Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Институт космических и информационных технологий
Кафедра прикладной математики и компьютерной безопасности

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
_______ А.А. Кытманов
подпись инициалы, фамилия
« 14 » 06 2016г.

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

01.03.04 – Прикладная математика
код – наименование направления

Многомерное фундаментальное соответствие для
преобразования Меллина рациональных функций

Руководитель ______ 14.06.2016 профессор, д.ф-м.н. И.А. Антипова
подпись, дата должность, ученая степень инициалы, фамилия

Выпускник ______ 14.06.2016 А.А. Дурновцева
подпись, дата инициалы, фамилия

Красноярск 2016

РЕФЕРАТ

Выпускная квалификационная работа по теме «Фундаментальное соответствие для многомерного преобразования Меллина рациональных функций» содержит 31 страницу текстового документа, 11 использованных источников.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МЕЛЛИНА, РАЦИОНАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ, АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ, ГАРМОНИЧЕСКАЯ СУММА, ГАММА-ФУНКЦИЯ, ВЫЧЕТ

Целью работы является развитие многомерной техники преобразований Меллина, широко применяемой в асимптотическом анализе. В результате сформулировано фундаментальное соответствие для преобразования Меллина рациональной функции многих переменных специального вида.

Работа носит теоретический характер, при этом развиваемый аппарат многомерных преобразований Меллина может быть востребован и в прикладных задачах.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Широко известно, что преобразования Меллина являются мощным инструментом исследований в теории специальных функций и теории чисел. Кроме того, они широко применяются в асимптотическом анализе, в частности, для оценки сумм вида

$$G(x) = \sum_k \lambda_k g(\mu_k x) \tag{1}$$

при $x \to 0$ или $x \to \infty$. Такие суммы называются гармоническими, так как они представляют собой линейную комбинацию "гармоник" базовой функции $g(x)$. Если базовая функция $g(x) = e^{\pm ix}$, то гармоническая сумма есть в точности ряд Фурье. Суммы вида (1) аппроксимируют комбинаторные суммы, возникающие в анализе алгоритмов и структур данных (см., например, [9], [7]).

В основе этой техники лежит фундаментальное соответствие между асимптотическими разложениями функции-оригинала в нуле и бесконечности и особенностями преобразования Меллина этой функции [8].

Прямое преобразование Меллина функции $f(x)$, определенной на положительном луче вещественной прямой, выражается интегралом

$$M[f](z) = \int_0^\infty f(x) x^{z-1}\, dx. \tag{2}$$

Если его применить к функции (1), то в результате выделится так называемый амплитудно-частотный множитель, представляющий собой обобщенный ряд Дирихле, и преобразование Меллина базовой функции $g(x)$. А именно,

$$M[G](z) = \Lambda(z) M[g](z),$$

где

$$\Lambda(z) = \sum_k \lambda_k \mu_k^{-z}.$$

Проиллюстрируем применение фундаментального соответствия к исследованию асимптотики гармонической суммы вида

$$\Theta_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2x^2}}{n}.$$

Это модифицированная тэта-функция, которая возникает в анализе метода пузырька [9]. Ее преобразование Меллина равно

$$M[\Theta_1](z) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z+1).$$

Дзета-функция Римана $\zeta(z+1)$ имеет единственный простой полюс в точке $z = 0$, а гамма-функция Эйлера $\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)$ имеет простые полюсы в нуле и во всех четных отрицательных целых точках. Таким образом, функция $M[\Theta_1](z)$ имеет двукратный полюс в нуле и простые полюсы во всех четных отрицательных целых точках. Эта информация о полюсах преобразования Меллина позволяет восстановить асимптотическое разложение функции-оригинала:

$$\Theta_1(x) = -\log x + \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{240}x^4 + \dots,$$

здесь γ— постоянная Эйлера, слагаемые $-\log x + \frac{\gamma}{2}$ соответствуют главной части разложения Лорана в нуле функции $M[\Theta_1](z)$:

$$\frac{1}{z^2} + \frac{\gamma}{2z},$$

а осталые слагаемые восстанавливаются по главным частям разложений Лорана функции $M[\Theta_1](z)$ в точках $z = -2, -4, \dots$:

$$\frac{1}{12}\frac{1}{z+2}, \qquad \frac{1}{240}\frac{1}{z+4}, \dots.$$

Отдельно следует отметить, применения фундаментального соответствия в теоретической физики, в частности, в задачах квантовой электродинамики [6].

