Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2012, 5(3), 409–416

УДК 517.55

Вычисление мономиальной функции для решения общей системы алгебраических уравнений

Владимир Р. Куликов*
Институт математики,
Сибирский федеральный университет,
Свободный, 79, Красноярск, 660041,
Россия

Получена 22.01.2012, окончательный вариант 11.04.2012, принята к печати 11.04.2012

В настоящей статье приводится представление для монома $y^\mu(x)$ решения $y(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x))$ системы n общих алгебраических уравнений.

Ключевые слова: преобразование Меллина, алгебраическое уравнение.

Введение

В 1921 году Меллин [1] получил интегральную формулу для любой положительной степени μ решения $y(x)$ общего алгебраического уравнения, предварительно приведя его к нормальному виду

$$y^m + x_1 y^{m_1} + \dots + x_p y^{m_p} - 1 = 0, \tag{1}$$

$m > m_1 > \dots > m_p \geqslant 1$. Попутно в этой работе было получено интегральное представление для любой отрицательной степени решения уравнения (1), т.е. для функции вида $\dfrac{1}{y^\mu(-x)} := \dfrac{1}{y^\mu(-x_1, \dots, -x_p)}$, где $\mu > 0$

В 2003 году В.А.Степаненко [2] была получена формула для решения $y(x) = y(\{x_\lambda\})$ системы общих алгебраических уравнений вида

$$y_i^{m_i} + \sum_{\lambda \in \Lambda_i} x_\lambda y_1^\lambda - 1 = 0, i = 1, \dots, n, \tag{2}$$

здесь $\Lambda_i = \Lambda_i' \times [1, m_i - 1]$, $\Lambda_i' \subset \mathbb{Z}_\geqslant^{n-1}$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $y^\lambda = y_1^{\lambda_1} \dots y_n^{\lambda_n}$, x_λ — переменные коэффициенты, $\lambda \in \Lambda$, множество Λ есть дизъюнктная сумма множеств $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n$. Приведенная в [2] формула даёт формальное (без обоснования сходимости интеграла) представление для монома $y(x)^\mu$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ с положительными показателями $\mu_i > 0$.

В 2005 году И.А.Антипова [3] доказала интегральную формулу для решения системы общих алгебраических уравнений (2), но для монома $\dfrac{1}{y^\mu(-x)} = \dfrac{1}{y_1^{\mu_1}(-x) \cdot \ldots \cdot y_n^{\mu_n}(-x)}$ с отрицательными показателями.

В настоящей работе дается представление для монома с произвольными степенями. Для удобства введем некоторые обозначения, которыми будем пользоваться на протяжении всей статьи.

Пусть нас интересует моном $y(x)^\mu$ степени $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{Z}^n$. Обозначим через $N = N_\mu$ набор индексов $i \in \{1, \dots, n\}$, для которых $\mu_i < 0$, и пусть δ_N^i — характеристическая функция подмножества $N \subset \{1, \dots, n\}$.

*v.r.kulikov@mail.ru

Во введенных нами обозначениях мы будем строить преобразование Меллина для монома $y^{\mu}(\{(-1)^{\delta_N^1}x_{\lambda^1}\},\ldots,\{(-1)^{\delta_N^i}x_{\lambda^i}\},\ldots,\{(-1)^{\delta_N^n}x_{\lambda^n}\})$, где $\lambda^i\in\Lambda_i$.

1. Преобразование Меллина

Для детальной работы нам удобно пронумеровать показатели мономов λ системы (2) в виде $(m^i_{1k},\ldots,m^i_{nk})\in\Lambda_i$. Тогда система примет вид

$$y_i^{m_i}+\sum_{k=1}^{p_i}x_{m^i_{1k}\ldots m^i_{nk}}y_1^{m^i_{1k}}\cdot\ldots\cdot y_n^{m^i_{nk}}-1=0, i=1,\ldots,n. \tag{3}$$

Здесь p_i — число слагаемых с переменными коэффициентами в i-м уравнении.

Преобразование Меллина функции $y^{\mu}=y^{\mu}(\{(-1)^{\delta_N^i}x_{M_k^i}\})$ представляет собой интеграл вида

$$M\left[y^{\mu}\right](u)=\int\limits_{\mathbb{R}_+^{|p|}}y^{\mu}\left(\left\{(-1)^{\delta_N^i}x_{M_k^i}\right\}\right)\prod_{i=1}^{n}\prod_{s=1}^{p_i}\left(x_{M_s^i}\right)^{u_{M_s^i}-1}dx. \tag{4}$$

Наряду с подмножеством $N=N_{\mu}\subset\{1,\ldots,n\}$ рассмотрим его дополнение, которое обозначим P.

Для вычисления интеграла (4) введем замену переменной: $\xi\to x$:

$$x_{M_k^i}=\xi_{M_k^i}\prod_{s=1}^{n}\tau_s^{(-1)^{\delta_N^s}\frac{m^i_{sk}}{m_s}-\delta_s^i\delta_P^s}, \tag{5}$$

где $\tau_i=1+\sum\limits_{k=1}^{p_i}\xi_{M_k^i}$, тогда нетрудно показать, что $y_s\left(\left\{(-1)^{\delta_N^i}x_{M_k^i}\right\}\right)=\tau_s^{(-1)^{\delta_P^s}\frac{1}{m_s}}$.

