УДК 373+51.7+004

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ НАСЛЕДИЕ АЛЬ-ФАРАБИ ПО ТРИГОНОМЕТРИИ В СОВРЕМЕННОМ ИНФОРМАТИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБРАЗОВАНИИ

Е.Ы.Бидайбеков, д.п.н., профессор, Г.Б.Камалова, д.п.н., доцент,
Б.Г.Бостанов, к.п.н., доцент
e-mail: esen_bidaibekov@mail.ru, g_kamalova@mail.ru, bbgu@mail.ru
Казахский национальный педагогический университет имени Абая, г.Алматы

Аннотация. В статье рассмотрены учение аль-Фараби о тригонометрических линиях и его теория составления тригонометрических таблиц с точки зрения современного математического образования, обоснована целесообразность внедрения их в учебный процесс в рамках школьной математики и информатики, рассмотрены возможности применения информационно-коммуникационных технологий для повышения эффективности их обучения

Ключевые слова: тригонометрия, математическое наследие аль-Фараби, тригонометрические линии

Тригонометрия возникла и развивалась в древности как один из разделов астрономии, как ее вычислительный аппарат, носила чисто геометрический характер и представляла главным образом «исчисление хорд». Наиболее полные сведения из тригонометрии на тот период представлены в известном «Алмагесте» древнегреческого астронома Птолемея.

В качестве же обособленного раздела математики история возникновения тригонометрии началась в Средневековье. Значительный вклад в нее внесли индийские средневековые астрономы. Именно тогда ученые заменили хорды синусами. Это открытие позволило ввести функции, касающиеся исследования сторон и углов прямоугольного треугольника. Именно тогда тригонометрия начала обосабливаться от астрономии, превращаясь в раздел математики.

Индийские астрономические трактаты наряду со «Алмагестом» Птолемея послужили отправным пунктом в развитии тригонометрических понятий и методов в странах ближнего и Среднего Востока. Особенно большую роль при этом сыграл «Алмагест» Птолемея. В начале IX века он был переведен с греческого на арабский язык и в дальнейшем комментировался и перерабатывался многими учеными средневекового Востока.

Одним из первых его комментаторов был аль-Фараби (870-950 гг.) – величайший ученый, мыслитель и энциклопедист раннего средневековья, уроженец Казахстана.

Аль-Фараби несколько совершенствует тригонометрический аппарат Птолемея для облегчения понимания трудных математических выкладок, имеющихся в работе древнегреческого астронома. И в тригонометрических главах «Книги приложений к «Алмагесту»» [1] представляет довольно развитую тригонометрию, созданную им в связи с применением математических методов для решения разнообразных задач математической астрономии и географии. Однако изучены они наряду с рядом других математических работ аль-Фараби только в самое последнее время. Огромная заслуга в этом принадлежит казахстанскому ученому Ауданбеку Кубесову, который целенаправленно занимался исследованием математического наследия великого ученого средневекового Востока. В работе «Математическое наследие Аль-Фараби» [2], получившей высокую оценку зарубежных исследователей научного наследия аль-

Фараби, им освещены основные результаты его научных изысканий в области математики, в том числе тригонометрия и ее применение в астрономии, и другие вопросы. Все эти работы аль-Фараби носят чисто прикладной характер и имеют огромное общеобразовательное значение. Вместе с тем образовательные их аспекты и вопросы их внедрения в учебный процесс до сих пор специально не исследовались и не были предметом отдельного рассмотрения. В этой связи представленная в статье тема актуальна.

Обращение сегодня к научному наследию аль-Фараби, уроженцу Казахстана, представляется особенно важным еще и потому, что перед педагогической наукой Казахстана на сегодняшний день стоит ответственная миссия, связанная с реализацией Государственной программы « Культурное наследие» [3], которая ставит на повестку дня вопрос об изучении наследия выдающихся мыслителей прошлого, источников и документов, имеющих историческое значение в культурном наследии казахского народа. Использование при изложении материала урока исторических сведений подчеркнет практическое его значение, поднимет интерес учащихся к изучаемому материалу и будет способствовать прочному его усвоению. И в этом контексте исследование вопросов возможности внедрения научного наследия аль-Фараби в современное информатико-математическое образование также представляется особенно актуальным и своевременным.

