Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Институт математики и фундаментальной информатики
Кафедра алгебры и математической логики

**УТВЕРЖДАЮ**
Заведующий кафедрой
________ / В.М. Левчук
«21» 06. 2016 г.

# БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

**Направление** 01.03.01 Математика

## ГИПЕРЦЕНТРАЛЬНЫЕ АВТОМОРФИЗМЫ УНИПОТЕНТНЫХ ПОДГРУПП ГРУПП ШЕВАЛЛЕ

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор ________ / В.М.Левчук
21.06.2016

Выпускник ________ / Шаршенбеков К.К.
21.06.2016.

Красноярск 2016

## РЕФЕРАТ

Выпускная квалификационная работа по теме «Гиперцентральные автоморфизмы унипотентных подгрупп групп Шевалле» содержит 19 страниц текста, 1 рисунок, 10 использованных источника.

ГИПЕРЦЕНТРАЛЬНЫЕ АВТОМОРФИЗМЫ,АЛГЕБРА И ГРУППЫ ШЕВАЛЛЕ,УНИПОТЕНТНАЯ ПОДГРУППА,ЦЕНТРАЛЬНЫЕ РЯДЫ.

Цель работы – является исследование гиперцентральных автоморфизмов групп $U$.

В результате исследования показаны доказательства некоторых гиперцентральных автоморфизмов.

# СОДЕРЖАНИЕ

# ВВЕДЕНИЕ

Работа связана с построениями гиперцентральных автоморфизмов некоторых нильпотентных линейных групп, котороые, по определению, тождественны по модулю центра, определенного $m$-го гиперцентра, и является внешними по модулю $m$-го гиперцентра.

Точные определения таких автоморфизмов групп и аналогично алгебра Ли приведены в § 1. Впервые это понятие встречается в работе В.М.Левчука [2] при выявлении нестандартных автоморфизмов унипотентных подгрупп $U = U\Phi(K)$ групп Шевалле, ассоциированных с системой корней $\Phi$ и полем коеэффициентов $K$. Оказалось, что в найденном при $2K = K$ описании Дж.Гиббс ($J.Algebra, 1970$) автоморфизмов $U$ нестандартные автоморфизмы по существу исчерпываются одним типом гиперцентральных автоморфизмов (исключительные автоморфизмы Гиббса). Согласно [2], при 2K=0 нестандартные автоморфизмы составляют широкий класс, систематизированный с помощью гиперцентральных автоморфизмов различной высоты.

Эффективно гиперцентральные автоморфизмы использовалось позднее и при описании автоморфизмов ассоциированных с $U$ колец Ли $N\Phi(K)$.

Нашей целью является исследование гиперцентральных автоморфизмов групп $U$.

В теореме 2 полностью исследован автоморфизм Гиббса группы $U$. Показано инвариантность основных соотношений в § 3 относительно автоморфизма Гиббса в [2]. Используя холловские соотношения в § 1 доказали, что автоморфизм Гиббса в [2] действительно является автоморфизмом.

Для построения некоторых гиперцентральных автоморфизмов групп $U\Phi(K)$ симплектического типа $C_n$ в § 5 рассматривалось специальное матричное представление групп $U\Phi(K)$ классических типов. В леммах 7,8 и 9 записаны нижний и верхний (или гиперцентральный) центральыне ряды.

# 1 Гиперцентральные автоморфизмы групп и колец Ли

**Определение 1.** Для элементов $x, y$ группы $G$ элемент $x^{-1}y^{-1}xy$ называется *коммутатором.* Далее используем обозначения

$$[x, y] := x^{-1}y^{-1}xy, \quad a^x := x^{-1}ax.$$

Если $A$ и $B$ - подгруппы, то взаимный коммутант $[A, B]$ - подгруппа, порожденная коммутаторами $[a, b]$ всевозможных элементов $a \in A$, $b \in B$. Более сложные коммутаторы определяют рекуррентно:

$$[x_1, ..., x_{n-1}, x_n] = [[x_1, ..., x_{n-1}], x_n].$$

Следующие важные тождества сложных коммутаторов, непосредственно вытекающие из определений, выписаны в [5]:

$$[y, x] = [x, y]^{-1}, \tag{1}$$

$$[xy, z] = [x, z]^y[y, z] = [x, z][x, z, y][y, z], \tag{2}$$

$$[x, yz] = [x, z][x, y]^z = [x, z][x, y][x, y, z], \tag{3}$$

$$[x, y^{-1}, z]^y[y, z^{-1}, x]^z[z, x^{-1}, y]^x = 1, \tag{4}$$

$$[x, y, z][y, z, x][z, x, y] = [y, x][z, x][z, y]^x[x, y][x, z]^x[x, z][z, x]^y. \tag{5}$$

