Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики
Кафедра алгебры и математической логики

**УТВЕРЖДАЮ**
Заведующий кафедрой
________ /В.М. Левчук
«16» июня 2016 г.

# МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

# О НЕПРИВОДИМЫХ КОВРАХ АДДИТИВНЫХ ПОДГРУПП ТИПА $B_n, C_n, F_4$

**Направление** 01.04.01 Математика

**Магистерская программа** 01.04.01.02 Алгебра, логика и дискретная математика

Научный руководитель
доктор физико-математических наук, профессор ________ /Я. Н. Нужин

Выпускник ________ /А. О. Лихачева

Красноярск 2016

# АННОТАЦИЯ

Цель работы — построить примеры незамкнутых ковров типа $B_n, C_n, F_4$ над различными классами коммутативных колец и описать неприводимые ковры типа $B_2$ над локально конечным полем характеристики 2.

В основе доказательства теоремы используются условия ковровости, которые являются следствием из коммутаторной формулы Шевалле для типа $B_2$. В работе используется определение ковра, данное В.М. Левчуком.

В результате исследований построены примеры незамкнутых неприводимых ковров типа $B_n, C_n, F_4$ над различными классами коммутативных колец с единицей и доказано, что с точностью до сопряжения диагональным элементом из расширенной группы Шевалле все аддитивные подгруппы неприводимого ковра типа $B_2$ над локально конечным полем характеристики 2 совпадают с некоторым подполем основного поля, в частности, любой неприводимый ковер типа $B_2$ над локально конечным полем характеристики 2 замкнут.

Ключевые слова: аддитивная подгруппа, группа Шевалле, элементарный ковер, неприводимый ковер, система корней.

# ANNOTATION

The aim of the thesis is to construct examples of the unclosed carpets of $B_n, C_n, F_4$ types over various classes of commutative rings and describe the irreducible carpets of the $B_2$ type on a locally finite field of characteristic 2.

The proof of the theorem uses carpeted conditions that are the result of the Chevalley commutator formula of the $B_2$ type. We use the definition of carpet, given by V. M. Levchuk.

As a result of research I constructed examples of the unclosed irreducible carpets of $B_n, C_n, F_4$ types over various classes of commutative rings with unity and proved that up to conjugation by a diagonal element of the extended Chevalley group all additive subgroups of the irreducible carpet of $B_2$ type on a locally finite field of characteristic 2 coincide with some subfield of the main field, in particular, any irreducible carpet of $B_2$ type on a locally finite field of characteristic 2 is closed.

Keywords: additive subgroup, Chevalley group, elementary carpet, irreducible carpet, the root system.

# СОДЕРЖАНИЕ

# ВВЕДЕНИЕ

В 2011 году В. А. Койбаев построил пример незамкнутого элементарного ковра со всеми, не равными нулю, аддитивными подгруппами для типа $A_n$ на матричном языке. По определению ковер называется замкнутым, если в определенной им ковровой подгруппе не появляется новых корневых элементов. В дипломной работе А. Потаповой был построен аналогичный пример для групп Шевалле, ассоциированных с системами корней $\Phi$, все корни которых имеют одинаковую длину. В данной работе этот пример переносится на группы Шевалле типа $B_n, C_n, F_4$. В указанных выше примерах все подковры $\{\mathfrak{A}_r,\ \mathfrak{A}_{-r}\}$, $r \in \Phi$, ранга 1 замкнутые, за исключением лишь одного. Поэтому данные примеры являются "предельными" в связи со следующим известным вопросом В.М.Левчука [1]. Верно ли, что для допустимости ковра $\mathfrak{A}$ типа $\Phi$ над полем $K$ необходима и достаточна допустимость его подковров $\{\mathfrak{A}_r,\ \mathfrak{A}_{-r}\}$, $r \in \Phi$, ранга 1?

В 1983 году В.М. Левчук доказад, что, если характеристика основного поля $K > 2$, то неприводимый ковер $\mathfrak{A}$ совпадает с некоторым подполем $P$ поля $K$. Для типа $B_2$ исключительной характеристикой является 2.

Целью работы является решение следующих задач:

1. Построить примеры незамкнутых неприводимых ковров типа $B_n, C_n, F_4$ над различными классами коммутативных колец.

2. Описать неприводимые ковры типа $B_2$ над локально конечным полем характеристики 2.

## 1 Обозначения и определения

Нам потребуются следующие стандартные обозначения и определения.