Настоящая работа нацелена на развитие многомерной теории преобразований Меллина, в частности, на формирование фундаментального соответствия для преобразования Меллина рациональной функций $\frac{1}{f}$, где f— это полином нескольких переменных. Область аналитичности многомерного прямого преобразования Меллина, а также его мероморфное продолжение исследовались ранее в работах [2], [11].

Основным результатом бакалаврской работы является Теорема 2, в которой сформировано фундаментальное соответствие для преобразования Меллина рациональной функции $\frac{1}{f}$, где f— полином многих переменных специального вида. В частности, каждой вершине v многогранника Ньютона N_f полинома f сопоставлено разложение Лорана-Пюизо функции $\frac{1}{f}$ и набор полярных гиперплоскостей преобразования Меллина $M[1/f](z)$, "отвечающий" за это разложение.

1 Преобразование Меллина

Введем одномерные интегральные преобразования Меллина.

Определение 1. Прямым преобразованием Меллина функции $f(x)$, определенной на полуоси $x \geqslant 0$, называется функция

$$M[f](z) = \int_0^{\infty} f(x)x^{z-1}\, dx, \tag{3}$$

здесь $x^z = e^{zlnx},\ x > 0$.

Определение 2. Обратное преобразование Меллина функции $F(z)$, заданной на прямой $a + i\mathbb{R}(a \in \mathbb{R}$ фиксировано), есть интеграл

$$M^{-1}[F](x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(z)x^{-z}\, dz.$$

Определение 3. Фундаментальной полосой преобразования Меллина называется наибольшая открытая полоса $\{\alpha < \Re z < \beta\}$, в которой интеграл (3) сходится.

Существует связь между асимптотикой функции $f(x)$ в 0 и в ∞ и областью аналитичности ее преобразования Меллина.

Фундаментальную полосу можно найти следующим образом. Пусть функция $f(x)$ непрерывна при $x > 0$ и удовлетворяет оценкам:

$$|f(x)| \leqslant C_1 x^{-\alpha}, \quad 0 < x \leqslant 1, \qquad |f(x)| \leqslant C_2 x^{-\beta}, \quad 1 \leqslant x < \infty, \tag{4}$$

где $-\alpha > -\beta$. Тогда преобразование Меллина (3) является функцией, голоморфной в полосе $\alpha < \Re z < \beta$ [5].

Пример 1. Рассмотрим функцию $f(x) = e^{-x}$. Для нее имеем

$$e^{-x} \sim 1,\ x \to 0+0,\ e^{-x} \leqslant Cx^{-\beta},\ \forall\beta > 0,\ 1 \leqslant x < +\infty.$$

Фундаментальная полоса задается неравенством $0 < \Re z < +\infty$. Преобразование Меллина $M[e^{-x}](z) = \Gamma(z)$ голоморфно в полосе $0 < \Re z < +\infty$.

Пример 2. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{1+x}$. Справедливы оценки:

$$\frac{1}{1+x} \leqslant 1, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad \frac{1}{1+x} \leqslant x^{-1}, \quad 1 \leqslant x < \infty.$$

Таким образом, фундаментальная полоса определяется условием: $0 < \Re z < 1$. Преобразование Меллина выражается функцией

$$M[f(x)](z) = \int\limits_0^\infty \frac{x^{z-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin \pi z} = \Gamma(z)\Gamma(1-z).$$

Многомерные преобразования Меллина впервые упоминались в работе Меллина [10]. Определим их:

Определение 4. Прямым преобразованием Меллина функции $\Phi(x)$, заданной в ортанте $\mathbb{R}^n_+$, называется интеграл вида:

$$M[\Phi](z) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \Phi(x) x^{z-I}\, dx, \quad \text{где} \quad x^{z-I} = {x_1}^{z_1-1} \cdot \ldots \cdot {x_n}^{z_n-1}.$$