Аналогично группам в произвольном кольце Ли $R$ вводят нижний центральный ряд

$$R = \Gamma_1 \supseteq \Gamma_2 \supseteq \cdots \supseteq \Gamma_n \supseteq \cdots \ , \qquad \Gamma_{n+1}(R) := [\Gamma_n(R), R] \ (n \geq 1),$$

и верхний центральный или *гиперцентральный* ряд

$$0 = Z_0 \subseteq Z_1 \subseteq Z_2 \subseteq \cdots, \qquad Z_{i+1}(R) := \{g \in R \mid [g, R] \subseteq Z_i(R)\} \ (i \geq 0).$$

Группу $R$ называют нильпотентной ступени нильпотентности $m$, если для нее $\Gamma_m \neq 1$ и $\Gamma_{m+1} = 1$ (равносильно , $Z_{m-1} \neq R$ и $Z_m = R$ ), [5].

Нильпотентность и ступень нильпотентности алгебры Ли определяется аналонично.

Автоморфизм группы или алгебры Ли называют центральным, если он действует тождественно по модулю центра. Понятие центрального автоморфизма обобщается в

[2]. *Автоморфизм группы или алгебры Ли $R$, являющийся единичным по модулю $m$-го гиперцентра и внешним автоморфизмом по модулю $(m-1)$-го гиперцентра, называем гиперцентральным высоты $m$ или, кратко, гиперцентральным автоморфизмом, когда $R$ не совпадает с $m$-м гиперцентром.*

Далее мы будем рассматривать некоторые гиперцентральные автоморфизмы унипотентных подгрупп лиева типа и вопрос об их наивысшей высоте.

## 2 Алгебры и группы Шевалле

Алгебру Шевалле $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}$ над полем $C$ комплексных чисел, ассоциированную с системой корней $\Phi$, характеризуют базисом Шевалле, состоящим из элементов $e_r$ $(r \in \Phi)$ и определенных элементов вида $h_r := [e_r e_{-r}]$ из подалгебры Картана [1].

Через $\Pi$ и $\mathit{\Phi}^+$ обозначаем соответственно, базу и систему положительных корней $\mathit{\Phi}$. Тогда

$$\{e_r(r \in \mathit{\Phi}), h_s(s \in \Pi)\} \tag{6}$$

– база алгебры $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}$. Шевалле доказал существование базы (6) с целочисленными структурными константами, используя числа $p = p(r,s)$. [3, Лемма 2.12],числа Картана и константы:

$$A_{rs} = 2(r,s)/(r,r), \quad N_{rs} = \pm(p(r,s)+1), \quad r, s, r+s \in \mathit{\Phi}.$$

**Теорема Шевалле о базисе.** Базу (1) в $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}$ можно выбрать так, что

$$[h_r h_s] = 0; \quad [h_r e_s] = A_{rs} e_s; \quad [e_r e_{-r}] = h_r;$$

$$[e_r e_s] = 0, \quad r+s \notin \cup\{0\}; \tag{7}$$

$$[e_r e_s] = N_{r,s} e_{r+s},$$

**Замечание 1.** Как показано в [1, предложение 4.2.2.], знаки структурных констант $N_{rs}$ $= \pm\ (p(r,s)+1)$ можно выбрать произвольно для экстраспециальных пар $(r,s)$ и тогда в остальных случаях знаки определяются однозначно. Пара корней $(r,s)$ называется экстраспециальной, если $r$,$s$,$r+s \in \mathit{\Phi}^+$ и для всякой пары $r_1, s_1 \in \mathit{\Phi}^+$ с условием $r_1 + s_1 =$ $r+s$ имеем $r \preceq r_1$.

Целочисленность структурных констант позволяет перейти к произвольному полю (или даже ассоциативно-коммутитивному кольцу) коэффициентов $K$.