Далее $K$ — коммутативное кольцо с единицей, $GL_n(K)$ — общая линейная группа (множество матриц с определителем, не равным нулю), $SL_n(K)$ — специальная линейная группа (множество матриц с определителем единица). Через

$$t_{ij}(u) = e + ue_{ij}, \quad i \neq j,$$

обозначается элементарная трансвекция, где $e$ — единичная матрица, $e_{ij}$ — матрица, у которой на позиции $(i, j)$ стоит 1, а на остальных позициях нули, элементарная подгруппа $E_n(K)$ — это подгруппа, порождённая трансвекциями

$$t_{ij}(u), \;\; u \in K, \;\; 1 \leq i \neq j \leq n.$$

**Определение 1.1.** Набор $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ называется *полным (матричным) ковром*, если:

$$\mathfrak{A}_{ik}\mathfrak{A}_{kj} \subseteq \mathfrak{A}_{ij}, \;\; 1 \leq i, j, k \leq n.$$

Множество

$$M_n(\mathfrak{A}) = \{(a_{ij}) \mid a_{ij} \in \mathfrak{A}_{ij}, 1 \leq i, j \leq n\},$$

является кольцом, относительно обычных матричных операций сложения, умножения и называется *ковровым кольцом.* Мультипликативная система

$$S_n(\mathfrak{A}) = E_n + M_n(\mathfrak{A}),$$

есть полугруппа с единицей. Максимальная подгруппа из $S_n(\mathfrak{A})$ называется *общей ковровой подгруппой* и обозначается через $GL_n(\mathfrak{A})$, а её подгруппа матриц $SL_n(\mathfrak{A})$ с определителем единица называется *специальной ковровой подгруппой.*

**Определение 1.2.** Набор аддитивных подгрупп $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_{ij} \mid 1 \leq i \neq j \leq n\}$ называется *элементарным (матричным) ковром*, если

$$\mathfrak{A}_{ik}\mathfrak{A}_{kj} \subseteq \mathfrak{A}_{ij}, \; 1 \leq i \neq j \neq k \leq n.$$

Группа $E_n(\mathfrak{A})$, порождённая трансвекциями

$$t_{ij}(u_{ij}), \;\; u_{ij} \in \mathfrak{A}_{ij}, \;\; 1 \leq i \neq j \leq n,$$

называется *элементарной (матричной) ковровой подгруппой.* Очевидно, $E_n(\mathfrak{A})$ есть подгруппа группы $SL_n(\mathfrak{A})$.

Понятие элементарного матричного ковра переносилось на группы Шевалле различными способами. В данной работе используется определение элементарного ковра для групп Шевалле, предложенное В. М. Левчуком[2].

Пусть $\Phi$ — приведённая, неразложимая система корней ранга $n$, $E(\Phi, K)$ — элементарная группа Шевалле типа $\Phi$ над коммутативным кольцом $K$ с единицей. Группа $E(\Phi, K)$ порождается своими корневыми подгруппами

$$X_r = x_r(K) = \{x_r(t) \mid r \in \Phi,\ t \in K\}.$$

Подгруппы $X_r$ абелевы для каждого $r \in \Phi$ и любых $t, u \in K$ справедливы соотношения

$$x_r(t)x_r(u) = x_r(t+u).$$

**Определение 1.3.** Назовём *элементарным ковром* типа $\Phi$ ранга $n$ над $K$ всякий набор аддитивных подгрупп

$$\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\},$$

кольца $K$ с условием

$$C_{ij,rs}\mathfrak{A}_r^i\mathfrak{A}_s^j \subseteq \mathfrak{A}_{ir+js}, \quad r,\ s,\ ir+js \in \Phi, \quad i > 0,\ j > 0,$$

где

$$\mathfrak{A}_r^i = \{a^i \mid a \in \mathfrak{A}_r\},$$

а константы $C_{ij,rs} = \pm 1, \pm 2, \pm 3$ определяются коммутаторной формулой Шевалле

$$[x_s(u), x_r(t)] = \prod_{i,j>0} x_{ir+js}(C_{ij,rs}(-t)^i u^i), \quad r,\ s,\ r+s \in \Phi.$$

Здесь и далее $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$.

Всякий ковер $\mathfrak{A}$ типа $\Phi$ над $K$ определяет *ковровую подгруппу*

$$E(\Phi, \mathfrak{A}) = \langle x_r(\mathfrak{A}_r) \mid r \in \Phi \rangle,$$

группы Шевалле $E(\Phi, K)$, где $\langle M \rangle$ — подгруппа, порождённая множеством $M$. Возникает следующий естественный вопрос: *будет ли подгруппа* $M$*, порождённая своими пересечениями* $M \cap X_r,\ r \in \Phi$*, ковровой?*

Если $\Phi = A_n, D_n, E_n$, то для любой пары линейно независимых корней $r, s$ и любых $t, u \in K$

$$[x_r(t), x_s(u)] = \begin{cases} x_{r+s}(\pm tu), \text{ если } r+s \in \Phi, \\ 1, \text{ если } r+s \notin \Phi, \end{cases}$$

и, следовательно, подгруппа $M$, порождённая пересечениями

$$M \cap X_r = x_r(\mathfrak{A}_r), \quad r \in \Phi,$$

является ковровой и определяется ковром аддитивных подгрупп $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r, \mid r \in \Phi\}$.

