Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2012, 5(3), 388–392

УДК 512.544.2+512.74

Разложение трансвекции в элементарной группе

Владимир А. Койбаев*
Северо-Осетинский государственный университет им. К.Л.Хетагурова,
Ватутина, 46, Владикавказ, 362025,
Южный математический институт ВНЦ РАН,
Маркуса, 27, Владикавказ, 362027,
Россия

Получена 22.12.2011, окончательный вариант 06.01.2012, принята к печати 10.03.2012

Рассматривается элементарная сеть (элементарный ковер) $\sigma = (\sigma_{ij})$ порядка 3 аддитивных подгрупп коммутативного кольца, связанная с ней производная сеть ω, элементарная группа $E(\sigma)$ и сетевая группа $G(\omega)$. Получено разложение элементарной трансвекции $t_{ij}(\alpha)$ из $E(\sigma)$ в произведение матрицы из группы $\langle t_{ij}(\sigma_{ij}), t_{ji}(\sigma_{ji})\rangle$ и матрицы из $G(\omega)$.

Ключевые слова: сеть, ковер, элементарные сети, сетевая группа, ковровая группа, элементарная группа, трансвекция.

Элементарная сеть (ковер) $\sigma = (\sigma_{ij})$ называется допустимой, если элементарная группа $E(\sigma)$ не содержит новых элементарных трансвекций. Настоящая статья мотивирована вопросом В.М.Левчука (Коуровская тетрадь, вопрос 15.46) о том, что необходимым и достаточным условием допустимости элементарной сети σ является допустимость всех пар $(\sigma_{ij}, \sigma_{ji})$. С элементарной сетью $\sigma = (\sigma_{ij}), \quad 1 \leqslant i, j \leqslant 3$ порядка 3 связана элементарная группа $E(\sigma)$, производная сеть $\omega = \sigma^1$ и сетевая группа $G(\omega)$. В настоящей статье получено разложение элементарной трансвекции $t_{ij}(\alpha)$ из $E(\sigma)$ в произведение матрицы из группы $\langle t_{ij}(\sigma_{ij}), t_{ji}(\sigma_{ji})\rangle$ и матрицы из $G(\omega)$.

Мы пользуемся следующим стандартным набором определений и обозначений. Пусть Λ — произвольное коммутативное кольцо с единицей, n — натуральное число. Система $\sigma = (\sigma_{ij}), \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n$, аддитивных подгрупп кольца Λ для которой $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ при всех значениях индексов i, r, j называется сетью или ковром (над кольцом Λ порядка n), а связанные с ними группы — сетевыми, ковровыми (см. [1–7]). В данной работе мы используем первый термин. Сеть, рассматриваемая без диагонали, называется элементарной сетью (элементарный ковер [3, 4], вопрос 15.46).

Если A, B — подгруппы аддитивной группы кольца Λ, то через AB мы обозначаем подгруппу аддитивной группы кольца Λ, порожденную всеми произведениями $ab, a \in A, b \in B$.

Пусть e — единичная матрица порядка n, e_{ij} — матрица, у которой на позиции (i, j) стоит 1, а на остальных местах нули. Если $\alpha \in \Lambda$, то через $t_{ij}(\alpha) = e + \alpha e_{ij}$ обозначается элементарная трансвекция. Положим

$$t_{ij}(A) = \{t_{ij}(\alpha) : \alpha \in A\}.$$

Для элементарной сети (или сети) σ через $E(\sigma)$ обозначается элементарная группа:

$$E(\sigma) = \langle t_{ij}(\sigma_{ij}) : 1 \leqslant i \neq j \leqslant n\rangle.$$

В настоящей работе рассматривается элементарная сеть σ порядка 3

$$\sigma = \begin{pmatrix} * & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & * & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & * \end{pmatrix}.$$

*koibaev-K1@yandex.ru

В [5] (см. также [7]) для элементарной сети σ мы определили производную сеть $\omega_\sigma = \omega = (\omega_{ij})$, которая имеет вид

$$\omega_\sigma = \omega = (\omega_{ij}) = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \sigma_{13}\sigma_{32} & \sigma_{12}\sigma_{23} \\ \sigma_{13}\sigma_{32} & \omega_{22} & \sigma_{21}\sigma_{13} \\ \sigma_{32}\sigma_{21} & \sigma_{31}\sigma_{12} & \omega_{33} \end{pmatrix},$$

