Journal of Siberian Federal University. Engineering & Technologies 1 (2012 5) 57-62
~ ~ ~

УДК 533.528

Исследование кавитационных течений средствами математического моделирования

В.А. Кулагин*, Т.А. Пьяных
Сибирский федеральный университет,
Россия 660041, Красноярск, пр. Свободный, 79 [1]

Received 6.02.2012, received in revised form 13.02.2012, accepted 20.02.2012

Выполнен обзор современных методов математического моделирования кавитационных течений, а также анализ их возможностей и недостатков.

Ключевые слова: кавитационные течения, CFD, математическая модель, баротропная модель, бароклинная модель.

С расширением области приложения кавитационной технологии в различных отраслях производства возрастает потребность в исследовании кавитационных течений. Однако одновременное существование граничной динамики, фазового перехода и сильного изменения плотности значительно затрудняет эту задачу.

В начале 1990-х гг. в результате совершенствования CFD-методов появились кавитационные модели, включающие решение уравнений Навье-Стокса. Выделяют два основных подхода при моделировании многофазных потоков: с взаимопроникающими средами и без взаимопроникновения.

В подходе, который рассматривает невзаимопроникающие среды, четко определяется поверхность раздела пара и жидкости. Этот подход был разработан для моделирования устойчивых кавитационных течений, в которых известны начальная форма каверны и модель области замыкания (следа). Уравнения движения решаются только для жидкой фазы, а паровая фаза учитывается граничными условиями на поверхности раздела. Массовый поток через поверхность раздела фаз не учитывается. Начальную форму каверны и ее область замыкания R. Hirschi, P. Dupont и F. Avellan [1, 2] определяли с помощью уравнения Рэлея-Плессета, тогда как M. Deshpande, J. Feng [3] и Y. Chen, S.D. Heister [4] применяли критерий статического давления пара. Однако модели, предполагающие четкую поверхность раздела фаз, не нашли широкого применения.

Как показал анализ работ по исследованию кавитационных течений, наиболее часто встречается подход, основанный на взаимопроникающих средах. Здесь не предполагается поверхность раздела между двумя несмешивающимися жидкостями, поэтому объемная доля фазы может изменяться от нуля до единицы в зависимости от занимаемого пространства в двухфазном потоке. Данный подход включает одно- и многожидкостные модели.

* Corresponding author E-mail address: vak-sfu@mail.ru

В многожидкостных моделях уравнения сохранения применяются для каждой фазы потока [5-7]. Следовательно, фазы в любой точке расчетной области могут характеризоваться различными скоростями и температурами, т.е. они не находятся в равновесии. Взаимодействие между фазами учитывается введением источниковых членов в уравнения сохранения. Многожидкостные модели наиболее точно описывают физическую сущность кавитационных течений, но их использование связано со значительными трудностями в определении источниковых членов.

В одножидкостных моделях кавитационный поток рассматривается как гомогенная смесь [8]. Эти модели основываются на предположении локального кинематического и термодинамического равновесия между фазами. В этом случае уравнения сохранения применяются для смеси, также необходимо замыкающее уравнение для нахождения объемной доли фазы. Одножидкостные модели классифицируются по типу уравнений, которые используются для определения содержания доли фазы в потоке, а именно: алгебраические и дифференциальные.

Алгебраические модели предполагают мгновенное влияние локального давления на плотность гомогенной смеси. Поэтому они также известны как баротропные модели или модели, основанные на уравнении состояния. Упрощая уравнение энергии, можно получить следующее баротропное уравнение:

$$c_m^2 \frac{\mathrm{d}\rho_m}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}, \tag{1}$$

где c_m – скорость звука в смеси, м/с; $\rho_m = \alpha\rho_v + (1-\alpha)\rho_l$ – плотность смеси, кг/м^3, ρ_v и ρ_l – плотности пара и жидкости соответственно, кг/м^3; α – объемная доля пара; P – давление, Па.