Отметим, что замена (5) является линеаризацией исходной системы (3).

Лемма 1. *Якобиан линеаризации (5) равен*

$$\left|\frac{\partial x}{\partial\xi}\right|=\frac{\det\left(\delta_j^i\left(\delta_P^i+\delta_N^i\tau_i\right)+(-1)^{\delta_N^i}\sum\limits_{k=1}^{p_i}\frac{m^i_{jk}}{m_j}\xi_{M_k^i}\right)}{\prod\limits_{j=1}^{n}\left(1+\sum\limits_{k=1}^{p_j}\xi_{M_k^j}\right)^{p_j\delta_P^j-\frac{1}{m_j}(-1)^{\delta_N^j}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{p_i}m^i_{jk}+1}}$$

Доказательство. Якобиан линеаризации

$$\left|\frac{\partial x}{\partial\xi}\right|=\left|\frac{\partial x_{M_k^i}}{\partial\xi_{M_r^j}}\right|={}_j\square^i_{kr}=$$

$$=\left\|\delta_j^i\delta_r^k\prod_{s=1}^{n}\tau_s^{(-1)^{\delta_N^s}\frac{m^i_{sk}}{m_s}-\delta_s^i\delta_P^s}+\left((-1)^{\delta_N^j}\frac{m^i_{jk}}{m_j}-\delta_j^i\delta_P^j\right)\cdot\xi_{M_k^i}\prod_{s=1}^{n}\tau_s^{(-1)^{\delta_N^s}\frac{m^i_{sk}}{m_i}-\delta_s^i\delta_P^s-\delta_s^j}\right\|$$

имеет блочную структуру:

$$\left|\frac{\partial x}{\partial\xi}\right|=\begin{vmatrix}{}_1\square^1 & \ldots & {}_n\square^1\\ \ddots & \ddots & \ddots\\ \ldots & {}_j\square^i & \ldots\\ \ddots & \ddots & \ddots\\ {}_1\square^n & \ldots & {}_n\square^n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}{}_1\square^1_{kr} & \ldots & {}_n\square^1_{kr}\\ \ddots & \ddots & \ddots\\ \ldots & {}_j\square^i_{kr} & \ldots\\ \ddots & \ddots & \ddots\\ {}_1\square^n_{kr} & \ldots & {}_n\square^n_{kr}\end{vmatrix},$$

где i, j — номера блок-строки и блок-столбца якобиана, а k, r — номера строки и столбца в каждом блоке.

Произведя вычисления, аналогичные вычислениям в [2], получим:

$$\left|\frac{\partial x}{\partial \xi}\right| = \frac{\det\left(\delta_j^i\left(\delta_P^i + \delta_N^i\tau_i\right) + (-1)^{\delta_N^i}\sum\limits_{k=1}^{p_i}\frac{m_j^i k}{m_j}\xi_{M_k^i}\right)}{\prod\limits_{j=1}^{n}\left(1+\sum\limits_{k=1}^{p_j}\xi_{M_k^j}\right)^{p_j\delta_P^j - \frac{1}{m_j}(-1)^{\delta_N^j}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{p_i}m_{jk}^i + 1}}$$

□

Теорема 1. *Преобразование Меллина, определяемое интегралом (4), равно*

$$M[y^\mu](u) = \frac{\prod\limits_{i=1}^{n}\prod\limits_{s=1}^{p_i}\Gamma\left(u_{M_s^i}\right)\prod\limits_{j\in P}\Gamma\left(\frac{\mu_j}{m_j} - \frac{1}{m_j}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{s=1}^{p_i}m_{js}^i u_{M_s^i}\right)}{\prod\limits_{j\in P}\Gamma\left(\frac{\mu_j}{m_j} - \frac{1}{m_j}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{s=1}^{p_i}m_{js}^i u_{M_s^i} + \sum\limits_{s=1}^{p_j}u_{M_s^j} + 1\right)}\times$$

$$\times\frac{\prod\limits_{j\in N}\Gamma\left(-\frac{\mu_j}{m_j} + \frac{1}{m_j}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{s=1}^{p_i}m_{js}^i u_{M_s^i} - \sum\limits_{s=1}^{p_j}u_{M_s^j}\right)}{\prod\limits_{j\in N}\Gamma\left(-\frac{\mu_j}{m_j} + \frac{1}{m_j}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{s=1}^{p_i}m_{js}^i u_{M_s^i} + 1\right)}\times$$