Определение 5. Обратным преобразованием Меллина функции $F(z)$, заданной в мнимом(вертикальном) подпространстве $a + i\mathbb{R}^n$, где a — фиксированный вектор из $\mathbb{R}^n$, называется интеграл вида:

$$M^{-1}[F](x) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{a+i\mathbb{R}^n} F(z) x^{-z}\, dz, \quad \text{где} \quad x^{-z} = {x_1}^{-z_1} \cdot \ldots \cdot {x_n}^{-z_n}.$$

Определим классы функций (векторные пространства), которые переводятся друг в друга прямым и обратным преобразованиями Меллина (см. [1]). Рассмотрим выпуклые области $U \subset \mathbb{R}^n$, $\Theta \subset \mathbb{R}^n$, причем Θ ограничена и $0 \in \Theta$. Область U порождает в $\mathbb{C}^n$ трубчатую область $U + i\mathbb{R}^n$, а Θ — секториальную область S_Θ. Секториальные области будем брать в множестве $\mathcal{S} = \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n$, которое есть риманова область над комплексным тором $(\mathbb{C} \setminus 0)^n$. Точки $x = (r, \theta) \in \mathcal{S}(r \in \mathbb{R}^n_+, \theta \in \mathbb{R}^n)$ проектируются в векторы

$$re^{i\theta} = (r_1 e^{i\theta_1}, \ldots, r_n e^{i\theta_n}) \in (\mathbb{C} \setminus 0)^n.$$

Класс функций M^U_Θ — это векторное пространство функций $\Phi(x)$, голоморфных в какой-то секториальной области

$$S_{k\Theta} = \{x \in \mathcal{S} : \arg x \in k\Theta\},\ k > 1,$$

$k\Theta$ — гомотетия Θ с коэфициентом k, и удовлетворяющих условию

$$|\Phi(x)| \leqslant C(a)|x^{-a}|,\ a \in U,\ x \in S_{k\Theta}.$$

Класс функций W^Θ_U — это векторное пространство функций $F(z)$, голоморфных в трубчатой области $U + i\mathbb{R}^n$ и убывающих в ней экспоненциально по v:

$$|F(u + iv)| \leqslant K(u)e^{-kH_\Theta(v)},\ k > 1,$$

$H_\theta(v) := \sup_{\theta\in\Theta}\langle\theta, v\rangle$ — это опорная функция множества Θ. Если множество Θ состоит из одной точки θ^0, то опорной функцией будет линейная функция вида

$$H_\Theta(v) = \theta^0_1 v_1 + \ldots + \theta^0_n v_n.$$

Если $\overline{\Theta}$ есть выпуклый многогранник, то опорная функция будет кусочно-линейной. При фиксированном v

$$\sup_{\theta\in\Theta}\langle\theta, v\rangle$$

достигается в некоторой вершине многогранника $\overline{\Theta}$.

2 Фундаментальное соответствие в одномерном случае

Имеет место соответствие между асимптотическими разложениями функции $f(x)$ в 0 и в ∞ и полюсами ее преобразования Меллина в левой и правой полуплоскостях. Каждое слагаемое асимптотического разложения функции $f(x)$ ассоциируется с полюсом функции $M[f](z)$. Введем понятие асимптотического разложения функции $f(x)$. Пусть $M \subset \mathbb{C}$, a — предельная точка множества M.

Определение 6. Последовательность функций $\varphi_n(x),\ x \in M$ называется асимптотической последовательностью (при $x \to a, x \in M$), если для любого n

$$\varphi_{n+1}(x) = o(\varphi_n(x)),\ x \to a,\ x \in M.$$

Определение 7. Пусть $\varphi_n(x)$ — асимптотическая последовательность при $x \to a,\ x \in M$. Формальный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x),\ a_n = const,$$

называется асимптотическим разложением функции $f(x)$, если для любого $N \geqslant 0$

$$f(x) - \sum_{n=0}^{N} a_n \varphi_n(x) = o(\varphi_N),\ x \to a,\ x \in M.$$

Для асимптотического разложения функции $f(x)$ используется запись

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x),\ x \to a,\ x \in M.$$

Далее опишем фундаментальное соответствие между асимптотическим разложением функции $f(x)$ в 0 и в ∞ и ее преобразованием Меллина в правой и в левой полуплоскостях.