**Определение 2.** Алгебру $\mathcal{L}_\mathcal{K}$ над полем $K$ с базой (6) и умножением (7) называем *алгеброй Шевалле типа $\Phi$ над $K$*, а её базу (6) - *базой Шевалле.*

Подалгебру $N\Phi(K)$ с базой $\{e_r \mid r \in \Phi^+\}$ называют *нильтреугольной.*

Группы Шевалле выделяют как подгруппы группы автоморфизмов алгебры Шевалле по следующей схеме. Линейное преобразовние $\delta$ алгебры Ли называется *нильпотентным*, если $\delta^m = 0$ для некоторого $m \geq 1$. Линейное преобразовние $\delta$ называют *дифференцированием*, если $\delta[x, y] = [\delta x, y]+[x, \delta y]$; пример дает преобразование $ad\ x : y \to [xy]$.

**Лемма 1.** Если $\delta$ - нильпотентное дифференцирование алгебры Ли над полем характеристики 0, то

$$exp\ \delta\ = \sum_{k\geq 0} \frac{\delta^k}{k!}\ = 1\ +\ \delta\ +\ \frac{\delta^2}{2!}\ +\ \frac{\delta^3}{3!}\ +\ ...$$

есть автоморфизм алгебры *и* $exp\ \delta \cdot exp(-\delta) = 1.$

*Доказательство.* Ясно, что $exp\delta$ - линейное преобразование и обратным у нему является преобразование $exp(-\delta)$. Завершают доказательство равенства

$$exp\delta[x, y] = \sum_{k\geq 0} \sum_{i+j=k,i,j\geq 0} [\frac{\delta^i}{i!}x, \frac{\delta^j}{j!}y] =$$

$$= \sum_{i,j\geq 0} [\frac{\delta^i}{i!}x, \frac{\delta^j}{j!}y] = [exp\delta(x), exp\delta(y)].$$

Для алгебры Шевалле $\mathcal{L}_\mathcal{K}$ типа $\Phi$ над полем $K$ всякое дифференцирование $t\ ad\ e_r$ ($r \in \Phi$,$t \in K$) нильпотентно. Когда $K = C$, по лемме 1. и теореме Шевалле о базисе $x_r(t)$ $= exp\ (t\ ad\ e_r)$ есть автоморфизм алгебры Шевалле, действующий на базисе Шевалле по правилу

$$x_r(t) : e_r \to e_r, h_s \to h_s - tA_{sr}e_r(s \in \Pi),$$

$$e_{-r} \to e_{-r} + th_r - t^2e_r,$$

$$e_s \to \sum_{i=0}^{q} M_{r,s,i}t^i e_{ir+s}(s \in \Phi\pm r), \quad M_{r,s,0} := 1,$$

$$M_{r,s,i} := \frac{1}{i!} N_{r,s}N_{r,r+s}...N_{r,(i-1)r+s} = \pm(\begin{matrix} p(r, s) + i \\ i \end{matrix}).$$

Матрица автоморфизма имеет элементами многочлены от $t$ с целочисленными коэффициентами и поэтому ее определитель равен $\pm 1$. Следовательно, автоморфизм $x_r(t)$

алгебры Шевалле $\mathcal{L}_K$ над любым полем $K$ определен корректно указанным действием на базисе Шевалле.

**Определение 3.** Подгруппу $\varPhi(K) = <x_r(t) \mid r \in \varPhi,\ t \in K>$ группы автоморфизмов алгебры Шевалле $\mathcal{L}_K$ называют *группой Шевалле типа $\varPhi$ над $K$*.

Шевалле установил коммутаторную формулу ($[a,b] = a^{-1}b^{-1}ab$ - коммутатор в группе):

$$[x_s(u), x_r(t)] = 1 \quad (u, t \in K), \quad r, s \in \varPhi^+, \quad r + s \notin \varPhi \cup \{0\},$$

$$[x_s(u), x_r(t)] = \prod_{i,j>0} x_{ir+js}(C_{ij,rs}(-t)^i u^j), \quad r, s, r+s \in \varPhi,$$

где сомножители расположены в соответствии с возрастанием корней $ir + js \in \varPhi$. Число сомножителей равно 1, 1 или 2, наконец, 1,3 или 4, соответственно типу $A_2$, $B_2$ или $G_2$ подсистемы корней $\varPhi(r,s)$ в $\varPhi$. Константы $C_{ij,rs}$ есть целые числа:

$$C_{i1,rs} = M_{r,s,i}, \quad C_{1j,rs} = (-1)^j M_{s,r,j},$$

$$C_{32,rs} = 1/3 M_{r+s,r,2}, \quad C_{23,rs} = -2/3 M_{r+s,s,2}.$$

В частности, $C_{11,rs} = N_{r,s}$ и $|C_{ij,rs}|$=1,2 или 3.