$$\times\sum_{q=1}^{n}\sum_{|I|=q}\sum_{j_1=1}^{p_{i_1}}\cdots\sum_{j_q=1}^{p_{i_q}}\begin{vmatrix} \delta_N^{i_1} + (-1)^{\delta_N^{i_1}}\frac{m_{i_1j_1}^{i_1}}{m_{i_1}} & (-1)^{\delta_N^{i_1}}\frac{m_{i_2j_1}^{i_1}}{m_{i_2}} & \dots & (-1)^{\delta_N^{i_1}}\frac{m_{i_qj_1}^{i_1}}{m_{i_q}} \\ (-1)^{\delta_N^{i_2}}\frac{m_{i_1j_2}^{i_2}}{m_{i_1}} & \delta_N^{i_2} + (-1)^{\delta_N^{i_2}}\frac{m_{i_2j_2}^{i_2}}{m_{i_2}} & \dots & (-1)^{\delta_N^{i_2}}\frac{m_{i_qj_2}^{i_2}}{m_{i_q}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{\delta_N^{i_q}}\frac{m_{i_1j_q}^{i_q}}{m_{i_1}} & (-1)^{\delta_N^{i_q}}\frac{m_{i_2j_q}^{i_q}}{m_{i_2}} & \dots & \delta_N^{i_q} + (-1)^{\delta_N^{i_q}}\frac{m_{i_qj_q}^{i_q}}{m_{i_q}} \end{vmatrix}\times$$

$$\times\prod_{j\in P\setminus I}\left(\frac{\mu_j}{m_j} - \frac{1}{m_j}\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{p_i}m_{js}^i u_{M_s^i}\right)\prod_{j\in N\setminus I}\left(-\frac{\mu_j}{m_j} + \frac{1}{m_j}\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{p_i}m_{js}^i u_{M_s^i} - \sum_{s=1}^{p_j}u_{M_s^j}\right)\times$$

$$\times u_{M_{j_1}^{i_1}}\cdot\ldots\cdot u_{M_{j_q}^{i_q}}$$

Интеграл (4) сходится при условиях

$$Re u_{M_s^i} > 0, s = 1,\dots,p_i, i = 1,\dots,n,$$

$$Re\left(\frac{\mu_j}{m_j} - \frac{1}{m_j}\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{p_i}m_{js}^i u_{M_s^i} + \sum_{s=1}^{p_j}u_{M_s^j} + 1\right) > 0, j\in P,$$

$$Re\left(-\frac{\mu_j}{m_j} + \frac{1}{m_j}\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{p_i}m_{js}^i u_{M_s^i} + 1\right) > 0, j\in N.$$

Доказательство. Покажем, что замена переменных (5) определяет биекцию пространства $\mathbb{R}_+^{|p|}$. Для этого рассмотрим высеченные октантом $\mathbb{R}_+^{|p|}$ куски плоскостей

$$\alpha_r = \alpha_{r_1,\dots,r_n} = \left\{\xi\in\mathbb{R}_+^{|p|} : \sum_{s=1}^{p_i}\xi_{M_s^i} = r_i, i = 1,\dots,n\right\}, r\in\mathbb{R}_+^n, \tag{6}$$

исчерпывающие октант $\mathbb{R}_+^{|p|}$. Образами плоскостей α_r при замене (5) являются куски плоскостей

$$\tilde{\alpha}_r = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^{|p|} : \sum_{s=1}^{p_i} \frac{x_{M_s^i}}{r_i \prod\limits_{j=1}^{n} (1+r_j)^{(-1)^{\delta_N^j} \frac{m_{js}^i}{m_j} - \delta_j^i \delta_P^j}} = 1, i = 1, \ldots, n \right\}. \tag{7}$$

Замена (5) инъективна на плоскостях (6), так как на них $\tau_j = 1 + r_j$, и поэтому замена сводится к растяжению. При разных r плоскости (6) не пересекаются, а их образы $\tilde{\alpha}_r$ не пересекаются в октанте $\mathbb{R}_+^{|p|}$. Действительно, плоскости (7) представляют собой пересечение плоскостей, заданных на "отрезках":

$$\tilde{\alpha}_r = \bigcap_{i=1}^{n} \left\{ x \in \mathbb{R}_+^{|p|} : \sum_{s=1}^{p_i} \frac{x_{M_s^i}}{\delta_i(r,s)} = 1 \right\};$$

величины $\delta_i(r,s)$ монотонно возрастают по $r_p \in (0;\infty)$, так как

$$\frac{\partial \delta_i(r,s)}{\partial r_i} = \prod_{j=1}^{n} (1+r_j)^{(-1)^{\delta_N^j} \frac{m_{js}^i}{m_j} - \delta_j^i \delta_P^j} \left(\frac{1 + \left(\delta_N^i + (-1)^{\delta_N^i} \frac{m_{is}^i}{m_i} \right)}{1 + r_j} \right) > 0.$$

Напомним, что ввиду (2) $m_{is}^i < m_i$. Следовательно, замена (5) инъективна. Образы плоскостей (6) при $r \in \mathbb{R}_+^n$ исчерпывают весь октант $\mathbb{R}_+^{|p|}$, поэтому замена (5) сюръективна.