O. Coutier-Delgosha [9] учитывал скорость звука в смеси с помощью полиномиального уравнения. D.P. Schmidt и др. [10] использовали переменную скорость звука, основываясь на классической гомогенной модели равновесия Wallis:

$$\frac{1}{c_m^2} = \frac{\partial\rho_m}{\partial \mathrm{P}} = \rho_m\left(\frac{\alpha}{\rho_v \mathrm{c}_v^2} + \frac{1-\alpha}{\rho_1 \mathrm{c}_1^2}\right). \tag{2}$$

В результате интегрирования уравнения (2) можно получить зависимость между давлением и плотностью, которая дает начало алгебраическим моделям кавитации [11-13]:

$$P(\rho_m) = P_{\text{н}} + \frac{\rho_v - \rho_1}{\rho_v\rho_1}\frac{1}{(\rho_1 c_1)^{-2} + (\rho_v c_v)^{-2}}\log\left[\left(\frac{\rho_m c_m}{\rho_1 c_1}\right)^2\right]. \tag{3}$$

Однако в баротропной модели плотность зависит только от давления, вследствие чего не учитываются некоторые особенности кавитационных течений. Это может быть легко замечено при записи уравнения переноса завихренности:

$$\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}\cdot\nabla\boldsymbol{u} + \frac{1}{\rho_m^2}\nabla\rho_m \times \nabla P + \text{viscous terms}, \tag{4}$$

где $\boldsymbol{u}$ – абсолютная скорость, м/с; $\boldsymbol{\omega} = \nabla\times\boldsymbol{u}$ – завихренность, 1/с.

Второй член с правой стороны равенства при $\rho_m = \rho_m(P)$ обращается в ноль. В результате исчезает значительный источник турбулентности, который является существенным в области закрытия каверны [14].

Для более полного описания природы гидродинамической кавитации были разработаны дифференциальные модели. К ним относятся модели, основанные на уравнении переноса объемной доли паровой фазы, а также модели, включающие уравнение Рэлея-Плессета.

Наиболее часто применяется уравнение переноса объемной доли паровой фазы, имеющее следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_v \alpha\right) + \nabla\left(\rho_v \alpha\, \boldsymbol{u}\right) = S_\alpha, \tag{5}$$

где S_α – источниковый член, который зависит от свойств жидкости и процесса фазового перехода (испарение или конденсация).

Основная трудность данного метода заключается в определении S_α. A. Alajbegovic и др. [15], а также W. Yuan и др. [16] предложили кавитационную модель, базирующуюся на уравнении Рэлея. C.L. Merkle [17], R. Kunz [18], V. Ahuja [19], N. Singhal [20] применяли полуаналитические уравнения для массового переноса. В качестве примера приведем выражение для определения S_α, полученное N. Singhal [20]. В данном случае источниковый член складывается из двух составляющих:

$$R_e = C_e \frac{V_{ch}}{\sigma} \rho_l \rho_v \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{P_{\text{н}} - P}{\rho_v} \right)^{1/2} \left(1 - \alpha\right), \qquad \text{при} \quad P \le P_{\text{н}}; \tag{6}$$

$$R_c = C_c \frac{V_{ch}}{\sigma} \rho_l \rho_l \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{P - P_{\text{н}}}{\rho_l} \right)^{1/2} \alpha, \qquad \text{при} \quad P \ge P_{\text{н}}, \tag{7}$$

где V_{ch} – характеристическая скорость, м/с; $P_н$ – давление насыщения, Па; σ – поверхностное натяжение воды, Н/м; $C_e = 0{,}02$ и $C_c = 0{,}01$ – эмпирические константы.

I. Senocak и W. Shyy [14] получили полностью аналитическую кавитационную модель переноса, основанную на уравнениях сохранения массы и импульса для поверхности раздела пар – жидкость.

Модели, предложенные A. Alajbegovic и др. [15], а также W. Yuan и др. [16], описывают предельный случай роста сферического пузырька при изменении давления окружающей жидкости. Однако данные модели плохо адаптированы для учета коллапса пузырька и пренебрегают многими эффектами, которые определяют поведение пузырьков. Влияние инерции, вязкости, поверхностного натяжения жидкости и сжимаемости парогазовой составляющей смеси на структуру кавитационного потока моделируется более универсальным уравнением Рэлея-Плессета [21]:

$$\rho\left(R \times \ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 \right) = P_v + P_g - P_l - 4\mu\frac{\dot{R}}{R} - 2\frac{\sigma}{R}, \tag{8}$$

где R – радиус кавитационного пузырька, м; P_v, P_g, P_l – давление пара, газа и жидкости в кавитационной области соответственно, Па; μ – коэффициент динамической вязкости, Па·с.