В начале своих тригонометрических глав аль-Фараби дает разъяснение основных тригонометрических линий – хорды, синуса, косинуса и др. Он пишет «ABC – круг, его центр – E, его диаметр – AC (рис.1). Проведем EB под прямым углом из точки E. Зададимся дугой AG, проведем линию AG, опустим GD перпендикулярно к AC и GH – перпендикулярно к BE, соединим G и C. Тогда линия AG – хорда дуги AG, GC – хорда ее дополнения, GD – синус дуги AG, GH – ее косинус, равный линии DE, AD – стрела дуги AG; BH – стрела дуги GB, дуга GB – дополнение дуги AG до четверти круга, дуга GBC - дополнение AC до половины круга» [1].

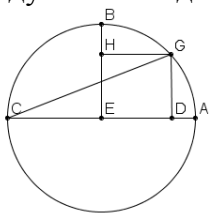

Рисунок 1. – Основные тригонометрические линии по аль-Фараби

Как видно из текста, синусы и косинусы он рассматривает в первой четверти, а хорды, как и Птолемей, на верхней полуплоскости. Более того, из текста и рисунка легко можно установить основное тригонометрическое тождество $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = R^2$ и следующие формулы приведения $\sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$, $\cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$, а также то, что величина линии синуса в первой четверти возрастает, а линии косинуса убывает.

Далее он дает определение синуса «как половины хорды удвоенной дуги», т.е. если $BD = chd\ 2\alpha$ (рис.2), то BC – линия синуса дуги $AB = \alpha$, и

$$\sin\alpha = 1/2 \cdot chd\ 2\alpha . \qquad (1)$$

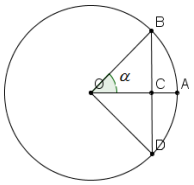

Рисунок 2. – Определение синуса по аль-Фараби

Это одно из первых известных нам введений синуса при комментировании Птолемея.

Аль-Фараби при изложении «Алмагеста» в дальнейшем всюду заменяет хорду дуги 2α синусом угла α. Хотя такая замена сама по себе кажется не столь существенной, однако переход от хорды к полухорде благоприятствовал широкому внедрению в астрономии различных тригонометрических функций, связанных со сторонами и углами прямоугольного треугольника в круге.

Здесь же он приводит серию задач по определению величины хорды четверти, трети круга, одной десятой и пятой круга, по известной хорде дуги величины хорды ее дополнения, а также по определению величины хорды суммы и разности двух дуг и др. Каждая из них изложена в отдельной главе его «Книги приложений», примыкающей к «Комментариям к «Алмагесту»». Так в главе «О нахождении величины хорды дополнения дуги, если известна хорда дуги», дается способ определения хорды дуги $180^\circ - \alpha$ по хорде дуги α по формуле $chd^2(180^\circ - \alpha) + chd^2\alpha = (2R)^2$. По установленному им соотношению (1) это равносильно ее нахождению по данному $\sin\frac{\alpha}{2}$ с помощью формулы $\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2} = R^2$.

В последующих главах приводятся способы определения хорды 90°, 120° 36° и 72°. Доказывается, что $chd\,90^\circ = R\sqrt{2}$, $chd\,120^\circ = R\sqrt{3}$, откуда по формуле (1) легко получить $\sin 45^0 = \frac{chd\,90^\circ}{2} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$ и $\sin 60^0 = \frac{chd\,120^\circ}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$. Кроме того, приводятся доказательства синуса суммы и разности, и синуса половинного аргумента.

Для широкого применения тригонометрических функций в теоретических и практических целях этих значений, конечно, недостаточно. Необходимы специальные таблицы значений тригонометрических функций, самыми ранними из которых считаются таблицы хорд греков, приведенные в первой книге «Алмагеста» Птолемея.

Одним из важных этапов в составлении таблицы тригонометрических функций является нахождение числового значения синуса одного градуса. Поэтому математики средневекового Востока придавали большое значение разработке различных методов решения этой задачи. В своей «Книге приложений к «Алмагесту»» аль-Фараби, насколько нам известно, первым на Востоке определяет значение синуса и косинуса одного градуса. Хотя метод вычисления хорды одного градуса, примененный им, по существу, совпадает с методом Птолемея, однако аль-Фараби значительно улучшает точность вычислений Птолемея путем совершенствования приемов вычислений над шестидесятеричными дробями.