Отображение $x_r : t \to x_r(t)$ ($t \in$ K) является гомоморфизмом аддитивной группы ($K$,+) кольца $K$ на корневую подгруппу $X_r = x_r(K)$ и даже изоморфизмом, поскольку $x_r(t) \neq 1$ при $t \neq 1$. В частности, $X_r \simeq (K,+)$ и корневые подгруппы $X_r$ порождают группу Шевалле $\varPhi(K)$ типа $\varPhi$ над полем $K$.

## 3 Унипотентная подгруппа $U$ группы Шевалле и ассоциированная алгебра Ли

Унипотентную подгруппу $U$ группы Шевалле типа $\varPhi$ над $K$ определяют по правилу

$$U = U\varPhi(K) = <X_r \mid r \in \varPhi^+>.$$

Коммутаторная формула Шевалле [1] позволяет выписать все основные соотношения в группе $U$. Как отмечалось выше,

$$x_r(u)x_r(t) = x_r(u+t) \quad (u, t \in K, r \in \varPhi^+). \tag{8}$$

**Лемма 2.** *Основные соотношения в группе $U$ дают соотношиния (8) и соотношения:*

$$[x_s(u), x_r(t)] = 1 \quad (u, t \in K), \quad r, s \in \varPhi^+, \quad r + s \notin \varPhi^+; \tag{9}$$

$$[x_s(u), x_r(t)] = \prod\nolimits_{i,j>0} x_{ir+js}(C_{ij,rs}(-t)^i u^j), \quad r, s, r+s \in \varPhi^+. \tag{10}$$

Всякий элемент $A$ группы $U\varPhi(K)$ допускает "каноническое"разложение в произведение корневых элементов $x_r(t_r)$, $r \in \varPhi^+$, расположенных соответственно фиксированному (произвольно) упорядочению корней [3, Лемма 3.10]. Полагая $\pi(A) = \sum_{r\in\varPhi^+} t_r e_r$ $(A \in U\varPhi(K))$, получаем биективное отображение $\pi : U\varPhi(K) \leftrightarrow N\varPhi(K)$. Присоединенное умножение

$$\alpha \circ \beta = \pi(\pi^{-1}(\alpha)\pi^{-1}(\beta)) \quad (\alpha, \beta \in N\varPhi(K))$$

дает представление унипотентной подгруппы $U\varPhi(K)$ присоединенной группой $(N\varPhi(K), \circ)$ с корневыми подгруппами $Ke_r$. Вместо $\circ$ в произведении пишем также $+$, когда сомножители не зависят от выбора $\pi$.

В алгебре Ли $N\Phi(K)$ и в присоединенной группе *стандартным центральным* называют ряд

$$L_1 \supset L_2 \supset \cdots \supset L_{h-1} \supset L_h = 0,$$

$$L_i := \langle Ke_r | \ r \in \Phi^+, \ ht(r) \geq i \rangle \quad (1 \leq i \leq h-1).$$

Как в [1] используем функцию высоты $ht(r)$ на корнях $r$ системы $\Phi$, максимальный корень $\rho$ и число Кокстера $h := ht(\rho) + 1$. Полагаем $p(\Phi) := max\{(r,r)/(s,s) \mid r, s \in \Phi\}$. По аналогии с [2, Лемма 1] справедлива

**Лемма 3.** *Верхний и нижний центральные ряды кольца Ли $N\Phi(K)$ и его присоединенной группы совпадают при $p(\Phi)!K = K$ с её стандартным центральным рядом:* $\Gamma_i = L_i = Z_{h-i}$ $(1 \leq i \leq h)$.

Центральные ряды кольца Ли $NB_n(K)$ при $2K \neq K$ строятся сложнее. Мы используем представление из [2] алгебр $N\Phi(K)$ классических типов специальными матрицами.