В результате замены переменной (5) подынтегральное выражение в интеграле (4) без учета якобиана примет следующий вид:

$$y^{\mu}\left((-1)^{\delta_N^i} x_{M_k^i} \right) \cdot \prod_{i=1}^{n} \prod_{k=1}^{p_i} \left(x_{M_k^i} \right)^{u_{M_k^i} - 1} =$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \tau_j^{(-1)^{\delta_P^j} \frac{\mu_j}{m_j}} \prod_{i=1}^{n} \prod_{k=1}^{p_i} \left(\xi_{M_k^i} \prod_{s=1}^{n} \tau_s^{(-1)^{\delta_N^s} \frac{m_{sk}^i}{m_s} - \delta_s^i \delta_P^s} \right)^{u_{M_k^i} - 1} =$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \tau_j^{(-1)^{\delta_P^j} \frac{\mu_j}{m_j}} \left(\prod_{i=1}^{n} \prod_{k=1}^{p_i} \xi_{M_k^i}^{u_{M_k^i} - 1} \right) \prod_{i=1}^{n} \prod_{k=1}^{p_i} \prod_{s=1}^{n} \left(\tau_s^{(-1)^{\delta_N^s} \frac{m_{sk}^i}{m_s} - \delta_s^i \delta_P^s} \right)^{u_{M_k^i} - 1} =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \prod_{k=1}^{p_i} \xi_{M_k^i}^{u_{M_k^i} - 1} \prod_{j=1}^{n} \tau_j^{(-1)^{\delta_P^j} \frac{\mu_j}{m_j} + \frac{(-1)^{\delta_N^j}}{m_j} \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{s=1}^{p_i} m_{js}^i u_{M_s^i} - \frac{(-1)^{\delta_N^j}}{m_j} \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{s=1}^{p_i} m_{js}^i - \delta_P^j \sum\limits_{s=1}^{p_j} \left(u_{M_s^j} - 1 \right)}$$

С учетом формулы для якобиана преобразование Меллина выглядит так:

$$M[y^{\mu}](u) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^{|p|}} \frac{\prod\limits_{i=1}^{n} \prod\limits_{k=1}^{p_i} \xi_{M_k^i}^{u_{M_k^i} - 1} \cdot det \left(\delta_j^i \left(\delta_P^i + \delta_N^i \tau_i \right) + (-1)^{\delta_N^i} \sum\limits_{k=1}^{p_i} \frac{m_{jk}^i}{m_j} \xi_{M_k^i} \right)}{\prod\limits_{j=1}^{n} \tau_j^{(-1)^{\delta_N^j} \frac{\mu_j}{m_j} - (-1)^{\delta_N^j} \frac{1}{m_j} \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{s=1}^{p_i} m_{js}^i u_{M_s^i} + \delta_P^j \sum\limits_{s=1}^{p_j} u_{M_s^j} + 1}} d\xi.$$

Рассмотрим отдельно определитель:

$$det \left(\delta_j^i \left(\delta_P^i + \delta_N^i \tau_i \right) + (-1)^{\delta_N^i} \sum_{k=1}^{p_i} \frac{m_{jk}^i}{m_j} \xi_{M_k^i} \right) =$$

$$= det\left(\delta^i_j\left(1+\delta^i_N\sum_{k=1}^{p_i}\xi_{M^i_k}\right)+(-1)^{\delta^i_N}\sum_{k=1}^{p_i}\frac{m^i_{jk}}{m_j}\xi_{M^i_k}\right)=$$

$$= det\left(\delta^i_j+\sum_{k=1}^{p_i}\left(\delta^i_j\delta^i_N+(-1)^{\delta^i_N}\frac{m^i_{jk}}{m_j}\right)\xi_{M^i_k}\right)$$

Из линейной алгебры известно, что

$$det(E+A)=1+\sum_{q=1}^{n}\sum_{|I|=q}\begin{vmatrix} A^{i_1}_{i_1} & \dots & A^{i_1}_{i_q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{i_q}_{i_1} & \dots & A^{i_q}_{i_q}\end{vmatrix}$$

С учетом приведенной формулы определитель равен:

$$1+\sum_{q=1}^{n}\sum_{|I|=q}\begin{vmatrix} \sum\limits_{k=1}^{p_{i_1}}\left(\delta^{i_1}_N+\phi^{i_1}_{i_1k}\right)\xi_{M^{i_1}_k} & \sum\limits_{k=1}^{p_{i_1}}\phi^{i_1}_{i_2k}\xi_{M^{i_1}_k} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{p_{i_1}}\phi^{i_1}_{i_qk}\xi_{M^{i_1}_k} \\ \sum\limits_{k=1}^{p_{i_2}}\phi^{i_2}_{i_1k}\xi_{M^{i_2}_k} & \sum\limits_{k=1}^{p_{i_2}}\left(\delta^{i_2}_N+\phi^{i_2}_{i_2k}\right)\xi_{M^{i_2}_k} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{p_{i_2}}\phi^{i_2}_{i_qk}\xi_{M^{i_2}_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum\limits_{k=1}^{p_{i_q}}\phi^{i_q}_{i_1k}\xi_{M^{i_q}_k} & \sum\limits_{k=1}^{p_{i_2}}\phi^{i_q}_{i_2k}\xi_{M^{i_q}_k} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{p_{i_q}}\left(\delta^{i_q}_N+\phi^{i_q}_{i_qk}\right)\xi_{M^{i_q}_k}\end{vmatrix}=$$