Пусть функция $f(x)$ имеет преобразование Меллина $M[f](z)$ с фундаментальной полосой $\alpha < \Re z < \beta$. Предположим, что $f(x)$ имеет следующие асимптотические разложения:

$$f(x) \sim \sum_{k>0} c_k x^{\alpha_k},\ x \to 0, \tag{5}$$

$$f(x) \sim \sum_{k>0} d_k x^{\beta_k},\ x \to \infty, \tag{6}$$

где $\alpha_k \to +\infty$(возрастающая), $\beta_k \to -\infty$(убывающая).

Тогда преобразование Меллина $M[f](z)$ есть мероморфная функция во всей комплексной плоскости с простыми полюсами в точках $-\alpha_k$ и $-\beta_k$:

$$M[f](z) \sim \frac{c_k}{z+\alpha_k},\ z \to -\alpha_k,$$

$$M[f](z) \sim \frac{d_k}{z+\beta_k},\ z \to -\beta_k.$$

Справедливо и обратное утверждение.

Пусть $\{\alpha < \Re z < \beta\}$ есть фундаментальная полоса преобразование Меллина функции $f(x)$. Если $M[f](z)$ мероморфна в полосе $\{L \leqslant \Re z \leqslant \alpha\}$ и имеет в ней конечное число простых полюсов: $\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_N > L$ с вычетами c_k в точках α_k, а также $\exists\, \eta \in (\alpha, \beta)$, что $M[f](z) = O(|z|^{-r}),\ r > 1,\ L \leqslant \Re z \leqslant \eta$, то $f(x)$ допускает асимптотическое разложение

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{N} c_k x^{-\alpha_k} + O(x^{-L}),\ x \to 0. \tag{7}$$

Если преобразование Меллина мероморфно в полосе $\{\beta \leqslant \Re z \leqslant M\}$ и имеет в ней конечное число простых полюсов: $\beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_N < M$ с вычетами d_k в точках β_k, а также $\exists\, \eta \in (\alpha, \beta)$, что в полосе $\eta \leqslant \Re z \leqslant M,\ M[f](z) = O(|z|^{-r}),\ r > 1$, то $f(x)$ допускает асимптотическое разложение

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{N} d_k x^{-\beta_k} + O(x^{-M}),\ x \to \infty. \tag{8}$$

Доказательство прямой и обратной теоремы о фундаментальном соответствии содержится в статье [8].

Пример 3. Рассмотрим функцию $f(x) = e^{-x}$. Как показано выше, ее преобразование Меллина есть $M[f](z) = \Gamma(z),\ \Re z > 0$. Гамма-функция $\Gamma(z)$ мероморфна в $\mathbb{C}$, она имеет простые полюсы в точках $z = 0, -1, -2, \ldots$. Известно, что гамма-функция допускает представление:

$$\Gamma(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{1}{z+m} + \int_1^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt.$$

Таким образом, имеют место асимптотические эквивалентности:

$$\Gamma(z) \sim \frac{(-1)^m}{m!} \frac{1}{z+m},\ z \to -m,\ m = 0, -1, -2, \ldots.$$

С другой стороны, функция e^{-x} в точке $x = 0$ разлагается в ряд Тейлора:

$$e^{-x} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} x^m.$$

В обозначениях формулы (7) $c_m = \frac{(-1)^m}{m!},\ x^m \mapsto \frac{1}{z+m}$, то есть $\alpha_m = -m$.

3 Многомерное преобразование Меллина рациональной функции

Рассмотрим полином Лорана

$$f(x) = \sum_{\alpha \in A} a_\alpha x^\alpha, \ a_\alpha \in \mathbb{C} \setminus 0,$$

A — конечное подмножество в $\mathbb{Z}^n$. Мы используем стандартные обозначения $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$ для $x = (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{C} \setminus 0)^n$.

