilon_n)R$ изоморфен идеалу $(1-\varepsilon_n)R$. Заметим, что при любом $p \in P \setminus L_n$ выполнено $\varepsilon_1 e_p = \varepsilon_2 e_p = \ldots = \varepsilon_n e_p = 0$. Предположим, что сумма

$$A = \sum_{j \in \mathbf{N}} a_j(1-\varepsilon_j)R \tag{3}$$

не является прямой. В этом случае для некоторого $n > 1$ сумма первых $n-1$ слагаемых из (3) является прямой, а сумма первых n слагаемых уже не прямая. Тогда найдутся элементы $r_1, r_2, \ldots, r_n \in R$, для которых

$$a_1(1-\varepsilon_1)r_1 + a_2(1-\varepsilon_2)r_2 + \ldots + a_n(1-\varepsilon_n)r_n = 0 \tag{4}$$

и $a_n(1-\varepsilon_n)r_n \neq 0$. В силу последнего неравенства имеем $r_n \notin \varepsilon_n R$. Зафиксируем простое $p \in P \setminus L_n$ такое, что $r_n e_p \neq 0$. Умножая (4) на e_p, получим $a_1 r_1 e_p + a_2 r_2 e_p + \ldots + a_n r_n e_p = 0$. Перепишем данное равенство в виде системы уравнений

$$\begin{cases} (\beta_{11}e_p)r_1 e_p + (\beta_{21}e_p)r_2 e_p + \ldots + (\beta_{n1}e_p)r_n e_p = 0, \\ (\beta_{12}e_p)r_1 e_p + (\beta_{22}e_p)r_2 e_p + \ldots + (\beta_{n2}e_p)r_n e_p = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\beta_{1s}e_p)r_1 e_p + (\beta_{2s}e_p)r_2 e_p + \ldots + (\beta_{ns}e_p)r_n e_p = 0, \end{cases}$$

где s — это число, удовлетворяющее условию (2), а в качестве неизвестных выступают $r_1 e_p, r_2 e_p, \ldots, r_n e_p \in K_p$. Матрица этой системы содержит минор порядка n, равный $\Delta_n e_p$, т.е. являющийся обратимым элементом кольца K_p. Тогда для всех $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ имеем $r_j e_p = 0$ — противоречие. Итак, сумма (3) является прямой.

Покажем теперь, что существуют подмодули $G_p \subset Me_p$, для которых $Me_p = G_p \oplus Ae_p$. Зафиксируем число $p \in P$. Найдется $n \geqslant 0$ такое, что $p \notin L_n$ и $p \in L_{n+1}$. Это значит, что $\varepsilon_{n+1}e_p = \varepsilon_{n+2}e_p = \ldots = e_p$ и, следовательно,

$$Ae_p = \bigoplus_{j \in \mathbf{N}} a_j(1-\varepsilon_j)Re_p = \bigoplus_{j=1}^{n} a_j(1-\varepsilon_j)Re_p \cong \bigoplus_{j=1}^{n}(1-\varepsilon_j)Re_p = \bigoplus_{j=1}^{n} Re_p = \bigoplus_{j=1}^{n} K_p.$$

Таким образом, Ae_p является свободным K_p-модулем конечного ранга. Будем считать, что $n \geqslant 1$ (для $n = 0$ требуемое утверждение очевидно в силу равенства $Ae_p = 0$). Рассмотрим два случая.

1. Пусть $K_p = \mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}$. Свободный K_p-модуль Ae_p инъективен и, значит, выделяется прямым слагаемым в K_p-модуле Me_p.

2. Пусть выполнено $K_p = \widehat{\mathbf{Z}}_p$. Наша ближайшая цель — убедиться, что Ae_p является чистым подмодулем p-адического модуля Fe_p (и, следовательно, модуля Me_p). Допустим, что $x \in Ae_p$ делится на p^m в модуле Fe_p. Для всех $j \leqslant n$ выполнено $a_j(1-\varepsilon_j)Re_p = a_j Re_p$, поэтому можем записать $x = a_1 r_1 e_p + a_2 r_2 e_p + \ldots + a_n r_n e_p$, где $r_j \in R$. Элемент модуля Fe_p можно представить как бесконечный вектор, координаты которого принадлежат $Re_p = \widehat{\mathbf{Z}}_p$.