В течение долгого времени уравнение Рэлея-Плессета (8) решалось в одномерном виде. Однако в связи с повышением мощности ЭВМ появились работы, отражающие расчетный анализ двух- и трехмерных нестационарных кавитационных потоков [22-25].

В настоящее время стало возможным исследование кавитации при помощи «тяжелых» в вычислительном смысле моделей E. Giannadakis, M. Gavaises, H. Roth, C. Arcoumanis [25] и G.L. Chahine [24], которые включают уравнение для динамики группы пузырей радиуса R и плотности их числа n, полученное A. Kubota и др. [22]:

$$R \times \ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{P_v - P}{\rho} + \frac{P_{g,0}}{\rho}\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma} - \frac{2\sigma}{\rho R} - \frac{4\mu}{\rho}\frac{\dot{R}}{R} - \\ 2\pi \cdot \Delta r^2 \cdot \left(nR^2\ddot{R} + \dot{n}R^2\dot{R} + 2nR\dot{R}^2\right), \qquad (9)$$

где $P_{g,0}$ и R_0 – первоначальные давление газа и радиус пузырька, γ – показатель политропы. Последний член в этом уравнении моделирует динамику пузырьков на подсеточном масштабе Δr. Эта особенность становится полезной с использованием грубых сеток, где давление распределяется между несколькими пузырями в вычислительной ячейке.

Сравнение математических моделей (в таблице приведены свойства трех широко применяемых типов одножидкостных моделей) кавитационных потоков показывает, что наиболее распространенными для инженерных расчетов являются одножидкостные модели.

Свойства математических моделей кавитации

	Алгебраические модели	Дифференциальные модели	
		Модели, основанные на уравнении переноса	Модели, основанные на уравнении Рэлея-Плессета
Фазовый переход	Равновесие фаз	Неравновесное состояние фаз; постоянная скорость фазового перехода	Неравновесное состояние фаз; переменная скорость фазового перехода
Зависимость плотности от давления	Баротропная модель	Бароклинная модель	Бароклинная модель
Эффекты кавитационных ядер	Не учитываются	Могут быть учтены	Могут быть учтены
Турбулентность	Пренебрегается или учитывается для смеси	Учитывается для смеси	Учитывается для смеси или жидкости

Вывод

Алгебраические модели предполагают явное влияние давления на объемную долю паровой фазы, тем самым представляя природу потока баротропной. Модели, которые используют дифференциальные уравнения, описывают бароклинную природу кавитационного потока, более соответствующую реальности. Модели кавитации, основанные на уравнении переноса объемной доли паровой фазы, являются устойчивыми и популярными в CFD относительно моделей, основанных на уравнении Рэлея-Плессета. Однако последние более пригодны для моделирования нестационарных кавитационных течений, хотя и требуют больших вычислительных ресурсов.

Список литературы

[1] *Hirschi R.* Prediction par Modelisation Numerique Tridimensionnelle des Effets de la Cavitation a Poche dans les Turbomachines Hydrauliques. PhD thesis, Ecole Polytechnique Federale de Lausanne. 1998. №1777.

[2] *Hirschi R., Dupont P., Avellan F.* Centrifugal pump performance drop due to leading edge cavitation: Numerical predictions compared with model tests // Trans. of ASME, J. Fluids Eng., december 1997. №120. P. 705-711.

[3] *Deshpande M., Feng J.* Cavity flow predicitions based on the euler equations // Trans. of ASME, J. Fluids Eng., march 1994. №116. P. 36-44.

[4] *Chen Y., Heister S.D.* A numerical treatment for attached cavitation // Trans. of ASME, J. Fluids Eng., september 1994. №116. P. 613-618.

[5] *Von Berg E., Edelbauer W., Alajbegovic A., et al.* Coupled simulations of nozzle flow, primary fuel jet breakup, and spray formation // J. Eng for Gas Turbines Power, 2005. №127(4). P. 897-908.

[6] *Chiavola O., Palmieri F.* Modeling needle motion influence on nozzle flow in high pressure injection system // SAE Paper, 2007. 2007-01-0250.

[7] *Wang X., W.H. Su.* A numerical study of cavitating flows in high-pressure diesel injection nozzle holes using a two-fluid model // Chinese Science Bulletin, 2009. №54(10). P. 1655-1662.