Для нас представляет интерес преобразование Меллина рациональной функции $1/f$, которое выражается следующим интегралом:

$$M[1/f](z) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \frac{x^{z-I}}{f(x)} dx, \tag{9}$$

здесь $x^{z-I} = x_1^{z_1-1} \cdot \ldots \cdot x_n^{z_n-1}$.

Вопрос о сходимости интеграла (9) для класса квазиэллиптических полиномов f рассматривается в работах [2], [11].

Введем понятие квазиэллиптического полинома на множестве X. Для этого нам понадобится следующее определение

Определение 8. Многогранником Ньютона N_f полинома f называется выпуклая оболочка множества A в $\mathbb{R}^n$.

Как и любой другой многогранник, многогранник Ньютона можно задать как пересечение конечного числа полупространств:

$$N_f = \bigcap_{p=1}^{k} \{u \in \mathbb{R}^n : \langle \mu_p, u \rangle \geqslant \eta_p\}, \tag{10}$$

где $\mu_p \in \mathbb{Z}^n$ — векторы в направлении внутренних нормалей граней максимальной размерности многогранника N_f, $\eta_p \in \mathbb{Z}$.

Обозначим через Γ грань многогранника Ньютона произвольной размерности: $0 \leqslant dim(\Gamma) \leqslant dim(N_f)$. Для каждой грани Γ определим *срезку* полинома f как полином:

$$f_\Gamma = \sum_{\alpha \in \Gamma} a_\alpha x^\alpha,$$

состоящий из мономов исходного полинома f, показатели которых содержатся в грани Γ многогранника Ньютона N_f.

Определение 9. Полином $f(x)$ называется квазиэллиптическим на множестве X, если для всех граней Γ многогранника Ньютона N_f срезка f_Γ не имеет нулей на X.

Если полином f квазиэллиптический на $\mathbb{R}^n_+$, то интеграл (9) сходится и определяет голоморфную функцию в трубчатой области $(N_f)^\circ + i\mathbb{R}^n$ (см. [2] или [11]).

Кроме того, преобразование Меллина рациональной функции $1/f$ допускает мероморфное продолжение. Об этом свидетельствует

Теорема 1. [11] Если полином f квазиэллиптический на множестве $X = \mathbb{R}^n_+$ и его многогранник Ньютона полномерный, то преобразование Меллина $M[1/f](z)$ допускает мероморфное продолжение вида:

$$M[1/f](z) = \Phi(z)\prod_{p=1}^{k}\Gamma(\langle\mu_p, z\rangle - \eta_p), \tag{11}$$

где $\Phi(z)$ — это целая функция, а μ_p, η_p определены в (10).

Таким образом, полярное множество преобразования Меллина рациональной функции $1/f$ состоит из конечного числа бесконечных семейств полярных гиперплоскостей, причем каждая из них есть параллельный сдвиг гиперплоскости, определяющей одну из граней многогранника N_f.

4 Многомерное фундаментальное соответствие

Рассмотрим полином Лорана

$$f(x) = 1 + x^{\alpha^1} + \ldots + x^{\alpha^n} \tag{12}$$

при линейно независимых $\alpha^1, \ldots, \alpha^n \in \mathbb{Z}^n$. Он является квазиэллиптическим на $\mathbb{R}^n_+$, следовательно удовлетворяет условиям Теоремы 1. Преобразование Меллина рациональной функции $1/f$ имеет вид

$$M[1/f](z) = \frac{1}{\delta}\Gamma(\langle\beta_1, z\rangle)\ldots\Gamma(\langle\beta_n, z\rangle)\Gamma(1 - \langle\beta_1 + \ldots + \beta_n, z\rangle), \tag{13}$$

где $\delta = \det(\alpha_j^k)$, а β_k — столбцы обратной матрицы $(\alpha_j^k)^{-1}$(см.[11]). В этом случае целая функция $\Phi(z)$, возникающая в представлении (11), имеет вид

$$\Phi(z) = \frac{1}{\delta}\frac{\Gamma(\langle\beta_1, z\rangle)}{\Gamma(\langle\mu_1, z\rangle)} \cdot \ldots \cdot \frac{\Gamma(\langle\beta_n, z\rangle)}{\Gamma(\langle\mu_n, z\rangle)} \cdot \frac{\Gamma(1 - \langle\beta_1 + \ldots + \beta_n, z\rangle)}{\Gamma(1 + \langle\mu_{n+1}, z\rangle)}.$$