Если x делится на p^m, то и все координаты элемента x делятся на p^m (в кольце $\widehat{\mathbf{Z}}_p$). Пусть s — число, удовлетворяющее условию (2). Имеем

$$\begin{cases} (\beta_{11}e_p)r_1e_p + (\beta_{21}e_p)r_2e_p + \ldots + (\beta_{n1}e_p)r_ne_p \equiv 0 \pmod{p^m}, \\ (\beta_{12}e_p)r_1e_p + (\beta_{22}e_p)r_2e_p + \ldots + (\beta_{n2}e_p)r_ne_p \equiv 0 \pmod{p^m}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\beta_{1s}e_p)r_1e_p + (\beta_{2s}e_p)r_2e_p + \ldots + (\beta_{ns}e_p)r_ne_p \equiv 0 \pmod{p^m}, \end{cases}$$

где в качестве неизвестных выступают $r_1e_p, r_2e_p, \ldots, r_ne_p \in \widehat{\mathbf{Z}}_p$. Матрица данной системы сравнений содержит минор n-го порядка, равный $\Delta_n e_p$ и, значит, являющийся обратимым элементом кольца $\widehat{\mathbf{Z}}_p$. Следовательно, для всех $j \leqslant n$ выполнено $r_je_p \equiv 0 \pmod{p^m}$. Тогда для некоторых элементов $r'_j \in R$ справедливы равенства $r_je_p = p^m r'_j e_p$. Ясно, что элемент $x' = (a_1r'_1 + a_2r'_2 + \ldots + a_nr'_n)e_p \in Ae_p$ удовлетворяет условию $p^m x' = x$. Итак, Ae_p — это чистый подмодуль в Fe_p и в Me_p. Кроме того, Ae_p есть свободный p-адический модуль конечного ранга и, значит, чисто инъективный p-адический модуль [3]; тогда он служит прямым слагаемым для модуля Me_p, содержащего Ae_p в качестве чистого подмодуля.

Таким образом, существование K_p-модуля G_p с требуемыми свойствами доказано для всех $p \in P$. Нетрудно теперь заметить, что

$$M = MT + A = \Big(\bigoplus_{p\in P} Me_p\Big) + A = \Big(\bigoplus_{p\in P} G_p\Big) \oplus A \cong \Big(\bigoplus_{p\in P} G_p\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{n\in\mathbf{N}} (1-\varepsilon_n)R\Big).$$

Если $K_p = \mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}$, то G_p, как и всякий модуль над кольцом K_p, изоморфен прямой сумме некоторых идеалов кольца K_p (и, значит, идеалов кольца R). Если же выполнено $K_p = \widehat{\mathbf{Z}}_p$, то модуль G_p, будучи подмодулем свободного p-адического модуля Fe_p, изоморфен прямой сумме копий $\widehat{\mathbf{Z}}_p$.

Очевидно, что все идеалы, входящие в прямое разложение проективного модуля, также будут проективными. Как и в случае кольца псевдорациональных чисел [1], всякий идеал $J \subset R$ относится к одному из двух типов:

$$J = \bigoplus_{p\in P} J_p \qquad \text{или} \qquad J = \Big(\bigoplus_{p\in X} J_p\Big) \oplus (1-e_X)R, \tag{5}$$

где J_p — произвольные идеалы соответствующих колец K_p.