Однако, в общем случае, как показывает пример 1, ответ на указанный выше вопрос отрицательный.

**Пример 1.**Пусть $M$— группа Шевалле типа $B_2$ над полем характеристики 2, порожденная двумя корневыми элементами $x_a(1)$ и $x_b(1)$, где $a$ и $b$— фундаментальные корни. Тогда,

$$[x_a(1), x_b(1)] = x_{a+b}(1)x_{2a+b}(1),$$

но по отдельности элементы $x_{a+b}(1), x_{2a+b}$ не лежат в $M$ и, следовательно, $M$— не является ковровой подгруппой [3].

**Определение 1.4.** По произвольному ковру $\mathfrak{A}$ типа $\Phi$ вводим новый набор аддитивных подгрупп

$$\overline{\mathfrak{A}} = \{\overline{\mathfrak{A}}_r |\, r \in \Phi\},$$

где

$$\overline{\mathfrak{A}}_r = \{t \in K |\, x_r(t) \in E(\Phi, \mathfrak{A})\},$$

и называем его *замыканием* ковра $\mathfrak{A}$.

**Определение 1.5.** Элементарный ковёр $\mathfrak{A}$ типа $\Phi$ ранга $n$ называется *замкнутым* (в статье В. М. Левчука *допустимым*[2]), если его ковровая подгруппа $E(\Phi, \mathfrak{A})$ не имеет новых корневых элементов, то есть $\mathfrak{A} = \overline{\mathfrak{A}}$.

## 2 Пример В.А. Койбаева незамкнутого матричного ковра типа $A_n$

**Пример 2.** Пусть $F$ — произвольное поле, $F[x]$ — кольцо многочленов, $F(x)$ — поле рациональных функций. Для многочлена $f \in F[x]$ через $degf$ обозначим его степень. В поле $F(x)$ рассмотрим подкольцо

$$R = \{f/g \in F(x) \mid degg - degf \geq 4\},$$

и аддитивные подгруппы

$$A = F/x + F + R,$$

$$B = F/x^2 + F + R.$$

Определим элементарный ковёр $\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}_{ij})$ порядка $n$ следующим образом:

$$\mathfrak{A}_{12} = A,$$

$$\mathfrak{A}_{21} = B,$$

для остальных $i, j \neq 1, 2$

$$\mathfrak{A}_{ij} = R.$$

В силу определения элементарного и задания конкретного ковра $\mathfrak{A}$ при $j, k \neq 1, 2,$ должны выполнятся следующие импликации:

$$\mathfrak{A}_{12}\mathfrak{A}_{2j} \subseteq \mathfrak{A}_{1j} \Rightarrow AR \subseteq R, \tag{1}$$

$$\mathfrak{A}_{21}\mathfrak{A}_{1j} \subseteq \mathfrak{A}_{2j} \Rightarrow BR \subseteq R, \tag{2}$$

$$\mathfrak{A}_{ik}\mathfrak{A}_{kj} \subseteq \mathfrak{A}_{ij} \Rightarrow RR \subseteq R, \tag{3}$$

$$\mathfrak{A}_{1k}\mathfrak{A}_{k2} \subseteq \mathfrak{A}_{12} \Rightarrow RR \subseteq A, \tag{4}$$

$$\mathfrak{A}_{2k}\mathfrak{A}_{k1} \subseteq \mathfrak{A}_{21} \Rightarrow RR \subseteq B. \tag{5}$$

В силу задания аддитивных подгрупп $A$, $B$ и кольца $R$ включения $AR \subseteq R$, $BR \subseteq R$, $RR \subseteq R$, $RR \subseteq A$, $RR \subseteq B$ из импликаций (1)–(5) легко проверяются. Таким образом, набор $\mathfrak{A}$ является элементарным ковром. Однако, ковер $\mathfrak{A}$ не является замкнутым. Действительно, положим

$$b = t_{12}(1/x)t_{21}(1)t_{12}(-1).$$

Тогда,

$$b^{-1}t_{12}(1/x)b = t_{21}(-1/x),$$

поэтому $1/x \in (\overline{\mathfrak{A}_{21}})$, но $1/x$ не содержится в группе $\mathfrak{A}_{21} = B$. Отсюда следует, что $\mathfrak{A} \neq \overline{\mathfrak{A}}$, то есть ковёр не является замкнутым [4].