Заметим, что многогранник Ньютона N_f полинома (12) есть симплекс, и целочисленные нормали $\mu_1, \ldots, \mu_{n+1}$ коллинеарны векторам $\beta_1, \ldots, \beta_n, -(\beta_1 + \ldots + \beta_n)$ с рациональными координатами. Кроме того, $\eta_1 = \ldots = \eta_n = 0, \quad \eta_{n+1} = 1$. Далее матрицу (α_j^k) будем обозначать A.

Пусть C_v есть минимальный конус с вершиной $v \in N_f$ такой, что $N_f \subset C_v$. Справедлива... (Извлечен один абзац)

5 Сведения из теории многомерных вычетов

Рассмотрим мероморфную в $\mathbb{C}^n$ дифференциальную форму:

$$\omega = \frac{h dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n}{f_1 \cdot \ldots \cdot f_n} \tag{14}$$

с полюсами на множествах $D_j = \{z : f_j(z) = 0\},\ j = 1, \ldots, n$. В предположении, что пересечение $Z = D_1 \cap \ldots \cap D_n$ дискретно, для каждой точки $a \in Z$ определяется *локальный вычет (вычет Гротендика)*, ассоциированный с голоморфным отображением $f(z) = (f_1(z), \ldots, f_n(z)) : \bar{U_a} \to \mathbb{C}^n$, в виде интеграла:

$$\mathrm{res}_a \omega = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma_a} \omega,$$

где $\Gamma_a = \{z \in U_a : |f_j(z)| = \varepsilon,\ j = 1, \ldots, n\}$ — цикл в некоторой малой окрестности U_a точки a, ориентация которого задается неравенством $d(arg f_1) \bigwedge \ldots \bigwedge d(arg f_n) \geqslant 0$.

Вычет Гротендика является простейшим среди возможных обобщений вычета Коши и допускает эффективное вычисление. В частности, когда $f_1, \ldots, f_n$ таковы, что якобиан $\frac{\partial(f)}{\partial(z)}$ в точке a отличен от нуля, локальный вычет равен (формула Коши):

$$\mathrm{res}_a \omega = \frac{h(a)}{\frac{\partial(f)}{\partial(z)}(a)}.$$

Нам понадобятся формулы для представления интеграла Меллина-Барнса суммой локальных вычетов.

Многомерным интегралом Меллина-Барнса называется интеграл

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\gamma + i\mathbb{R}^n} \frac{\prod_{j=1}^{p} \Gamma(\langle a^j, z\rangle + b_j)}{\prod_{k=1}^{q} \Gamma(\langle c^k, z\rangle + d_k)}\, {x_1}^{-z_1} \ldots\ {x_n}^{-z_n}\, dz, \tag{15}$$

где $a^j, c^k \in \mathbb{R}^n,\ b_j, d_k \in \mathbb{R}$, а вектор $\gamma \in \mathbb{R}^n$ выбран так, что вещественное n-мерное множество интегрирования

$$\gamma + i\mathbb{R}^n = \{z \in \mathbb{C}^n : z_1 = \gamma_1 + iy_1, \ldots, z_n = \gamma_n + iy_n\}$$

не пересекает полярные гиперплоскости

$$\langle a^j, z\rangle + b_j = -\nu,$$

где $\nu = 0, 1, \dots, j = 1, \dots, p$; $dz = dz_1 \dots dz_n$.