Если $K_p = \widehat{\mathbf{Z}}_p$, то всякий ненулевой идеал $J_p \subset K_p$ как R-модуль будет изоморфен $\widehat{\mathbf{Z}}_p$. В ситуации $K_p = \mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}$ из всех идеалов кольца K_p проективными R-модулями являются лишь K_p и 0. Получаем, что всякий проективный идеал кольца R изоморфен как R-модуль некоторому идеалу J вида (5) такому, что каждый идеал J_p совпадает либо с 0, либо с K_p. Отсюда и из теоремы 1 следует, что всякий проективный R-модуль M имеет вид

$$M \cong \Big(\bigoplus_{i\in I} (1-\delta_i)R\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{p\in P} F_p\Big); \tag{6}$$

здесь F_p — свободные K_p-модули, а все δ_i — это некоторые идемпотенты конечного типа. И обратно, всякий R-модуль вида (6) проективен, поскольку он изоморфен прямой сумме идеалов, каждый из которых представляет собой прямое слагаемое кольца R. Поэтому для модулей над csp-кольцами также будут справедливы теоремы 1 и 2 из [1], описывающие проективные модули в терминах инвариантов (доказательства обеих теорем переносятся на случай произвольного csp-кольца без изменений).

Напомним, что под инвариантами проективного R-модуля M в работе [1] понимали кардинальное число $r(M)$, равное размерности R_0-пространства M/MT, и кардинальные числа $r_p(M)$, равные рангам свободных K_p-модулей Me_p. Для модуля вида (6) кардинал $r(M)$ совпадает с мощностью индексного множества I. В дополнение к теоремам 1 и 2, приведенным в [1], для csp-кольца R можно доказать следующий результат:

Теорема 2. *Для проективных R-модулей A и M вложение $A \to M$ существует тогда и только тогда, когда $r(A) \leqslant r(M)$ и $r_p(A) \leqslant r_p(M)$ для всех $p \in P$.*

Доказательство. Если существует вложение $A \to M$, то, как нетрудно видеть, модули A/AT и Ae_p вкладываются в M/MT и Me_p соответственно. Отсюда получаем $r(A) \leqslant r(M)$ и $r_p(A) \leqslant r_p(M)$.

Допустим теперь, что для M справедлив изоморфизм (6) и что выполнены неравенства $r(A) \leqslant r(M) = |I|$ и $r_p(A) \leqslant r_p(M)$. Пусть G_p — это свободный K_p-модуль, ранг которого $r_p(G_p)$ удовлетворяет условию $r_p(G_p) + r_p(A) = r_p(M)$.

Выберем подмножество D множества I такое, что $|D| = r(A)$. Заметим, что все идеалы $(1-\delta_i)T$ проективны. Рассмотрим проективные R-модули

$$M' = \Big(\bigoplus_{i\in D}(1-\delta_i)R\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{i\notin D}(1-\delta_i)T\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{p\in P} F_p\Big), \qquad A' = \Big(\bigoplus_{p\in P} G_p\Big) \oplus A.$$

Ясно, что модуль M' вкладывается в M. Для всякого $p \in P$ выполнено $Te_p = Re_p$ и, значит, $r_p(M') = r_p(M) = r_p(G_p) + r_p(A) = r_p(A')$; кроме того, имеем $r(M') = |D| = r(A) = r(A')$. Применяя теперь теорему 1 из [1], получаем изоморфизм $M' \cong A'$. Итак, модуль A можно вложить в M, что и требовалось. $\square$

Замечание. *Указанных в теореме условий недостаточно для того, чтобы существовал эпиморфизм $M \to A$. Примером могут служить проективные R-модули $A = T$ и $M = R$.*

Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП „Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 годы“ (государственный контракт 14.в37.21.0354).

Список литературы

[1] Е.А.Тимошенко, Проективные модули над кольцом псевдорациональных чисел, *Журнал СФУ. Математика и физика*, **4**(2011), №4, 541–550.

[2] I.Kaplansky, Projective modules, *Annals of Mathematics*, **68**(1958), №2, 372–377.

[3] П.А.Крылов, А.А.Туганбаев, Модули над областями дискретного нормирования, М., Факториал Пресс, 2007.

Projective Modules over csp-Rings

Egor A. Timoshenko

We establish the structure of projective modules over an arbitrary csp-ring. It is also shown that these modules admit a description by means of a complete system of cardinal invariants.

Keywords: projective module, csp-ring, complete system of invariants.