где

$$\omega_{11} = \omega_{22} = \omega_{33} = \gamma_{12} \cap \gamma_{13} \cap \gamma_{23},$$

и

$$\gamma_{ij} = \sum_{m=1}^{\infty} (\sigma_{ji}\sigma_{ij})^m.$$

Для элементарной группы $E(\sigma)$ степени 3 справедлива (см.[6, 7]) факторизация :

$$E(\sigma) = \Gamma_{12}\Gamma_{13}\Gamma_{23}E(\omega), \tag{1}$$

где

$$\Gamma_{ij} = \langle t_{ij}(\sigma_{ij}), t_{ji}(\sigma_{ji}) \rangle.$$

Через $G(\omega)$ обозначается сетевая (ковровая) группа, определенная для сети ω [1, 2].

Основным результатом статьи является следующая теорема, где мы (дабы не загружать читателя громоздкими формулировками) даем разложение элементарной трансвекции $t_{12}(\alpha)$ из $E(\sigma)$ (из которого очевидно, как выглядит разложение произвольной трансвекции $t_{ij}(\alpha)$ из $E(\sigma)$).

Теорема. *Пусть $t_{12}(\alpha) \in E(\sigma)$. Тогда*

$$t_{12}(\alpha) = ah,$$

где $a \in \Gamma_{12}$, $h \in \Gamma_{13}\Gamma_{23}E(\omega)$, причем $h = bcg$, где $b \in \Gamma_{13} \cap G(\omega)$, $c \in \Gamma_{23} \cap G(\omega)$, $g \in E(\omega)$, и для матрицы

$$a = \begin{pmatrix} 1 + a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & 1 + a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

мы имеем $a_{11}, a_{22} \in \omega_{11}$, $a_{21} \in \omega_{21}$, $\alpha - a_{12} \in \omega_{12}$.

Следствие. *Если σ — элементарная сеть порядка 3 и пара $(\sigma_{ij}, \sigma_{ji})$ дополняется до (полной) сети, то из того, что $t_{ij}(\alpha) \in E(\sigma)$, следует, что $\alpha \in \sigma_{ij}$.*

Из предложения 6 [5] вытекает следующее утверждение (как обычно $\sigma = (\sigma_{ij})$ — элементарная сеть).

Предложение 1. *Если матрица $(\delta_{ij} + x_{ij})$ (δ – символ Кронекера) содержится в группе $E(\sigma)$, то*

$$\omega_{ir}x_{rj} \subseteq \omega_{ij}, \quad x_{jr}\omega_{ri} \subseteq \omega_{ji}$$

для любых i, r, j.

Лемма 1. *Пусть $t_{12}(\alpha) \in E(\sigma)$. Тогда*

$$t_{12}(\alpha) = ah,$$

где $a \in \Gamma_{12}$, $h \in \Gamma_{13}\Gamma_{23}E(\omega)$ и матрица h имеет вид

$$h = \begin{pmatrix} 1 + h_{11} & h_{12} & 0 \\ h_{21} & 1 + h_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Доказательство вытекает из (1).

Согласно лемме 1 для доказательства теоремы нам нужно исследовать матрицу h вида (2), где $h \in \Gamma_{13}\Gamma_{23}E(\omega)$.

В дальнейшем мы рассматриваем матрицы: $b \in \Gamma_{13}, c \in \Gamma_{23}, \quad D = bc$,

$$b = \begin{pmatrix} 1+b_{11} & 0 & b_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ b_{31} & 0 & 1+b_{33} \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+c_{22} & c_{23} \\ 0 & c_{32} & 1+c_{33} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1+b_{11} & b_{13}c_{32} & b_{13}(1+c_{33}) \\ 0 & 1+c_{22} & c_{23} \\ b_{31} & (1+b_{33})c_{32} & (1+b_{33})(1+c_{33}) \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1+b_{33} & 0 & -b_{13} \\ c_{23}b_{31} & 1+c_{33} & -c_{23}(1+b_{11}) \\ -(1+c_{22})b_{31} & -c_{32} & (1+c_{22})(1+b_{11}) \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Предложение 2. *Пусть $h = bcg = Dg$, где $b \in \Gamma_{13}, c \in \Gamma_{23}, g \in E(\omega), \quad D = bc$ (см (3) - (5)). Если матрица h имеет вид (2), то*

$$h_{12} \in \omega_{12}, \quad h_{21} \in \omega_{21}, \quad b_{13} \in \omega_{13}, \quad b_{31} \in \omega_{31}, \quad c_{23} \in \omega_{23}, \quad c_{32} \in \omega_{32}, \tag{6}$$