Предварительно им доказывается лемма, играющая особую роль при вычислении хорды и синуса одного градуса: если $\alpha \succ \beta$, то $\frac{chd\alpha}{crd\beta} \prec \frac{\alpha}{\beta}$, на основе которой далее строятся таблицы хорды, синусов и косинусов. Следуя Птолемею, аль-Фараби сначала находит хорду дуги разности $72^\circ - 60^\circ = 12^\circ$, а затем последовательно определяет ее для 6°, 3°, 1.5° и $\frac{3^\circ}{4}$. С помощью доказанной леммы получает неравенства $crd\,1^\circ : crd\,\frac{3^\circ}{4} < 1 : \frac{3}{4}$, $crd\,1^\circ < \frac{4}{3} \cdot crd\,\frac{3^\circ}{4} \approx 1^\circ 2' 49'' 52'''$ и

$crd\,\frac{3^\circ}{2} : crd\,1^\circ < \frac{3}{2} : 1$, $crd\,1^\circ > \frac{2}{3} \cdot crd\,\frac{3^\circ}{2} \approx 1^\circ 2' 49'' 48'''$.

Из которых следует, что $1^\circ 2' 49'' 48''' < crd\, 1^\circ < 1^\circ 2' 49'' 52'''$.

За приближенное значение хорды одного градуса аль-Фараби принимает среднее арифметическое двух найденных значений $crd\, 1^\circ \approx 1^\circ 2' 49'' 50'''$. И если значение хорды одного градуса, найденное Птолемеем, точно до пяти десятичных знаков, то у аль-Фараби оно точно до шести десятичных знаков включительно. Указанное достижение аль-Фараби по улучшению точности вычислений синуса одного градуса в дальнейшем было развито другими математиками средневекового Востока.

Далее аль-Фараби по значению $crd\, 1^\circ \approx 1^\circ 2' 49'' 50'''$ находит значение $crd\, 179^\circ \approx 119^\circ 59' 43'' 33'''$ (как хорды его дополнения), и по доказанному им утверждению об определении величины хорды суммы двух дуг, хорды которых известны, определяет все хорды дуг от одного до 180^0, откуда получает $\sin 1^\circ \approx 1^\circ 2' 49'' 43'''$ и $\cos 1^\circ \approx 59^\circ 59' 27'' 30'''$. В десятичных дробях приближение аль-Фараби для $\sin 1^\circ$ равно 0,017452389 вместо правильного 0,017452406.

Значение косинуса одного градуса необходимо ему для вычисления тангенса и котангенса одного градуса. Они, в свою очередь, необходимы для составления таблиц этих функций.

Безусловно, все эти и другие задачи аль-Фараби по тригонометрии достойны изучения, доказательства и применения в современном математическом образовании, как в рамках обязательного курса алгебры, так и в виде самостоятельного элективного курса. Школьники должны иметь прочные знания по тригонометрии, так как они имеют огромную практическую направленность, являются звеном огромной цепи понятий и имеют большое значение в реализации межпредметных связей.

Отметим, что первичные тригонометрические знания учащихся зачастую представлены фрагментарно. Связано это с высоким уровнем абстракции понятий, сложной логической структурой их определений, недостаточностью учебного времени для осмысления сложности вопросов и др. Нынешнее отношение школьников к тригонометрии вызвано также и непониманием ее роли в общечеловеческой культуре.

Знакомство с задачами аль-Фараби, прежде всего, будет способствовать более глубокому усвоению учащимися материала, предусмотренного программой, осознанному пониманию тригонометрических формул, позволит расширить их представления, как о тригонометрических задачах в целом, так и возможных способах их решения, систематизировать знания учащихся. И, несомненно, будет способствовать развитию логического мышления учащихся, развитию познавательных и исследовательских их навыков, повышению уровня их математической и информационной культуры. Использование же при их обучении современных математических пакетов, цифровых образовательных ресурсов сделает процесс обучения тригонометрии более увлекательным, позволит усилить мотивацию учения, и, что очень важно, позволит повысить эффективность и качество их обучения.

Большими возможностями, позволяющими наглядно демонстрировать доказательства утверждений по тригонометрии, представленных аль-Фараби в виде четкой последовательности действий, обладает среда GeoGebra, которая может с успехом применяться при обучении тригонометрии аль-Фараби, как в рамках школьной математики, так и информатики.

1. Аль-Фараби Математические трактаты. - Алма-Ата, «Наука», 1972.– 324с.
2. Кубесов А.К. Математическое наследие Аль-Фараби. - Алма-Ата. 1974.–246 с.
3. Государственная программа «Мәдени мұра» - Культурное наследие Казахстана:- http://www.madenimura.kz/ru/government-program-madenimura/programs-madenimura/