$$=1+\sum_{q=1}^{n}\sum_{|I|=q}\sum_{j_1=1}^{p_{i_1}}\cdots\sum_{j_q=1}^{p_{i_q}}\begin{vmatrix} \delta^{i_1}_N+\phi^{i_1}_{i_1j_1} & \phi^{i_1}_{i_2j_1} & \dots & \phi^{i_1}_{i_qj_1} \\ \phi^{i_2}_{i_1j_2} & \delta^{i_2}_N+\phi^{i_2}_{i_2j_2} & \dots & \phi^{i_2}_{i_qj_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi^{i_q}_{i_1j_q} & \phi^{i_q}_{i_2j_q} & \dots & \delta^{i_q}_N+\phi^{i_q}_{i_qj_q}\end{vmatrix}\xi_{M^{i_1}_{j_1}}\cdot\ldots\cdot\xi_{M^{i_q}_{j_q}},$$

где $\phi^i_{jk}=(-1)^{\delta^i_N}\frac{m^i_{jk}}{m_j}$

С учетом полученного выражения для определителя преобразование Меллина можно записать в виде

$$M[y^\mu](u)=\int\limits_{\mathbb{R}^{|p|}_+}\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}\prod\limits_{k=1}^{p_i}\xi_{M^i_k}^{u_{M^i_k}-1}d\xi}{\prod\limits_{j=1}^{n}\tau_j^{(-1)^{\delta^j_N}\frac{\mu_j}{m_j}-(-1)^{\delta^j_N}\frac{1}{m_j}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{s=1}^{p_i}m^i_{js}u_{M^i_s}+\delta^j_P\sum\limits_{s=1}^{p_j}u_{M^j_s}+1}}+$$

$$+\sum_{q=1}^{n}\sum_{|I|=q}\sum_{j_1=1}^{p_{i_1}}\cdots\sum_{j_q=1}^{p_{i_q}}\begin{vmatrix} \delta^{i_1}_N+(-1)^{\delta^{i_1}_N}\frac{m^{i_1}_{i_1j_1}}{m_{i_1}} & (-1)^{\delta^{i_1}_N}\frac{m^{i_1}_{i_2j_1}}{m_{i_2}} & \dots & (-1)^{\delta^{i_1}_N}\frac{m^{i_1}_{i_qj_1}}{m_{i_q}} \\ (-1)^{\delta^{i_2}_N}\frac{m^{i_2}_{i_1j_2}}{m_{i_1}} & \delta^{i_2}_N+(-1)^{\delta^{i_2}_N}\frac{m^{i_2}_{i_2j_2}}{m_{i_2}} & \dots & (-1)^{\delta^{i_2}_N}\frac{m^{i_2}_{i_qj_2}}{m_{i_q}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{\delta^{i_q}_N}\frac{m^{i_q}_{i_1j_q}}{m_{i_1}} & (-1)^{\delta^{i_q}_N}\frac{m^{i_q}_{i_2j_q}}{m_{i_2}} & \dots & \delta^{i_q}_N+(-1)^{\delta^{i_q}_N}\frac{m^{i_q}_{i_qj_q}}{m_{i_q}}\end{vmatrix}\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^{|p|}_+}\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}\prod\limits_{k=1}^{p_i}\xi_{M^i_k}^{u_{M^i_k}-1}\xi_{M^{i_1}_{i_1}}\cdots\xi_{M^{i_q}_{j_q}}d\xi}{\prod\limits_{j=1}^{n}\tau_j^{(-1)^{\delta^j_N}\frac{\mu_j}{m_j}-(-1)^{\delta^j_N}\frac{1}{m_j}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{s=1}^{p_i}m^i_{js}u_{M^i_s}+\delta^j_P\sum\limits_{s=1}^{p_j}u_{M^i_s}+1}} \qquad (8)$$

Все интегралы в выражении (8) могут быть вычислены по формуле

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^q} \frac{\prod\limits_{i=1}^{q}\left(x_i^{u_i-1}dx_i\right)}{\left(1+x_1+\cdots+x_q\right)^s} = \frac{\Gamma(u_1)\cdot\ldots\cdot\Gamma(u_q)\Gamma(s-u_1-\cdots-u_q)}{\Gamma(s)}. \tag{9}$$

Интеграл (9) сходится при условии $\mathrm{Re}\, s > 0, \mathrm{Re}\, u_i > 0$, $i=1,\ldots,q$, поэтому интегралы в (8) сходятся при $\mathrm{Re}\, u_{M_s^i} > 0, s = 1,\ldots,p_i$, $i=1,\ldots,n$,
$\mathrm{Re}\left(\frac{\mu_j}{m_j} - \frac{1}{m_j}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{s=1}^{p_i} m_{js}^i u_{M_s^i} + \sum\limits_{s=1}^{p_j} u_{M_s^j} + 1\right) > 0$, $j \in P$,
$\mathrm{Re}\left(-\frac{\mu_j}{m_j} + \frac{1}{m_j}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{s=1}^{p_i} m_{js}^i u_{M_s^i} + 1\right) > 0$, $j \in N$.