далее, следующие элементы

$$h_{11} - b_{11}, \quad h_{22} - b_{33}, \quad h_{22} - c_{22}, \quad h_{11} - c_{33}, \quad c_{33} - b_{11}, \quad c_{22} - b_{33} \tag{7}$$

содержатся в $\omega_{11} = \omega_{22} = \omega_{33}$.

Доказательство. Положим $Q = (q_{ij}) = D^{-1}h, \quad P = (p_{ij}) = h^{-1}D$. Тогда $P, Q \in E(\omega)$ (на самом деле $Q = g, \quad P = g^{-1}$).

Доказательство разделим на этапы.

а)Так как ω является сетью, то из включения $Q \in E(\omega)$ следует, что $q_{ij} \in \delta_{ij} + \omega_{ij}$, а потому мы имеем включения

$$q_{11} = (1+b_{33})(1+h_{11}) \in 1+\omega_{11}, \quad q_{12} = (1+b_{33})h_{12} \in \omega_{12}, \quad q_{13} = -b_{13} \in \omega_{13},$$

$$q_{21} = c_{23}b_{31}(1+h_{11}) + (1+c_{33})h_{21} \in \omega_{21},$$

$$q_{22} = c_{23}b_{31}h_{12} + (1+c_{33})(1+h_{22}) \in 1+\omega_{22}, \quad q_{23} = -c_{23}(1+b_{11}) \in \omega_{23},$$

$$q_{31} = -(1+c_{22})b_{31}(1+h_{11}) - c_{32}h_{21} \in \omega_{31},$$

$$q_{32} = -(1+c_{22})b_{31}h_{12} - c_{32}(1+h_{22}) \in \omega_{32}, \quad q_{33} = (1+c_{22})(1+b_{11}) \in 1+\omega_{33}.$$

Отсюда $b_{13} \in \omega_{13}$. Далее, согласно предложению 1

$$q_{21}(1+c_{22}) \in \omega_{21}, \quad q_{31}c_{23} \in \omega_{21}.$$

Но так как $\det c = 1$, то из приведенных формул следует, что

$$h_{21} = h_{21}(\det c) = q_{21}(1+c_{22}) + q_{31}c_{23},$$

а потому $h_{21} \in \omega_{21}$. Аналогично, согласно предложению 1

$$q_{32}(1+h_{11}) \in \omega_{32}, \quad q_{31}h_{12} \in \omega_{32}.$$

Но так как $\det h = 1$, то $c_{32} = q_{31}h_{12} - q_{32}(1 + h_{11})$, а потому $c_{32} \in \omega_{32}$.

б) Из включения $P \in E(\omega)$ мы имеем

$$p_{11} = (1 + h_{22})(1 + b_{11}) \in 1 + \omega_{11}, \quad p_{12} = (1 + h_{22})b_{13}c_{32} - h_{12}(1 + c_{22}) \in \omega_{12},$$

$$p_{13} = (1 + h_{22})b_{13}(1 + c_{33}) - h_{12}c_{23} \in \omega_{13}, \quad p_{21} = -h_{21}(1 + b_{11}) \in \omega_{21},$$

$$p_{22} = -h_{21}b_{13}c_{32} + (1 + h_{11})(1 + c_{22}) \in 1 + \omega_{22},$$

$$p_{23} = -h_{21}b_{13}(1 + c_{33}) + (1 + h_{11})c_{23} \in \omega_{23}, \quad p_{31} = b_{31} \in \omega_{31},$$

$$p_{32} = (1 + b_{33})c_{32} \in \omega_{32}, \quad p_{33} = (1 + b_{33})(1 + c_{33}) \in 1 + \omega_{33}.$$