## 4 Гиперцентральный автоморфизм Гиббса группы $U$

Лемма 2 упрощает проверку автоморфности преобразований группы $U$ и позволяет определять автоморфизмы образами корневых элементов. Справедлива

**Лемма 4.** *Отображение $\varphi$ всех корневых элементов $x_r(t)$ в $U$ продолжается до автоморфизма группы $U$ тогда и только тогда, когда $\varphi$ сохраняет её основные соотношения (8),(9) и (10). Если такое продолжение существует, то оно единственное.*

Ограничения корневых автоморфизмов $x_r(t)$ при $r \in \Phi^+$ дают автоморфизмы алгебры $N\Phi(K)$, порождающие подгруппу *внутренних автоморфизмов*, изоморфную фактор-группе унипотентной подгруппы $U\Phi(K)$ по центру.

К основным стандартным автоморфизмам алгебр и групп Шевалле относят также диагональные и графовые автоморфизмы [10], [1] и [9], а для алгебр $N\Phi(K)$ см. также [2], [7] и [8]. Автоморфизмы, порождаемые основными стандартными автоморфизмами, называют *стандартными*.

Гиббс [4] построил единообразно нестандартный автоморфизм групп $U$ всех типов над полем $K = 2K = 3K$ названный экстремальным или исключительным. В [2] он назывался автоморфизмом Гиббса и было показано, что это гиперцентральный автоморфизм наименьшей высоты унипотентных подгрупп $U$ над произвольным полем $K$. Доказательства его автоморфности в [4] и [2], как правило отсутствуют. В этом параграфе мы приведем полное доказательсво.

Для любого кольца $K$ будем рассматривать преобразование с условием:

$$(u+t)^\lambda = u^\lambda + t^\lambda + N_{sq}dut \quad (u, t \in K). \tag{11}$$

Известно, что в каждой системе корней $\varPhi$ существует простой корень $q$ и корень $s$ такие, что $s + q$ – максимальный корень. Такие корни $q, s$ определены однозначно, кроме типа $A_n$

**Теорема 2.** *Для любого преобразования $\lambda$ кольца $K$ с условием (11) отображение $\varphi$*

$$x_q(t) \to x_q(t)x_s(dt)x_{s+q}(t^\lambda), \quad d = N_{sq}(2^\lambda - 2(1^\lambda)) \tag{12}$$

*(остальные корневые элементы остаются на месте) определяет автоморфизм группы $U$.*

*Доказательство.* Ясно, что при $2K = 0$ отображение (12) - центральный автоморфизм, т.е. действующий тождественно по модулю центра.

Как и в [1, § 8.1, стр. 104], для любого простого корня $r \in \Pi$ будем использовать произведение корневых подгрупп

$$U_r = \Pi_{s \in \varPhi^+ \setminus \{r\}} X_s,$$

где произведение берется по всем положительным корням $s$ в порядке возрастания. Коммутаторная формула Шевалле показывает, что $U_r$ – подгруппа в $U$ и корневые подгруппы в произведении можно брать в произвольном порядке.

Если $g = x_{r_1}(t_1)...x_{r_m}(t_m)$ и $\varphi$ – произвольный автоморфизм, то

$$\varphi(g) = \varphi(x_{r_1}(t_1)...x_{r_m}(t_m) = \varphi(x_{r_1}(t_1))\varphi(x_{r_1}(t_1))...\varphi(x_{r_m}(t_m)).$$

Далее замечаем, что выбранное как и в теореме отображение $\varphi$ действует тождественно на всех корневых подгруппах из $U_q$, а следовательно, и на самой подгруппе $U_q$.

Проверим инвариантность соотношения (8) относительно $\varphi$.

Если $r \neq q$, то $\varphi$ не изменяет соотношений $x_r(u)x_r(t)=x_r(u+t)$. Проверим равенства

$$x_q^{\varphi}(u)x_q^{\varphi}(t) = x_q(u+t)^{\varphi}. \tag{13}$$

Правую часть здесь можем сразу записать в каноническом виде

$$x_q(u+t)^{\varphi} = x_q(u+t)x_s(d(u+t))x_{s+q}((u+t)^{\lambda}).$$

Левая часть в (13) имеет вид

$$(x_q(u)x_s(du)x_{s+q}(u^{\lambda}))(x_q(t)x_s(dt)x_{s+q}(t^{\lambda})). \tag{14}$$