## 3 Примеры неприводимых ковров типа $B_n, C_n, F_4$ над кольцом многочленов

Любая подсистема корней ранга 2 в системах корней типов $B_n, C_n, F_4$ есть либо $A_1 \times A_1$, либо $A_2$, либо $B_2$ и выглядят следующим образом.

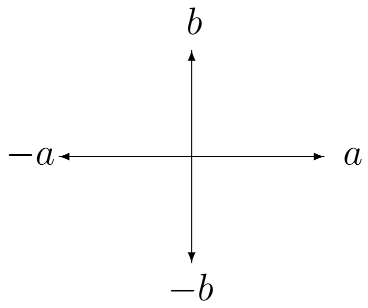


**Рисунок 1 — Тип** $A_1 \cdot A_1$

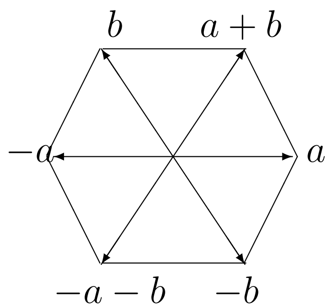


**Рисунок 2 — Тип** $A_2$

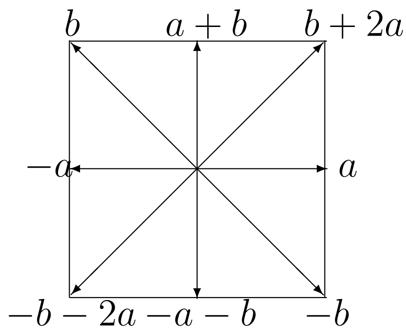


**Рисунок 3 — Тип** $B_2$

Далее $F[x]$ — кольцо многочленов над полем $F$. Множество

$$R = \{f \in F[x] \mid degf \geq 2\}$$

всех многочленов степени ни меньше двух является идеалом кольца $F[x]$.

Пусть $\Phi$ — система корней типа $B_n, C_n, F_4$, а $\Pi = \{r_1, r_2, ..., r_l\}$ — её фундаментальная система корней. Определим набор аддитивных подгрупп $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ следующим образом. Полагаем

$$\mathfrak{A}_{r_1} = A,$$

$$\mathfrak{A}_{-r_1} = B,$$

$$\mathfrak{A}_r = R, \quad r \in \Phi, \quad r \neq r_1, -r_1,$$

где

$$A = F + R,$$

$$B = F + x + R.$$

Покажем, что набор $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ является ковром.

Если сумма $r+s$ корней $r, s$ является корнем, то все три корня $r, s, r+s$ лежат в некоторой подсистеме корней ранга два системы $\Phi$. Поэтому достаточно проверить условия ковровости ля систем корней $\Phi_2$ типа $A_2, B_2$. Пусть $a, b$ — база системы корней $\Phi_2$. Справедливы следующие коммутаторные формулы для типа $A_2$

$$[x_a(t), x_b(u)] = x_{a+b}(\pm tu), \tag{6}$$

и для типа $B_2$

$$[x_a(t), x_b(u)] = x_{(a+b)}(\pm tu)x_{(2a+b)}(\pm t^2 u), \tag{7}$$

$$[x_a(t), x_{a+b}(u)] = x_{(2a+b)}(\pm 2tu). \tag{8}$$

В силу этих коммутаторных формул и определения набора $\mathfrak{A}$, причем $a$— короткий корень, должны выполняться следующие импликации.

Эти 6 импликаций дает формула (6) с заменой базы $\{a, b\}$ в системе типа $A_2$:

$$\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{a+b} \Rightarrow AR \subseteq R,$$

$$\mathfrak{A}_{a+b}\mathfrak{A}_{-b} \subseteq \mathfrak{A}_a \Rightarrow RR \subseteq A.$$

$$\mathfrak{A}_{-a}\mathfrak{A}_{-b} \subseteq \mathfrak{A}_{-a-b} \Rightarrow BR \subseteq R,$$

$$\mathfrak{A}_{-a}\mathfrak{A}_{a+b} \subseteq \mathfrak{A}_b \Rightarrow BR \subseteq R,$$

$$\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_{-a-b} \subseteq \mathfrak{A}_{-b} \Rightarrow AR \subseteq R,$$

$$\mathfrak{A}_{-a-b}\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{-b} \Rightarrow RR \subseteq R.$$