Отсюда $b_{31} \in \omega_{31}$. Далее, согласно предложению 1

$$p_{23}(1 + h_{22}) \in \omega_{23}, \quad p_{13}h_{21} \in \omega_{23}.$$

Но так как $\det h = 1$, то из приведенных формул следует, что

$$c_{23} = c_{23}(\det h) = p_{23}(1 + h_{22}) + p_{13}h_{21},$$

а потому $c_{23} \in \omega_{23}$. Аналогично, согласно предложению 1

$$p_{12}(1 + c_{33}) \in \omega_{12}, \quad p_{13}c_{32} \in \omega_{12}.$$

Но так как $\det c = 1$, то $h_{12} = p_{13}c_{32} - p_{12}(1 + c_{33})$, а потому $h_{12} \in \omega_{12}$.

Таким образом, пункты а) и б) доказывают включения (6). Докажем справедливость включений (7).

Так как $\det h = 1$, то $1 + b_{11} = p_{11}(1 + h_{11}) + p_{21}h_{12}$. Но согласно предложению 1 имеем $p_{11}(1 + h_{11}) \in 1 + \omega_{11} + h_{11}, \quad p_{21}h_{12} \in \omega_{11}$, а потому $h_{11} - b_{11} \in \omega_{11}$.

Аналогично, так как $1 + b_{33} = q_{11}(1 + h_{22}) - h_{21}q_{12}$, то $h_{22} - b_{33} \in \omega_{11}$.

Далее, так как $\det b = 1, b_{31} \in \omega_{31}, b_{13} \in \omega_{13}$, то $(1 + b_{11})(1 + b_{33}) \in 1 + \omega_{33}$. Так как

$$q_{33} = (1 + c_{22})(1 + b_{11}) \in 1 + \omega_{33},$$

то

$$(1 + c_{22})(1 + b_{11})(1 + b_{33}) \in 1 + b_{33} + \omega_{33}.$$

Следовательно, $c_{22} - b_{33} \in \omega_{33}$.

Аналогично, так как

$$p_{33} = (1 + b_{33})(1 + c_{33}) \in 1 + \omega_{33},$$

то, рассматривая $p_{33}(1 + b_{11}) \in 1 + b_{11} + \omega_{33}$, мы получим $c_{33} - b_{11} \in \omega_{33}$.

Из доказанных включений $h_{11} - b_{11} \in \omega_{11}, \quad h_{22} - b_{33} \in \omega_{11}, \quad c_{33} - b_{11} \in \omega_{33}, \quad c_{22} - b_{33} \in \omega_{33}$ вытекают включения $h_{22} - c_{22} \in \omega_{22}, \quad h_{11} - c_{33} \in \omega_{33}$. □

Следствие 1. *Если $t_{12}(\alpha) \in \Gamma_{13}\Gamma_{23}E(\omega)$, то $\alpha \in \omega_{12} \subseteq \sigma_{12}$.*

Следствие 2. *В условиях предложения 2 элементы $h_{11}, \quad h_{22}, \quad b_{11}, \quad b_{33}, \quad c_{22}, \quad c_{33}$ содержатся в $\gamma_{13} \cap \gamma_{23}$.*

Доказательство. Согласно предложению 4 [5] $b_{11} \in \gamma_{13}, \quad c_{33} \in \gamma_{23}$, но согласно предложению 2 $(c_{33} - b_{11}) \in \omega_{11}$, причем $\omega_{11} \subseteq \gamma_{13} \cap \gamma_{23}$. Отсюда $c_{33} \in \gamma_{13}, \quad b_{11} \in \gamma_{23}$, а потому $b_{11}, c_{33} \in \gamma_{13} \cap \gamma_{23}$. Аналогично из предложения 2 вытекают включения $b_{33}, c_{22} \in \gamma_{13} \cap \gamma_{23}$. Теперь из доказанного и предложения 2 следуют включения $h_{11}, h_{22} \in \gamma_{13} \cap \gamma_{23}$. □

Замечание. *Так как $(\gamma_{13} \cap \gamma_{23})^2 \subseteq \omega_{11}$, то из того, что $\det b = 1$ и следствия 2 следует включение $(b_{11} + b_{33}) \in \omega_{11}$ (аналогично и для матриц c и h).*

Доказательство теоремы. Согласно предложению 2 для доказательства теоремы нам достаточно доказать включения $a_{11}, a_{22}, h_{11}, h_{22}, b_{11}, b_{33}, c_{22}, c_{33} \in \omega_{11} = \omega_{22} = \omega_{33}, \quad a_{21} \in \omega_{21}, \quad \alpha - a_{12} \in \omega_{12}$.