Будем преобразовывать (14) к каноническому виду. Согласно [3, Лемма 3.10], упорядочение корней при этом можем считать регулярным, то есть корни меньшей высоты будут меньше корней большей высоты. Используя соотношения $AB = BA[A,B]$, $[A,B] = A^{-1}B^{-1}AB$, и коммутатор $[x_s(du), x_q(t)] = x_{s+q}(N_{sq}(dt)u)$, найдем каноническое разложение (14).

$$x_q(u)x_s(du)x_{s+q}(u^{\lambda})x_q(t)x_s(dt)x_{s+q}(t^{\lambda}) =$$

$$= x_q(u)x_s(du)x_q(t)x_s(dt)x_{s+q}(u^{\lambda})x_{s+q}(t^{\lambda}) =$$

$$= x_q(u)x_q(t)[x_s(du)x_q(t)]x_s(du)x_s(dt) =$$

$$= x_q(u+t)x_s(d(u+t))[x_s(du), x_q(t)]x_{s+q}((u+t)^{\lambda}) =$$

$$= x_q(u+t)x_s(d(u+t))x_{s+q}(N_{sq}(dt)u)x_{s+q}((u+t)^{\lambda}) =$$

$$= x_q(u+t)x_s(d(u+t))x_{s+q}(u^{\lambda} + t^{\lambda} + N_{sq}(dut)).$$

В силу (11), оно совпадает с каноническим разложением правой части (14). Таким образом, инвариантность относительно $\varphi$ соотношений (8) доказана.

Выясним, сохраняются ли соотношения (9) и (10), то есть выполняются ли равенства

$$[x_m(u), x_n(t)]^{\varphi} = [(x_m(u))^{\varphi}, (x_n(t))^{\varphi}], \quad n, m \in \Phi^{+}. \tag{15}$$

По доказанному выше, $\varphi$ единичен на $L_2 \subset U_q$. Поэтому левая часть (15) не изменится после отбрасывания в ней $\varphi$.

Если $m \neq q$ и $n \neq q$, то правая часть также не изменяется после отбрасывания в ней $\varphi$, в силу определения $\varphi$. Когда $m = n = q$, соотношение (15) следует из равенства (13), показывающего гомоморфность $\varphi$ на корневой подгруппе $X_q$.

Остается рассмотреть случай, когда точно один из корней $m$ и $n$ равен $q$. Не теряя общности, можно считать $m = q$ и $n \neq q$. Как отмечалось выше, $\varphi$ имеет тождественное продолжение на подгруппу $U_q$. Кроме того, $(x_n(t))^{\varphi} = x_n(t)$. Поэтому проверка (15) сводится к проверке равенства

$$[x_q(u), x_n(t)] = [x_q(u)^{\varphi}, x_n(t)], \quad n \neq q.$$

Учитывая (12) и центральность элементов вида $x_{s+q}(u)$, равносильно равенство

$$[x_q(u), x_n(t)] = [x_q(t)x_s(dt), x_n(t)]$$

Используя соотношение (2), получаем

$$[x_q(t)x_s(dt), x_n(t)] = [x_q(u), x_n(t)]^{x_s(dt)}[x_s(dt)x_n(t)] =$$

$$= [x_q(u), x_n(t)][x_q(u), x_s(dt)x_n(t)][x_s(dt)x_n(t)] = [x_q(u), x_n(t)].$$

Это завершает доказательство теоремы.

## 5 Представления и центральные ряды алгебры Ли $N\Phi(K)$ и групп $U\Phi(K)$

Наряду с представлением систем корней, мы построим представление унипотентной подгруппы $U$ группы Шевалле $\Phi(K)$ нильтриуголной подалгебре алгебры Шевалле.

Систему корней $\Phi$ типа $A_{n-1}$,$B_n$,$C_n$ или $D_n$ ниже выбираем в евклидовом пространстве $V_n$ с ортонормированным базисом $\varepsilon_1$,$\varepsilon_2$,...,$\varepsilon_n$.Её граф Кокстера из [3, §2] согласован с базой $\Pi = \{\alpha_1,\alpha_2,...\}$. Система корней типа $E_m$ ($m = 6,7,8$), выбираемая в $V_8$, содержит подсистему типа $D_{m-1}$, а также корень $\alpha_1 = e_1 + e_8$ - $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} e_i$.