Следущие 8 импликаций дает формула (7) с заменой базы $\{a, b\}$ в системе типа $B_2$:

$$\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{a+b} \Rightarrow AR \subseteq R,$$

$$\mathfrak{A}_a^2\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{2a+b} \Rightarrow A^2R \subseteq R,$$

$$\mathfrak{A}_{-a}\mathfrak{A}_{-b} \subseteq \mathfrak{A}_{-a-b} \Rightarrow BR \subseteq R,$$

$$\mathfrak{A}_{-a}^2\mathfrak{A}_{-b} \subseteq \mathfrak{A}_{-2a-b} \Rightarrow B^2R \subseteq R,$$

$$\mathfrak{A}_{a+b}\mathfrak{A}_{-b} \subseteq \mathfrak{A}_a \Rightarrow RR \subseteq A,$$

$$\mathfrak{A}_{a+b}^2\mathfrak{A}_{-b} \subseteq \mathfrak{A}_{2a+b} \Rightarrow R^2R \subseteq A,$$

$$\mathfrak{A}_{-a-b}\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{-a} \Rightarrow RR \subseteq B.$$

$$\mathfrak{A}_{-a-b}^2\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{-2a-b} \Rightarrow R^2R \subseteq R.$$

Наконец, последние 4 импликации дает формула (8) с заменой базы $\{a,b\}$ в системе типа $B_2$:

$$2\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_{a+b}\subseteq\mathfrak{A}_{2a+b}\Rightarrow 2AR\subseteq R,$$

$$2\mathfrak{A}_{-a}\mathfrak{A}_{a+b}\subseteq\mathfrak{A}_b\Rightarrow 2BR\subseteq R,$$

$$2\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_{-a-b}\subseteq\mathfrak{A}_{-b}\Rightarrow 2AR\subseteq R,$$

$$2\mathfrak{A}_{-a}\mathfrak{A}_{-a-b}\subseteq\mathfrak{A}_{-2a-b}\Rightarrow 2BR\subseteq R,$$

Исходя из определений аддитивных подгрупп $A$, $B$ и идеала $R$ несложно показать, что включения, указанные в правой части импликаций, выполняются. Подробные выкладки опускаются. Таким образом, набор $\mathfrak{A}$ является ковром. Его незамкнутость следует из того, что

$$n_{r_1}=x_{r_1}(1)x_{-r_1}(-1)x_{r_1}(1)\in E(\mathfrak{A}),$$

а, следовательно,

$$n_{r_1}^{-1}x_{r_1}\left(1/x\right)n_{r_1}=x_{-r_1}\left(1/x\right)\in E(\mathfrak{A}).$$

Но, $\frac{1}{x}\notin\mathfrak{A}_{r_1}$ по определению аддитивной подгруппы $\mathfrak{A}_{r_1}$. Таким образом, ковер $\mathfrak{A}$ не является замкнутым [8].

## 4 Примеры незамкнутых ковров над произвольными коммутативными кольцами.

Указанный выше пример можно обобщить следующим образом.

**Пример 3.** Пусть $K$ — коммутативное кольцо с единицей $e$, обладающее ненулевым идеалом $R$ и элементом $k$, что

$$\mathbb{Z}e + R \neq \mathbb{Z}e + \mathbb{Z}k + R,$$

где $\mathbb{Z}x$ — аддитивная подгруппа кольца $K$, порожденная элементом $x$. Для системы корней $\Phi$ ранга $l \geq 2$ определим

$$\mathfrak{A}_s = \mathbb{Z}e + R,$$

$$\mathfrak{A}_{-s} = \mathbb{Z}e + \mathbb{Z}k + R$$

$$\mathfrak{A}_r = R,\ r \neq \pm s,$$

Тогда набор $\mathfrak{A}$ является незамунутым ковром. Проверка набора $\mathfrak{A}$ на ковровость и незамкнутость проводится так же как в параграфе 3. Здесь вычисления облегчает тот факт, что аддитивная подгруппа $R$ является идеалом кольца $K$. Напомним, что по определению аддитивная подгруппа $A$ есть идеал кольца $K$, если $bA \subseteq A$ для всех $b \in K$.

## 5 Неприводимые ковры аддитивных подгрупп типа $B_2$ над локально конечными полями.

Наряду с элементарной группой Шевалле $E(\Phi, K)$ будем рассматривать расширенную группу Шевалле $G(\Phi, K)$, которая является расширением группы $E(\Phi, K)$ при помощи все диагональных элементов $h(\chi)$, где $\chi$ — $K$-характер целочисленной решетки корней $\mathbb{Z}\Phi$, т. е. гомоморфизм аддитивной группы $\mathbb{Z}\Phi$ в мультипликативную группу $K^*$ кольца $K$. Любой $K$-характер $\chi$ однозначно задается значениями на фундаментальных корнях и для любых $r \in \Phi$ и $t \in K$

$$h(\chi)x_r(t)h(\chi)^{-1} = x_r(\chi(r)t). \tag{9}$$

**Лемма 1.** *Сопряженная диагональным элементом $h(\chi)$ ковровую подгруппу $E(\Phi, \mathfrak{A})$ получим ковровую подгруппу $h(\chi)E(\Phi, \mathfrak{A})h(\chi)^{-1} = E(\Phi, \mathfrak{A}')$, определяемую ковром $\mathfrak{A}' = \{\mathfrak{A}'_r \mid r \in \Phi\}$, где $\mathfrak{A}'_r = \chi(r)\mathfrak{A}_r$.*