Применяя формулу (9), получаем:

$$M[y^\mu](u) =$$

$$\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\prod\limits_{s=1}^{p_j}\Gamma\left(u_{M_s^j}\right)\cdot\Gamma\left((-1)^{\delta_N^j}\frac{\mu_j}{m_j} - (-1)^{\delta_N^j}\frac{1}{m_j}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{s=1}^{p_i} m_{js}^i u_{M_s^i} - \delta_N^j\sum\limits_{s=1}^{p_j} u_{M_s^i} + 1\right)}{\Gamma\left((-1)^{\delta_N^j}\frac{\mu_j}{m_j} - (-1)^{\delta_N^j}\frac{1}{m_j}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{s=1}^{p_i} m_{js}^i u_{M_s^i} + \delta_P^j\sum\limits_{s=1}^{p_j} u_{M_s^i} + 1\right)}\right) +$$

$$+\sum_{q=1}^{n}\sum_{|I|=q}\sum_{j_1=1}^{p_{i_1}}\cdots\sum_{j_q=1}^{p_{i_q}}\begin{vmatrix} \delta_N^{i_1} + (-1)^{\delta_N^{i_1}}\frac{m_{i_1j_1}^{i_1}}{m_{i_1}} & (-1)^{\delta_N^{i_1}}\frac{m_{i_2j_1}^{i_1}}{m_{i_2}} & \ldots & (-1)^{\delta_N^{i_1}}\frac{m_{i_qj_1}^{i_1}}{m_{i_q}} \\ (-1)^{\delta_N^{i_2}}\frac{m_{i_1j_2}^{i_2}}{m_{i_1}} & \delta_N^{i_2} + (-1)^{\delta_N^{i_2}}\frac{m_{i_2j_2}^{i_2}}{m_{i_2}} & \ldots & (-1)^{\delta_N^{i_2}}\frac{m_{i_qj_2}^{i_2}}{m_{i_q}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{\delta_N^{i_q}}\frac{m_{i_1j_q}^{i_q}}{m_{i_1}} & (-1)^{\delta_N^{i_q}}\frac{m_{i_2j_q}^{i_q}}{m_{i_2}} & \ldots & \delta_N^{i_q} + (-1)^{\delta_N^{i_q}}\frac{m_{i_qj_q}^{i_q}}{m_{i_q}} \end{vmatrix}\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\prod\limits_{s=1}^{p_j}\Gamma\left(u_{M_s^j}\right)\Gamma\left((-1)^{\delta_N^j}\frac{\mu_j}{m_j} - (-1)^{\delta_N^j}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{s=1}^{p_i}\frac{m_{js}^i}{m_j} u_{M_s^i} - \delta_N^j\sum\limits_{s=1}^{p_j} u_{M_s^i} - \delta_I^j + 1\right)}{\Gamma\left((-1)^{\delta_N^j}\frac{\mu_j}{m_j} - (-1)^{\delta_N^j}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{s=1}^{p_i}\frac{m_{js}^i}{m_j} u_{M_s^i} + \delta_P^j\sum\limits_{s=1}^{p_j} u_{M_s^i} + 1\right)}\right)\prod_{k=1}^{q} u_{M_{j_k}^{i_k}}$$

Рассмотрим произведения Гамма-функций:

$$\left(\prod_{i=1}^{n}\prod_{s=1}^{p_i}\Gamma\left(u_{M_s^i}\right)\cdot\prod_{k=1}^{q} u_{M_{j_k}^{i_k}}\right)\times$$

$$\times\frac{\prod\limits_{j\in P\setminus I}\Gamma\left(\frac{\mu_j}{m_j} - \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{s=1}^{p_i}\frac{m_{js}^i}{m_j}u_{M_s^i} + 1\right)\prod\limits_{j\in P\cap I}\Gamma\left(\frac{\mu_j}{m_j} - \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{s=1}^{p_i}\frac{m_{js}^i}{m_j}u_{M_s^i}\right)}{\prod\limits_{j\in P}\Gamma\left(\frac{\mu_j}{m_j} - \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{s=1}^{p_i}\frac{m_{js}^i}{m_j}u_{M_s^i} + \sum\limits_{s=1}^{p_j} u_{M_s^j} + 1\right)}\times$$

$$\times\frac{\prod\limits_{j\in N\setminus I}\Gamma\left(\frac{-\mu_j}{m_j} + \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{s=1}^{p_i}\frac{m_{js}^i}{m_j}u_{M_s^i} - \sum\limits_{s=1}^{p_j} u_{M_s^j} + 1\right)\prod\limits_{j\in N\cap I}\Gamma\left(\frac{-\mu_j}{m_j} + \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{s=1}^{p_i}\frac{m_{js}^i}{m_j}u_{M_s^i} - \sum\limits_{s=1}^{p_j} u_{M_s^j}\right)}{\prod\limits_{j\in N}\Gamma\left(-\frac{\mu_j}{m_j} + \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{s=1}^{p_i}\frac{m_{js}^i}{m_j}u_{M_s^i} + 1\right)} =$$