Таким образом,для классических типов система положительных корней $\Phi^+$ составляется из корней вида

$$\varepsilon_i \text{ - } m\varepsilon_j = p_{i,mj}, \quad 1 \leq j \leq i \leq n, \quad m \in \{0, -1, +1\}.$$

Полагая $e_r = e_{i,mj}$ при $r = p_{i,mj}$, произвольный элемент $\sum a_{iv}e_{iv}$ из $N\Phi(K)$ можем представить $\Phi^+$ - матрицей над $K$. При $\Phi = B_n$ получаем $B_n^+$ - матрицу $\|a_{iv}\|$, распологая коэффициент $a_{iv}$,как обычно,в $i$-й строке и $v$-м столбце:

**Системы корней классического типа**

| $\Phi$ | $\Phi^+$ | $\Pi$ |
|---|---|---|
| $A_n$ | $\varepsilon_i - \varepsilon_j \ (1 \le j < i \le n+1)$ | $\varepsilon_{j+1} - \varepsilon_j \ (1 \le j \le n)$ |
| $B_n$ | $\varepsilon_i \ (1 \le i \le n), \varepsilon_i \pm \varepsilon_j \ (1 \le j < i \le n)$ | $\varepsilon_1, \ \varepsilon_{j+1} - \varepsilon_j \ (1 \le j < n)$ |
| $C_n$ | $2\varepsilon_i \ (1 \le i \le n), \varepsilon_i \pm \varepsilon_j \ (1 \le j < i \le n)$ | $2\varepsilon_1, \ \varepsilon_{j+1} - \varepsilon_j \ (1 \le j < n)$ |
| $D_n$ | $\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \ (1 \le j < i \le n)$ | $\varepsilon_2 + \varepsilon_1, \ \varepsilon_{j+1} - \varepsilon_j \ (1 \le j < n)$ |

Рис. 1

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & a_{10} & & & \\
 & & a_{2,-1} & a_{20} & a_{21} & & \\
 & & \dots & \dots & \dots & & \\
a_{n,-n+1} & \dots & a_{n,-1} & a_{n0} & a_{n1} & \dots & a_{n,n-1}.
\end{array}$$

К $D_n^+$ - матрице приходим,отбрасывая в $B_n^+$ - матрице нулевой столбец. Для корней $r, s \in \Phi^+$ имеем $e_r * e_s = N_{rs} e_{r+s}$, где $*$ – умножение в лиевом кольце $(N\Phi(K))$. $C_n^+$ - матрица имеет вид:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & a_{1,-1} & & & \\
 & & a_{2,-2} & a_{2,-1} & a_{21} & & \\
 & & \dots & \dots & \dots & & \\
a_{n,-n} & \dots & a_{n,-2} & a_{n,-1} & a_{n1} & \dots & a_{n,n-1}.
\end{array}$$

**Лемма 5.** *Знаки структурных констант можно выбрать так, что $e_{ij} * e_{jv} = e_{iv}$ и выполняются равенства:*

$$\begin{gathered}
e_{jv} * e_{i,-v} = e_{i,-j} \quad (\Phi = B_n, D_n), \quad i > j > |v| > 0; \\
e_{i0} * e_{j,0} = 2e_{i,-j} \quad (\Phi = B_n), \quad i > j \ge 1; \\
e_{ij} * e_{i,-j} = 2e_{i,-i} \quad (\Phi = C_n), \quad i > j \ge 1; \\
e_{jm} * e_{i,-m} = e_{i,m} * e_{j,-m} = e_{i,j} \quad (\Phi = C_n), \quad i > j > m \ge 1
\end{gathered}$$

Базис Шевалле при $\Phi = B_n, C_n, D_n$ далее будем выбирать так, как указано в лемме 4. Коммутатор элементов $\alpha, \beta$ в группе $(N\Phi(K), \circ)$ обозначаются через $[\alpha, \beta]$. В частности,

$$xe_{iv} \circ ye_{iv} = (x+y)e_{iv}; \tag{16}$$

$$[xe_{ij}, ye_{kt}] = 0, \quad j \ne k, i \ne t, t \ne -j; \tag{17}$$

$$[xe_{ij}, ye_{jv}] = xye_{iv}, \quad i > j > |v| > 0; \tag{18}$$

**Лемма 6.** *Всякое соотношение в группе $(N\Phi(K), \circ)$ типа $\Phi = A_n$ ,$B_n$ ,$C_n$ или $D_n$ есть следствие соотношений в поле $K$, (16)-(18) и слудующих соотношений:*