**Доказательство.** В силу (9) группа $h(\chi)E(\Phi, \mathfrak{A})h(\chi)^{-1}$ порождается подгруппами $x_r(\chi(r)\mathfrak{A}_r)$, $r \in \Phi$. Очевидно, условие ковровости дает включения

$$C_{ij,rs}\chi(r)^i\mathfrak{A}_r^i\chi(s)^j\mathfrak{A}_s^j \subseteq \chi(r)^i\chi(s)^j\mathfrak{A}_{ir+js}, \quad r, s, ir + js \in \Phi,\ i, j > 0.$$

Отсюда в силу определения аддитивных подгрупп $\mathfrak{A}'_r$, $r \in \Phi$, получаем условие ковровости

$$C_{ij,rs}(\mathfrak{A}'_r)^i(\mathfrak{A}'_s)^j \subseteq \mathfrak{A}'_{ir+js}, \quad r, s, ir + js \in \Phi,\ i, j > 0,$$

для набора аддитивных подгрупп $\mathfrak{A}'$. Лемма доказана.

**Лемма 2.** *Пусть $\{a, b\}$ — база системы корней $\Phi$ типа $B_2$, $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ — неприводимый ковер над локально конечным полем, причем $1 \in \mathfrak{A}_a \cap \mathfrak{A}_b$. Тогда $\mathfrak{A}_r = P$, $r \in \Phi$, для некоторого подполя $P$ поля $K$.*

**Доказательство.** Если $char K > 2$, то это установлено в [[5], следствие 3.2]. Поэтому далее будем рассматривать $char K = 2$. Для наглядности выпишем еще раз коммутаторные формулы Шевалле для типа $B_2$:

$$[x_a(t), x_b(u)] = x_{(a+b)}(\pm tu)x_{(2a+b)}(\pm t^2u), \tag{10}$$

$$[x_a(t), x_{a+b}(u)] = x_{(2a+b)}(\pm 2tu). \tag{11}$$

Очевидно, в случае $char K = 2$ рабочей является только формула (10), так как формула (11) вырождается. Нам потребуется следующие условия ковровости, которые определяются коммутаторной формулой (10) и аналогичными ей:

$$\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{a+b}, \tag{12}$$

$$\mathfrak{A}_a^2\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{2a+b}, \tag{13}$$

$$\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_{-2a-b} \subseteq \mathfrak{A}_{a-b} \tag{14}$$

$$\mathfrak{A}_a^2\mathfrak{A}_{-2a-b} \subseteq \mathfrak{A}_{-b} \tag{15}$$

$$\mathfrak{A}_{a+b}\mathfrak{A}_{-2a-b} \subseteq \mathfrak{A}_{-a} \tag{16}$$

$$\mathfrak{A}_{a+b}^2\mathfrak{A}_{-2a-b} \subseteq \mathfrak{A}_b \tag{17}$$

$$\mathfrak{A}_{a+b}\mathfrak{A}_{-b} \subseteq \mathfrak{A}_a \tag{18}$$

$$\mathfrak{A}_{a+b}^2\mathfrak{A}_{-b} \subseteq \mathfrak{A}_{2a+b} \tag{19}$$

$$\mathfrak{A}_{-a}\mathfrak{A}_{2a+b} \subseteq \mathfrak{A}_{a+b} \tag{20}$$

$$\mathfrak{A}_{-a}^2\mathfrak{A}_{2a+b} \subseteq \mathfrak{A}_b \tag{21}$$

$$\mathfrak{A}_{-a}\mathfrak{A}_{-b} \subseteq \mathfrak{A}_{-a-b} \tag{22}$$

$$\mathfrak{A}_{-a}^2\mathfrak{A}_{-b} \subseteq \mathfrak{A}_{-2a-b} \tag{23}$$

$$\mathfrak{A}_{-a-b}\mathfrak{A}_{2a+b} \subseteq \mathfrak{A}_a \tag{24}$$

$$\mathfrak{A}_{-a-b}^2\sigma_{2a+b} \subseteq \mathfrak{A}_{-b} \tag{25}$$

$$\mathfrak{A}_{-a-b}\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{-a} \tag{26}$$

$$\mathfrak{A}_{-a-b}^2\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{-2a-b} \tag{27}$$