$$= \frac{\prod\limits_{i=1}^{n}\prod\limits_{s=1}^{p_i}\Gamma\left(u_{M_s^i}\right)\prod\limits_{j\in P}\Gamma\left(\frac{\mu_j}{m_j}-\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{s=1}^{p_i}\frac{m_{js}^i}{m_j}u_{M_s^i}\right)\prod\limits_{j\in N}\Gamma\left(\frac{-\mu_j}{m_j}+\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{s=1}^{p_i}\frac{m_{js}^i}{m_j}u_{M_s^i}-\sum\limits_{s=1}^{p_j}u_{M_s^j}\right)}{\prod\limits_{j\in P}\Gamma\left(\frac{\mu_j}{m_j}-\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{s=1}^{p_i}\frac{m_{js}^i}{m_j}u_{M_s^i}+\sum\limits_{s=1}^{p_j}u_{M_s^j}+1\right)\prod\limits_{j\in N}\Gamma\left(\frac{-\mu_j}{m_j}+\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{s=1}^{p_i}\frac{m_{js}^i}{m_j}u_{M_s^i}+1\right)}\times$$

$$\times\prod_{j\in P\setminus I}\left(\frac{\mu_j}{m_j}-\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{p_i}\frac{m_{js}^i}{m_j}u_{M_s^i}\right)\times\prod_{j\in N\setminus I}\left(\frac{-\mu_j}{m_j}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{p_i}\frac{m_{js}^i}{m_j}u_{M_s^i}\right)\prod_{k=1}^{n}m_{M_{j_k}^{i_k}}.$$

Вынося за скобки множитель, состоящий из Гамма-функций, получим следующее выражение для преобразования Меллина: $M[y^\mu](u)=$

$$= \frac{\prod\limits_{i=1}^{n}\prod\limits_{s=1}^{p_i}\Gamma\left(u_{M_s^i}\right)\prod\limits_{j\in P}\Gamma\left(\frac{\mu_j}{m_j}-\frac{1}{m_j}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{s=1}^{p_i}m_{js}^i u_{M_s^i}\right)}{\prod\limits_{j\in P}\Gamma\left(\frac{\mu_j}{m_j}-\frac{1}{m_j}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{s=1}^{p_i}m_{js}^i u_{M_s^i}+\sum\limits_{s=1}^{p_j}u_{M_s^j}+1\right)}\frac{\prod\limits_{j\in N}\Gamma\left(-\frac{\mu_j}{m_j}+\frac{1}{m_j}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{s=1}^{p_i}m_{js}^i u_{M_s^i}-\sum\limits_{s=1}^{p_j}u_{M_s^j}\right)}{\prod\limits_{j\in N}\Gamma\left(-\frac{\mu_j}{m_j}+\frac{1}{m_j}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{s=1}^{p_i}m_{js}^i u_{M_s^i}+1\right)}$$

$$\times\sum_{q=1}^{n}\sum_{|I|=q}\sum_{j_1=1}^{p_{i_1}}\cdots\sum_{j_q=1}^{p_{i_q}}\begin{vmatrix} \delta_N^{i_1}+(-1)^{\delta_N^{i_1}}\frac{m_{i_1j_1}^{i_1}}{m_{i_1}} & (-1)^{\delta_N^{i_1}}\frac{m_{i_2j_1}^{i_1}}{m_{i_2}} & \dots & (-1)^{\delta_N^{i_1}}\frac{m_{i_qj_1}^{i_1}}{m_{i_q}}\\ (-1)^{\delta_N^{i_2}}\frac{m_{i_1j_2}^{i_2}}{m_{i_1}} & \delta_N^{i_2}+(-1)^{\delta_N^{i_2}}\frac{m_{i_2j_2}^{i_2}}{m_{i_2}} & \dots & (-1)^{\delta_N^{i_2}}\frac{m_{i_qj_2}^{i_2}}{m_{i_q}}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ (-1)^{\delta_N^{i_q}}\frac{m_{i_1j_q}^{i_q}}{m_{i_1}} & (-1)^{\delta_N^{i_q}}\frac{m_{i_2j_q}^{i_q}}{m_{i_2}} & \dots & \delta_N^{i_q}+(-1)^{\delta_N^{i_q}}\frac{m_{i_qj_q}^{i_q}}{m_{i_q}} \end{vmatrix}\times$$

$$\times\prod_{j\in P\setminus I}\left(\frac{\mu_j}{m_j}-\frac{1}{m_j}\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{p_i}m_{js}^i u_{M_s^i}\right)\prod_{j\in N\setminus I}\left(-\frac{\mu_j}{m_j}+\frac{1}{m_j}\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{p_i}m_{js}^i u_{M_s^i}-\sum_{s=1}^{p_j}u_{M_s^j}\right)\times$$

$$\times u_{M_{j_1}^{i_1}}\cdot\ldots\cdot u_{M_{j_q}^{i_q}}$$

□

Таким образом, выполнив обратное преобразование Меллина и перейдя к введенным в начале статьи обозначениям, получаем следующее утверждение:

Теорема 2. *Функция* $y^\mu(\{(-1)^{\delta_N^1}x_{\lambda^1}\},\ldots,\{(-1)^{\delta_N^i}x_{\lambda^i}\},\ldots,\{(-1)^{\delta_N^n}x_{\lambda^n}\})$ *представляется следующим интегралом Меллина-Барнса:*

$$\int\limits_{\gamma+i\mathbb{R}^{|\Lambda|}}\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}\prod\limits_{\lambda\in\Lambda_i}\Gamma(u_\lambda)\prod\limits_{j\in P}\Gamma\left(\frac{\mu_j}{m_j}-\frac{1}{m_j}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{\lambda\in\Lambda_i}\lambda_j u_\lambda\right)}{\prod\limits_{j\in P}\Gamma\left(\frac{\mu_j}{m_j}-\frac{1}{m_j}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{\lambda\in\Lambda_i}\lambda_j u_\lambda+\sum\limits_{\lambda\in\Lambda_j}u_\lambda+1\right)}\frac{\prod\limits_{j\in N}\Gamma\left(-\frac{\mu_j}{m_j}+\frac{1}{m_j}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{\lambda\in\Lambda_i}\lambda_j u_\lambda-\sum\limits_{\lambda\in\Lambda_j}u_\lambda\right)}{\prod\limits_{j\in N}\Gamma\left(-\frac{\mu_j}{m_j}+\frac{1}{m_j}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{\lambda\in\Lambda_i}\lambda_j u_\lambda+1\right)}$$

$$\times\sum_{q=0}^{n}\sum_{|I|=q}\sum_{\tau^1\in\Lambda_{i_1}}\cdots\sum_{\tau^q\in\Lambda_{i_q}}\begin{vmatrix} \delta_N^{i_1}+(-1)^{\delta_N^{i_1}}\frac{\tau_{i_1}^1}{m_{i_1}} & (-1)^{\delta_N^{i_1}}\frac{\tau_{i_2}^1}{m_{i_2}} & \dots & (-1)^{\delta_N^{i_1}}\frac{\tau_{i_q}^1}{m_{i_q}}\\ (-1)^{\delta_N^{i_2}}\frac{\tau_{i_1}^2}{m_{i_1}} & \delta_N^{i_2}+(-1)^{\delta_N^{i_2}}\frac{\tau_{i_2}^2}{m_{i_2}} & \dots & (-1)^{\delta_N^{i_2}}\frac{\tau_{i_q}^2}{m_{i_q}}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ (-1)^{\delta_N^{i_q}}\frac{\tau_{i_1}^q}{m_{i_1}} & (-1)^{\delta_N^{i_q}}\frac{\tau_{i_2}^q}{m_{i_2}} & \dots & \delta_N^{i_q}+(-1)^{\delta_N^{i_q}}\frac{\tau_{i_q}^q}{m_{i_q}} \end{vmatrix}\times$$

$$\times \prod_{j\in P\setminus I}\left(\frac{\mu_j}{m_j}-\frac{1}{m_j}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\lambda\in\Lambda_i}\lambda_j u_\lambda\right)\prod_{j\in N\setminus I}\left(-\frac{\mu_j}{m_j}+\frac{1}{m_j}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\lambda\in\Lambda_i}\lambda_j u_\lambda-\sum_{\lambda\in\Lambda_j}u_\lambda\right)\times$$
$$\times\, u_{\tau^1}\cdot\ldots\cdot u_{\tau^q}\prod_{i=1}^{n}\prod_{\lambda\in\Lambda_i}x_\lambda^{-u_\lambda}du_\lambda$$

где точка γ выбирается из многогранника:

$$\left\{u: u_\lambda>0,\ \lambda\in\Lambda,\ (-1)^{\delta_N^j}\frac{\mu_j}{m_j}-(-1)^{\delta_N^j}\frac{1}{m_j}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\lambda\in\Lambda_i}\lambda_j u_\lambda-\delta_N^j\sum_{\lambda\in\Lambda_j}u_\lambda>0,\ j\in N\right\}.$$

Статья поддержана грантом Министерства образования и науки Российской Федерации (№ 1. 34.11).

Список литературы

[1] H.J.Mellin, Resolution de l'equation algebraique generale a l'aide de la fonction, *S.C.R. Acad. Sc.*, **172**(1921), 658–661.

[2] В.А.Степаненко, О решении системы n алгебраических уравнений от n неизвестных с помощью гипергеометрических функций, *Вестник КрасГУ*, **1**(2003), 35–48.

[3] И.А.Антипова, О мономиальной функции вектор-решения общей системы алгебраических уравнений, *Вестник КрасГУ*, **1**(2005), 106–110.

[4] И.С.Градштейн, И.М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, М., Физматгиз, 1963.

The Calculation of Monomial Functions for Solving the General System of Algebraic Equations

Vladimir R. Kulikov

This paper presents a representation for the monomial $y^\mu(x)$ the solution $y(x)=(y_1(x),\ldots,y_n(x))$ an n of general algebraic equations.

Keywords: Mellin transform, algebraic equation.