Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики
Кафедра теории функций

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
А. Цих /А.К. Цих
«17» 06 2016 г.

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

Направление 01.03.01 математика

ОБОБЩЕНИЕ ПОДГОТОВИТЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЫ ВЕЙЕРШТРАССА ДЛЯ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор А. Цих 17.06.2016 / А.К. Цих

Выпускник ФЕфимов 17.06.2016 / Ф.А. Ефимов

Красноярск 2016

РЕФЕРАТ

Бакалаврская работа по теме "Обобщение подготовительной теоремы Вейерштрасса для вектор-функций" содержит 19 страниц текста, 4 использованных источника.

ПОДГОТОВИТЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ВЕЙЕРШТРАССА, ПСЕВДОПОЛИНОМ, ПРИМАРНЫЙ ИДЕАЛ, ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ ПРИМАРНАЯ КОМПОНЕНТА, КРАТНОСТЬ НУЛЯ, ПСЕВДОПОЛИНОМИАЛЬНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ

Цель работы — привести обзор векторных вариантов подготовительной теоремы Вейерштрасса и теоремы о делении на идеал в кольце ростков голоморфных функций, найти области применимости этих теорем. Построить класс отображений, для которых явно определяется структура псевдополиномиального отображения Вейерштрасса.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 3

1 Росток конечного типа $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$, его кратность и локальная алгебра 7

2 Теорема о делении для $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^p$ 8

3 Примарные идеалы 9

4 Векторный вариант подготовительной теоремы Вейерштрасса . . . 10

5 Детализация теоремы 9 12

6 Примеры 13

Заключение 18

Список использованных источников 19

ВВЕДЕНИЕ

Классический вариант теоремы Вейерштрасса (Vorbereitungssatz) был сформулирован в 1860 году. Эта теорема проясняет локальную структуру нулевого множества голоморфной функции многоих комплексных переменных. А именно, она показывает, что в подходящей системе координат (в подходящем базисе $\mathbb{C}^n$) нулевое множество задается псевдополиномом. Условие подходящего базиса состоит в том, что функция $f(z_1, \ldots, z_n)$ тождественно не равна нулю на координатной прямой $z = (z_1, 0, \ldots, 0)$. Напомним классический вариант подготовительной теоремы Вейерштрасса, доказательсто которой обычно основано на формуле логарифмического вычета и рекурентных формулах Ньютона (см. [1]).

Запишем точку $z = (z_1, \ldots, z_n)$ в виде $z = (z_1, z'')$, где $z'' = (z_2, \ldots, z_n)$. Таким образом, точки указанной прямой имеют вид $(z_1, 0'') = (z_1, 0, \ldots, 0)$.

Определение 1. *Псевдополином называют полином от переменной z_1, коэффициенты которого — голоморфные функции от z'':*

$$W(z) = a_d(z'')z_1^d + a_{d-1}(z'')z_1^{d-1} + \ldots + a_1(z'')z_1 + a_0(z'').$$

Псевдополином $W(z)$ называется псевдополиномом Вейерштрасса, если его старший коэффициент равен 1, а остальные обращаются в нуль при $z'' = 0''$:

$$a_d(z'') \equiv 1, \ a_j(0'') = 0, \ j = 0, \ldots, d-1.$$

Теорема 1 (Вейерштрасс, см. [1])**.** *Пусть функция $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ голоморфна в окрестности начала координат и $f(z_1, 0'')$ имеет изолированный нуль $z_1 = 0$ кратности d. Тогда существует псевдополином Вейерштрасса степени d*

$$W(z) = z_1^d + a_{d-1}(z'')z_1^{d-1} + \ldots + a_1(z'')z_1 + a_0(z''), \tag{1}$$

такой, что $f(z)$ представима в виде

$$f(z) = A(z)W(z), \tag{2}$$

где $A(z)$ – голоморфная в окрестности нуля функция, причем $A(0) \neq 0$.

Из теоремы видно, что нулевое множество произвольной голоморфной функции $f(z)$ локально совпадает с гиперповерхностью $W(z) = 0$, у которой все ветви (решения $z_1^{(\nu)}(z'')$ уравнения $W(z_1, z'') = 0$) стремятся к нулю при $z'' \to 0$. Кроме того, поскольку функция $A(z)$ в равенстве (2) представляет собой обратимый росток в кольце $\mathscr{O}^n$ ростков голоморфных функций в точке $0 \in \mathbb{C}^n$ (иными словами для неё определен обратный росток $\frac{1}{A(z)}$), эта теорема позволяет оперировать в кольце $\mathscr{O}^n$ как в кольце многочленов. В частности, справедлива следующая

Теорема 2 (Классическая теорема о делении в локальном кольце $\mathscr{O}^n$, см. [1])**.** *Пусть функция $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ голоморфна в окрестности начала координат и $f(z_1, 0'')$ имеет изолированный нуль $z_1 = 0$ кратности d. Тогда любой росток $h \in \mathscr{O}^n$ делится на f с остатком*

$$h(z) = g(z)f(z) + r(z), \tag{3}$$

где $g(z) \in \mathscr{O}^n$, а $r(z)$ — псевдополином степени не выше $d-1$:

$$r(z) = b_{d-1}(z'')z_1^{d-1} + \ldots + b_1(z'')z_1 + b_0(z''),\ b_j \in \mathscr{O}^{n-1}. \tag{4}$$

Цель работы — привести обзор векторных вариантов подготовительной теоремы Вейерштрасса и теоремы о делении на идеал в кольце ростков голоморфных функций, найти области применимости этих теорем.