В силу условий (12) — (13) и предположения $1 \in \mathfrak{A}_a \cap \mathfrak{A}_b$ получаем следующие включения: $\mathfrak{A}_a \subseteq \sigma_{a+b}$, $\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{a+b}$, $\mathfrak{A}_a^2 \subseteq \mathfrak{A}_{2a+b}$, $\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{2a+b}$. Следовательно, $1 \in \mathfrak{A}_r$, при $r \in \Phi^+$. Также, в силу условий (14), (15), (26), (27) и предположения $1 \in \mathfrak{A}_a \cap \mathfrak{A}_b$ получаем следующие включения:

$$\mathfrak{A}_{-2a-b} \subseteq \mathfrak{A}_{-a-b}, \tag{28}$$

$$\mathfrak{A}_{-a-b} \subseteq \mathfrak{A}_{-a}, \tag{29}$$

$$\mathfrak{A}_{-2a-b} \subseteq \mathfrak{A}_{-b}, \tag{30}$$

$$\mathfrak{A}_{-a-b}^2 \subseteq \mathfrak{A}_{-2a-b}. \tag{31}$$

В силу включений 28 и 31 справедливо

$$\mathfrak{A}_{-2a-b}^2 \subseteq \mathfrak{A}_{-2a-b}, \tag{32}$$

а в силу включений (28), (29), (30) справедливо

$$\mathfrak{A}_{-2a-b}^2\mathfrak{A}_{-2a-b} \subseteq \mathfrak{A}_{-2a-b}. \tag{33}$$

Пусть $t \in \mathfrak{A}_{-2a-b}$. Из (32) и (33) следует, что $t^2 \in \mathfrak{A}_{-2a-b}$ и соответственно $t^3 \in \sigma_{-2a-b}$. Далее по индукции получаем, что $t^n \in \mathfrak{A}_{-2a-b}$ для любого натурального $n$. Таким образом, все многочлены от $t$ с коэффициентом из простого подполя $F_2$, составляющие кольцо, включаются в $\mathfrak{A}_{-2a-b}$. Так как любое кольцо локально конечного поля является полем, то $\mathfrak{A}_{-2a-b}$ есть объединение конечных полей. Возведение в квадрат в конечном поле характеристики 2 является автоморфизмом, следовательно, $\mathfrak{A}^2_{-2a-b} = \mathfrak{A}_{-2a-b}$. Теперь в силу (33) $\mathfrak{A}_{-2a-b}$ является кольцом, а в силу локальной конечности основного поля $K$ – полем, обозначим его через $Q$. Сейчас из включений типа (12), (13) следует, что $1 \in \mathfrak{A}_r$ при $r \in \Phi^-$. Таким образом, мы получили, что 1 содержится во всех аддитивных подгруппах $\mathfrak{A}_r$, $r \in \Phi$. Из включений типа (13), мы можем заключить, что все аддитивные подгруппы, индексированные длинными корнями совпадают с полем $Q$.

Покажем, что аддитивные подгруппы, индексированные короткими корнями, также являются полями и совпадают между собой. В силу условий (17) и (18) справедливо

$$\mathfrak{A}^2_{a+b} \subseteq \mathfrak{A}_b, \tag{34}$$

$$\mathfrak{A}_{a+b} \subseteq \mathfrak{A}_a. \tag{35}$$

В силу этих включений справедливо

$$\mathfrak{A}_{a+b}\mathfrak{A}^2_{a+b} \subseteq \mathfrak{A}_{a+b}, \tag{36}$$

$$\mathfrak{A}^2_{a+b} \subseteq \mathfrak{A}_{a+b}. \tag{37}$$

Сейчас, также как и для аддитивной подгруппы $\mathfrak{A}_{-2a-b}$ аналогично получаем, что $\mathfrak{A}_{a+b}$ является полем, обозначим его через $P$. Из включений типа (12), мы можем заключить, что все аддитивные подгруппы, индексированные короткими корнями, совпадают с полем $P$. Далее следует показать, что поля $Q$ и $P$ совпадают. Из условий (12) и (13) справедливы включения

$$\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{a+b}, \tag{38}$$

$$\mathfrak{A}^2_a \subseteq \mathfrak{A}_{2a+b}. \tag{39}$$

Из этого следует, что $Q \subseteq P$ и $P^2 \subseteq Q$. Возведение в квадрат в конечном поле характеристики 2 является автоморфизмом, следовательно, $P^2 = P$. Поэтому $P \subseteq Q$. Таким образом, поля $Q$ и $P$ совпадают. Лемма 2 доказана.

Леммы 1 и 2 дают следующую теорему.