Из предложения 2 и следствия 2 мы имеем $h_{11}, h_{22} \in \gamma_{13} \cap \gamma_{23}, \quad h_{12} \in \omega_{12}, \quad h_{21} \in \omega_{21}$. Далее,

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & 1 + a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & 1 + h_{22} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Отсюда $a_{21} = -h_{21} \in \omega_{21}, \quad a_{22} = h_{11} \in \gamma_{13} \cap \gamma_{23}$, но согласно предложению 4 [5] $a_{22} \in \gamma_{12}$, а потому a_{22}, а вместе с ним и h_{11} содержатся в ω_{11}. Далее, так как $\det h = 1$, то в силу последнего замечания мы имеем $h_{22} \in \omega_{11}$. Тогда из предложения 2 следует, что элементы $b_{11}, \quad b_{33}, \quad c_{22}, \quad c_{33}$ также содержатся в ω_{11}.

Нам осталось доказать включение $a_{11} \in \omega_{11}$. Так как $\det a = 1$, то

$$a_{11} + a_{22} + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0. \tag{9}$$

По доказанному $a_{22} \in \omega_{11}$. Тогда из предложения 1 имеем $a_{11}a_{22} \in \omega_{11}$. Далее, $a_{21} \in \omega_{21}$, тогда из предложения 1 мы имеем $a_{12}a_{21} \in \omega_{11}$. Теперь из (9) мы имеем $a_{11} \in \omega_{11}$.

Наконец, из (8) имеем $\alpha = (1+a_{11})h_{12}+a_{12}(1+h_{22})$. Согласно уже доказанному $a_{11}, h_{22} \in \omega_{11}, \quad h_{12} \in \omega_{12}$, тогда согласно предложению 1 мы имеем $(1 + a_{11})h_{12} \in \omega_{12}, \quad a_{12}h_{22} \in \omega_{12}$, следовательно, $\alpha - a_{12} \in \omega_{12}$. □

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 10-01-00324).

Список литературы

[1] З.И.Боревич, О подгруппах линейных групп, богатых трансвекциями, *Зап. науч. семинаров ЛОМИ*, **75**(1978), 22–31.

[2] М.И.Каргаполов, Ю.И.Мерзляков, Основы теории групп, М., Наука, 1982.

[3] В.М.Левчук, Замечание к теореме Л. Диксона, *Алгебра и логика*, **22**(1983), №5, 504–517.

[4] Нерешенные вопросы теории групп. Коуровская тетрадь, Издание 17-е. Новосибирск, 2010.

[5] В.А.Койбаев, Сети, ассоциированные с элементарными сетями, *Владикавказский мат. журн.*, **12**(2010), вып. 4, 39–43.

[6] В.А.Койбаев, Элементарные сети в линейных группах, *Труды Института математики и механики УрО РАН*, **17**(2011), №4, 134–141.

[7] Я.Н.Нужин, Факторизация ковровых подгрупп групп Шевалле над коммутативными кольцами, *Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ.*, **4**(2011), вып.4 , 527–535.

Decomposition of Transvection in Elementary Group

Vladimir A. Koibaev

The elementary net (elementary carpet) $\sigma = (\sigma_{ij})$ an order 3 of additive subgroups commutative ring is considered, the derivative net ω connected with it, elementary group $E(\sigma)$ and net group $G(\omega)$. It is proved that a elementary transvection $t_{ij}(\alpha)$ from $E(\sigma)$ is a product of a matrix from group $\langle t_{ij}(\sigma_{ij}), t_{ji}(\sigma_{ji})\rangle$ and matrixes from $G(\omega)$.

Keywords: net, carpet, elementary nets, net group, carpet group, elementary group, transvection.