Интеграл вида (15) представляет собой обратное преобразование Меллина функции $\frac{\prod_{j=1}^{p}\Gamma(\langle a^j,z\rangle+b_j)}{\prod_{k=1}^{q}\Gamma(\langle c^k,z\rangle+d_k)}$. В поведении интегралов (15) большую роль играют следующие две величины: векторная величина

$$\Delta = \sum_j a^j - \sum_k c^k, \tag{16}$$

и скалярная величина

$$\alpha = \min_{||y||=1}\left(\sum_j |\langle a^j, y\rangle| - \sum_k |\langle c^k, y\rangle|\right), \tag{17}$$

где $||y|| = (y_1^2 + \dots + y_n^2)^{1/2}$ — это евклидова норма на пространстве $\mathbb{R}^n$. В случае $n = 1$ имеем

$$\alpha = \sum_j |a^j| - \sum_k |c^k| \tag{18}$$

Величина α определяет значения комплексных параметров $x = (x_1, \dots, x_n)$, при которых интеграл (15) сходится.

Нас будет интересовать так называемый вырожденный случай, когда величина $\Delta = 0$. Это означает, что интеграл (15) допускает несколько разложений в ряды вычетов (см. [4]). Если $\alpha > 0$, то область сходимости интеграла непуста.

Под *полиэдральным конусом (полиэдром)* мы понимаем множество вида

$$\Pi = \{z \in \mathbb{C}^n : \Re g_j(z) < r_j, j = 1, \dots, m\},$$

где $g_j(z)$ — линейные функции с вещественными коэфициентами. Нас будут интересовать конусы, соответствующие случаю $m = n$, с линейно независимыми функциями $g_j(z)$, $j = 1, \dots, n$ (имеющие n граней максимальной размерности). Такие конусы называются *симплициальными*.

Полиэдральный симплициальный конус можно задать в виде $\pi + i\mathbb{R}^n$, где π — полиэдральный конус в вещественном подпространстве $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$:

$$\pi = \{x \in \mathbb{R}^n : g_j(x) < r_j,\ j = 1, \ldots, n\}.$$

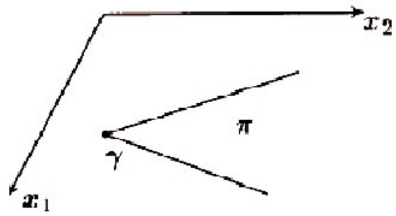

Рисунок 1 — Конус с вершиной γ

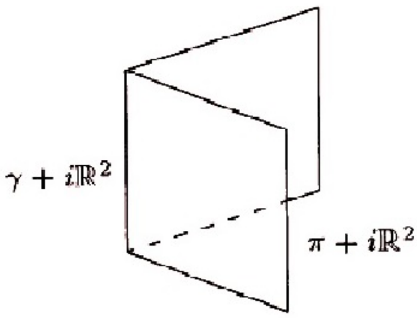

Рисунок 2 — Полиэдральный симплициальный конус

Если $\gamma \in \mathbb{R}^n$ — вершина конуса π (рисунок 1), то "вертикаль" интегрирования $\gamma + i\mathbb{R}^n$ в интеграле (15) есть острие конуса Π (рисунок 2).

Каждый множитель $\Gamma(\langle a^j, z\rangle + b_j)$ в интеграле (15) определяет счетное семейство полярных гиперплоскостей

$$L_j = \bigcup_{\nu=0}^{\infty} L_j^{\nu},\ \text{где } L_j^{\nu} = \{\langle a^j, z\rangle + b_j = -\nu\},\ \nu = 0, 1 \ldots.$$

Сформируем из указанных семейств L_j полярные дивизоры $D_1, \ldots, D_n$. Далее построим полиэдральный конус Π таким образом, что семейство дивизоров $D_1, \ldots, D_n$ будет с ним согласовано [3].

Поскольку к вершине γ может примыкать бесконечное множество конусов, то "вертикаль" интегрирования является острием также бесконечного числа полиэдральных конусов. Соответственно для интеграла (15) можно получать различные формулы вычетов в конусах с острием $\gamma + i\mathbb{R}^n$. Речь идет о локальных вычетах в точках пересечений полярных гиперплоскостей L_j^ν.

В двумерном случае согласованность полиэдрального конуса $\Pi = \pi + i\mathbb{R}^2$ с семейством полярных дивизоров D_1, D_2 означает, что каждая прямая L_j^ν пересекает не более одной стороны угла π.