**Теорема 1.** *Пусть $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ — неприводимый ковер типа $B_2$ над локально конечным полем $K$. Тогда с точностью до сопряжения диагональным элементом из расширенной группы Шевалле $G(\Phi, K)$ все аддитивные подгруппы $\mathfrak{A}_r$, $r \in \Phi$, совпадают с некоторым подполем $P$ поля $K$, в частности, ковер $\mathfrak{A}$ замкнут.*

Отметим, что утверждение теоремы отмечается в [[5], следствие 3.2] в качестве следствия из более общего результата, исключая случаи, когда характеристика равна 2.

Следующий пример из книги Стейнберга «Лекции о группах Шевалле» [6, §10, с. 144.] показывает, что существует неприводимый ковер типа $B_2$ над

несовершенными полями с различными аддитивными подгруппами, как бы мы не сопрягали диагональными элементами (см. также [7]).
**Пример 4.** Пусть $K$ — несовершенное поле характеристики $p$. Множество $p$-х степеней его элементов $K^p$ является собственным подполем поля $K$. Пусть $p = 2$ при $\Phi = B_2$. Положим

$$\mathfrak{A}_r = \begin{cases} K, & \text{если r — короткий корень,} \\ K^p, & \text{если r — длинный корень.} \end{cases}$$

Тогда набор $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ однозначно определяет подгруппу $\Phi(\mathfrak{A})$ порожденную корневыми подгруппами $x_r(\mathfrak{A}_r)$, то есть она не содержит новых корневых элементов.

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В магистерской диссертации получены следующие результаты:

1. Построены примеры незамкнутых неприводимых ковров типа $B_n, C_n, F_4$ над различными классами коммутативных колец с единицей.

2. Доказано, что с точностью до сопряжения диагональным элементом из расширенной группы Шевалле все аддитивные подгруппы неприводимого ковра типа $B_2$ над локально конечным полем характеристики 2 совпадают с некоторым подполем основного поля, в частности, любой неприводимый ковер типа $B_2$ над локально конечным полем характеристики 2 замкнут.

**Апробация работы.** Основные результаты исследования докладывались и обсуждались

1. на X Юбилейной Всероссийской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «МОЛОДЕЖЬ И НАУКА» с международным участием, посвященной 80-летию образования Красноярского края (Красноярск, 2014),

2. на Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «МОЛОДЕЖЬ И НАУКА: проспект Свободный-2015» посвященной 70-летию Великой Победы (Красноярск, 2015).

**Публикации.** По результатам научных исследований опубликовано 4 работы [8], [9], [10], [11].

# СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Коуровская тетрадь. Нерешенные Вопросы теории групп. 17-е изд. /—ИМ СО РАН.—Новосибирск—2010. — № 17.—С.219.

2 Левчук, В. М. Параболические подгруппы некоторых ABA-групп. / В. М. Левчук // Матем. заметки.—Красноярск, 1982.—Т. 31, № 4.—С. 509—525.

3 Нужин , Я. Н. Факторизация ковровых подгрупп групп Шевалле над коммутативными кольцами. / Я. Н. Нужин // Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics.—Красноярск, 2011.—Т. 4, № 4.—С. 527—535.

4 Койбаев, В. А. Элементарные сети в линейных группах / В. А. Койбаев // Труды ИММ УрО РАН.— Ижевск, 2011.—Т. 17, № 4.— С. 134—141.

5 Левчук, В. М. О порождающих множествах корневых элементов групп Шевалле над полем / В. М. Левчук // Алгебра и логика.—1983.—Т. 22, № 5.—С. 504–517.

6 Стейнберг, Р. Лекции о группах Шевалле / Р. Стейнберг. — Москва: Мир,1975.— 261с.

7 Нужин, Я. Н. . Группы, лежищие между группами Шевалле типа $B_l, C_l, F_4, G_2$ над несовершенными полями характеристики 2 и 3. / Я. Н. Нужин // — Сиб. матем. журн.— 2013.—Т. 54 № 1.—С. 157—162.

8 Куклина, С. К. Примеры незамкнутых ковров аддитивных подгрупп / С. К. Куклина , А. О. Лихачева // Сибирский Федеральный Университет.—Красноярск, 2014.—С. 80.

9 Лихачева, А. О. О замкнутости ковров типа $B_2$ над коммутативными кольцами / А. О. Лихачева // Сибирский Федеральный Университет. — Красноярск,2015.— С. 13—14.

10 Куклина, С. К. Примеры незамкнутых ковров / С. К. Куклина , А. О. Лихачева, Я. Н. Нужин // Алгебра и приложения: Труды Международной конференции по алгебре, посвященной 100-летию со дня рождения Л.А. Калужнина.— Нальчик, 2014. —С. 74—77.

11 Куклина, С. К. О замкнутости ковров лиева типа над коммутативными кольцами / С. К. Куклина , А. О. Лихачева, Я. Н. Нужин // Труды ИММ УрО РАН.— Екатеринбург, 2015. —Т. 21, № 3.—С.192—197.