[8] *Zhang X.B, Qiu L.M., Gao Y., Zhang X.J.* Computational fluid dynamic study on cavitation in liquid nitrogen // J. Cryogenics, 2008. №48 (9-10). P. 432-448.

[9] Coutier-Delgosha O. Modelisation des Ecoulement Cavitants: Etude des Comportements Instationnaires et Application Tridimensionnelle aux Turbomachines. PhD thesis, LEGI-INPG, Grenoble, France, Nov. 2001. №5519.

[10] *Schmidt D.P., Rutland C.J., Corradini M.L.* A numerical study of cavitating flow through various nozzle shapes // SAE paper, 1997. 971597. P. 10.

[11] *Schmidt D.P., Corradini M.L.* The internal flow of diesel fuel injector nozzles: a review // Int. J. Engine Research, 2001. Vol. 2. №1. P. 1-22.

[12] *Qin J.R.* Direct Calculations of Cavitating Flows by the Space-Time CE/SE Method // AIAA conf. Paper, 2001. P. 324.

[13] *Dumont N., Simonin O., Habchi C.* Numerical simulation of cavitating flows in Diesel injectors by a homogeneous equilibrium modelling approach // 4th Int. Symposium on Cavitation: CAV2001, 2001. P. 44.

[14] *Senocak I., Shyy W.* Evaluation of cavitation models for Navier-Stokes computations // Proceedings of the 2002 ASME Fluids Engineering Division Summer Meeting, 2002. №31011.

[15] *Alajbegovic A., Grogger H.A., Philipp H.* Calculation of transient cavitation in nozzle using the two-fluid model // Proc. ILASS-Americas'99 Annual Conf., 1999. P. 373-377.

[16] *Yuan W., Schnerr G.H.* Numerical simulation of two-phase flow in injection nozzles: interaction of cavitation and external jet formation // J. Fluids Eng, 2003. №125(6). P. 963-969.

[17] *Merkle C.L., Feng J., Buelow P.E.* Computationalmodeling of the dynamics of sheet cavitation // Third international symposium on cavitation (CAV1998), 1998. P. 307-311.

[18] A preconditioned navier-stokes method for two-phase flows with application to cavitation prediction / R.F. Kunz, D.A. Boger, D.A. Stinebring, T.S. Chyczewski, H.J. Gibeling, S. Venkateswaran, T.R. Govindan // Computers & Fluids, 2000. №29. P. 849-875.

[19] *Ahuja V. Hosangadi A., Arunajatesan S.* Simulations of Cavitating Flows Using Hybrid Unstructured Meshes // Trans. of ASME, J. Fluids Eng, June 2001. №123. P. 331-340.

[20] *Singhal N.H., Athavale A.K., Li M., Jiang Y.* Mathematical basis and validation of the full cavitation model // Tr. ASME, J. of Fluids Engineering, 2002. Vol.124. P. 617-624.

[21] Brennen C. E. Cavitation and Bubble Dynamics. Oxford University Press, New-York, 1995. P. 294.

[22] *Kubota A., Kato H., Yamaguchi H.* A new modelling of cavitating flows : A numerical study of unsteady cavitation on a hydrofoil section // J. Fluid Mech, March 1992. №240. P. 59-96.

[23] *Delale C.F.* Thermal Damping in Cavitating Nozzle Flows // Proc. of the 4th Int. Symposium on Cavitation: CAV2001, 2001. P. 7.

[24] *Chahine G.L.* Nuclei Effects on Cavitation Inception and Noise // 25th Symposium on Naval Hydrodynamics. St. Johns, August 2004. №14. P. 8-13.

[25] *Giannadakis E., Gavaises M., Roth H., Arcoumanis C.* Cavitation Modelling in Single-Hole Injector Based on Eulerian-Lagrangian Approach // Conference on Thermo- and Fluid Dynamic Processes in Diesel Engines, 2004. P. 14.

Research of Cavitating Flows by Methods of Mathematical Simulation

Vladimir A. Kulagin and Tatyana A. Pyanykh
Siberian Federal University
79 Svobodny, Krasnoyarsk, 660041 Russia

The purpose of given article – to execute the review of modern methods of mathematical modelling cavitating flows, and also to realize the analysis of their possibilities and limitation.

Keywords: cavitating flows, CFD, mathematical model, barotropic model, baroclinic model.