Таким образом, если полиэдральный конус Π согласован с семейством полярных дивизоров $D_1, \ldots, D_n$ подынтегральной формы ω в (15), то интеграл (15) равен сумме локальных вычетов формы ω в точках пересечения полярных гиперплоскостей L_j^ν. Если в точке $z_j^\nu = L_{j_1}^{\nu_1} \cap \ldots \cap L_{j_n}^{\nu_n}$ пересекаются n комплексных гиперплоскостей, то вычет в этой точке выписывается по формуле

$$\mathrm{res}_{z_J^\nu}\omega = \frac{(-1)^{|\nu|}}{\nu!\Delta_J} \frac{\prod\limits_{j \neq J} \Gamma(\langle a^j, z_J^\nu \rangle + b_j)}{\prod\limits_{k=1}^{q} \Gamma(\langle c^k, z_J^\nu \rangle + d_k)} x_1^{-z_{J_1}^\nu} \cdot \ldots \cdot x_n^{-z_{J_n}^\nu},$$

где $\Delta_J = \det(a^{j_1}, \ldots, a^{j_n})$, $(z_J^\nu)_i$ — координаты z_J^ν, $|\nu| = \nu_1 + \ldots + \nu_n$, $\nu! = \nu_1! \cdot \ldots \cdot \nu_n!$.

6 Доказательство Теоремы 2

(Извлечено 4 страницы)

7 Примеры

(Извлечено 6 страниц)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получены следующие результаты:

- исследована структура множества особенностей преобразования Меллина рациональной функции многих переменных специального вида;
- вычислены соответствующие разложение Лорана-Пюизо рациональной функции;
- сформировано соответствие между степенными разложениями рациональной функции-оригинала и особенностями ее преобразование Меллина.

Полученные результаты имеют теоретическое значение и могут быть использованы в теории интегральных преобразований и в асимптотическом анализе.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

[1] Антипова И.А., Обращения многомерных преобразования Меллина и решение алгебраических уравнений / Антипова И.А. // Матем. сб., 198:4 (2007), 3 - 20.

[2] Ермолаева Т.О., Интегрирование рациональных функций по $\mathbb{R}^n$ с помощью торических компактификаций и многомерных вычетов/ Ермолаева Т.О., Цих А.К. // Матем. сб., 187:9 (1996), 45 - 64.

[3] Жданов О.Н., Исследование кратных интегралов Меллина-Барнса с помощью многомерных вычетов / Жданов О.Н., Цих А.К. // Сиб. матем. журн., 1998, Т39 №2, с. 281 - 298.

[4] Пассаре М., Кратные интегралы Меллина-Барнса как периоды многообразий Калаби-Яу с несколькими модулями / Пассаре М., Цих А.К., Чешель А.А. // ТМФ, 1996, Т. 109 №3 , 381 - 394.

[5] Сидоров Ю.В., Лекции по теории функций комплексного переменного: Учеб. для вузов/ Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. // 3-е изд., испр.— М.: Наука. Гл.ред. физ.- мат. лит., 1989 – 480 с.

[6] Aguilar J.P., Muon anomaly from lepton vacuum polarization and the Mellin-Barnes representation / Aguilar J.P., Greynat D., De Rafael E. // 77:9 (2008), 093010.

[7] N.G. De Bruijn Rice, The average height of planted plane trees, in: R.C. Read / N.G. De Bruijn, D.E. Knuth // ed., Graph Theory and Computing (Academic Press, New York, 1972) 15 - 22.

[8] Philippe Flajolet, Mellin transforms and asymptotics: Harmonic sums: Theoretical Computer Science / Philippe Flajolet, Xavier Gourdon, Philippe Dumas // 144 (1995), 3 - 58.

[9] Knuth D.E., The Art of Computer Programming / Knuth D.E. // Vol. 3: Sorting and Searching (Addison-Wesley, Reading, MA, 1973).

[10] Mellin H., Résolution de l'équation algébrique générale à l'aide de la fonction gamma // C.R. Acad. Sci., Paris Sér. I Math. 1921. V. 172. P. 658–661.

[11] Nilsson L., Mellin transforms of multivariate rational function / Nilsson L., Passare M. // J.Geom Anal (2013) 23: 24-46.