Таким образом, речь идет о замене в теоремах 1 и 2 функции $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ на отображение $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^p$, голоморфное в некоторой окрестности $0 \in \mathbb{C}^n$ такое, что $f(0) = 0$. В этом случае мы говорим, что f — росток голоморфного отображения, отражая это записью

$$f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^p, 0).$$

В то время как в классических вариантах (т.е. в теоремах 1 и 2) мы требовали изолированность нуля $z_1 = 0$ для сужения $f(z_1, z'')$ на координатную прямую, в векторном случае требуется изолированность нуля $z' = 0'$ для сужения $f(z', 0'')$ на координатное подпространство $z'' = 0''$, где

$$z' = (z_1, \ldots, z_p),\ z'' = (z_{p+1},\ \ldots\ , z_n).$$

Теперь выясним, на что естественно заменить псевдополином (1) и остаток (4), а также формулы (2) и (3). Формально легко предугадать, что логично вместо одного псевдополинома взять систему псевдополиномов (псевдополиномиальное отображение), тогда в (2) $A(z)$ должна быть $p \times p$-матрица. Далее, сравнивая структуру псевдополинома (1) с видом остатка от деления (4), мы видим, что независящая от z'' часть в W состоит из единственного монома z_1^d.

Одна из характеристик этого монома состоит в том, что он порождает в кольце $\mathbb{C}[z']$ примарный идеал. При переходе к векторному варианту $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^p$ такой моном заменяется отображением

$$P(z') = (P_1(z')), \ \dots \ , P_p(z')) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^p,$$

определяющим примарный идеал в кольце $\mathbb{C}[z_1, \ \dots \ , z_p]$. Наконец заметим, что множество остатков от деления кольца $\mathscr{O}^n$ (ростков голоморфных в нуле функций от n переменных) на идеал $\langle f \rangle$ — это фактор кольцо $\mathscr{O}^n / \langle f \rangle$, и по теореме (2) это фактор-кольцо будучи $\mathscr{O}^{n-1}$-модулем порождается базисом $1, \ z_1, \dots ,z_1^{d-1}$. После этого становится ясно, что в векторном варианте псевдополиномиальное отображение Вейерштрасса должно иметь вид

$$W = P(z') + C(z'')e(z'),$$

где $e(z') = (e_1(z'), \ \dots \ , e_k(z'))$ — базис для фактор-кольца $\mathbb{C}[z']/\langle P \rangle$, а C — голоморфная матрица размера $p \times k$.

Первые три парагрофа имеют вспомогательный характер. В них приводятся основные понятия для формулировки и детализация векторного варианта подготовительной теоремы Вейерштрасса. Так, в первом параграфе излагаются свойства отображения из $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^n$, имеющего в начале координат изолированный ноль. Росток такого отображения называют конечным. В параграфе 2 приводится известный вариант теоремы о делении для отображений из n-мерного пространства в p-мерное пространство. Третий параграф содержит базисную информацию о примарных идеалах.

В параграфе 4 формулируется и доказывается многомерный вариант подготовительной теоремы Вейейрштрасса, а в пятом параграфе приведен класс отображений, для которых явно определены структуры псевдополиномиальных отображений Вейерштрасса. В заключительном 6 параграфе строится ряд примеров выделения псевдополиномиальных отображений Вейерштрасса. Для некоторых из них выделение достаточно громоздкое. Мы их приводим для того, чтобы проиллюстрировать контраст с рафинированными доказательствами теорем 9 и 10.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получены следующие результаты:

1. Создан путеводитель по векторным вариантам теоремы Вейерштрасса и теоремы о делении на идеал в кольце ростков голоморфных функций.

2. Построен класс голоморфных отображений, для которых явно вычисляется псевдополиномиальное отображение.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Шабат, Б.В. Введение в комплексный анализ: в 2 т./ Б.В. Шабат — Москва: Наука, 1976–165с.

2. Цих, А.К. Многомерные вычеты и их применение/ А.К. Цих. — Новосибирск: Наука, 1988–241с.

3. Ван дер Варден, Б.Л. Алгебра/ Б.Л. Ван дер Варден. — Москва: Мир, 1976–648с.

4. Гриффитс, Ф. Принципы алгебраической геометрии/ Ф. Гриффитс, Дж. Харрис — Москва: Мир, 1982–862с.