$$a) \quad \Phi = B_n, \quad [e_{i0}, ye_{j0}] = 2xye_{i,-j},$$

$$[xe_{ij}, ye_{j0}] = xye_{i,0} + xy^2 e_{i,-j} \quad (i > j > 0);$$

$$b) \quad \Phi = B_n, D_n, \quad [xe_{jv}, ye_{i,-v}] = \begin{cases} xye_{i,-j}, & i > j > |v| \geq 0, \\ 0, & i = j > |v|; \end{cases}$$

$$c) \quad \Phi = C_n, \quad [xe_{ij}, ye_{i,-j}] = 2xye_{i,-i},$$

$$[xe_{ij}, ye_{j,-j}] = xye_{i,-j} - xy^2 e_{i,-i} \quad (i > j > 0)$$

$$[xe_{ik}, ye_{j,-k}] = [xe_{jk}, ye_{i,-k}] = xye_{i,-j} \quad (i > j > k > 0)$$

Алгебра $N\Phi(K)$ типа $B_n$ выбирается с базисом $\{e_{iv} \mid 0 \leq |v| < i \leq n\}$, а типа $D_n$ – как подалгебра с базисом $\{e_{iv} \mid 0 < |v| < i \leq n\}$. Произвольный элемент $\alpha \in N\Phi(K)$ в них представляем суммой $\alpha = \sum a_{iv}e_{iv} = ||a_{iv}||$, называя $B_n^+$-матрицей и $D_n^+$-матрицей, соответственно. Тогда умножение определяется по лемме 4.

Подмодуль в $L_i$ с базой $\{e_{uv} \mid 0 \leq v < u \leq n, \ u - v \geq i\}$ обозначим через $L_i^{[0}$. Пусть также $R_j := \sum_{i=j}^{n} Ke_{i0}, \ 1 \leq j \leq n$. С помощью соотношений по лемме 6, несложно вытекает

**Лемма 7.** *Центральные ряды кольца Ли $NB_n(K)$ записываются в виде:*

$$\Gamma_i = L_i^{[0} + L_{i+2} + 2L_i \ (1 < i \leq n), \quad \Gamma_i = L_{i+2} + 2L_i \ (n < i \leq 2n-3), \quad \Gamma_i = 2L_i \ (i \geq 2n-2);$$

$$Z_i = L_{2n-i} + \mathcal{A}_2 R_{n+1-i} \ (1 \leq i \leq n-2), \quad Z_{n-1} = L_{n+1} + \mathcal{A}_2 R_2 + \mathcal{A}_2 e_{n1},$$

$$Z_{n+i} = L_{n-i} + \mathcal{A}_2 R_1 + \mathcal{A}_2 L_{n-i-2}^{[0} \ \ (0 \leq i \leq n-3), \quad Z_{2n-2} = L_2 + \mathcal{A}_2 L_1.$$

В [2] унипотентная подгруппа $U$ группы Шевалле $\Phi(K)$ представлена в алгебре $N\Phi(K)$. Ее центральные ряды построены там же в леммах 6,7 и 9.

**Лемма 8.** *Центральные ряды присоединенной группы $(NC_n(K), \circ)$ записывается в виде:*

$$\Gamma_i = L_i(\{(t,-t)|1 \le t \le i\}) + \sum_{i/2<t<i} Be_{t,-t} + < Ke_{i1} * Ae_{1,-1} >, \quad 1 < i \le n;$$

$$\Gamma_i = L_i(\{(t,-t)|1 \le t \le n\}) + \sum_{i/2<t<n} Be_{t,-t}, \quad n < i < 2n;$$

$$Z_i = L_{2n-i} + L \cdot L_{2n-i-1}, 1 \le i < 2n-1, Z_{2n-1} = L_1,$$

где, $G = C_n$ и $(A, B)$ совпадает с $(K, 2K)$.

**Лемма 9.** *Центральные ряды присоединенной группы $(NB_n(K), \circ)$ записывается в виде:*

$$\Gamma_i = L_{i+1}((t,-1)) + B \cdot L_i + \sum_{j=1}^{n-i} Ae_{i+jj} + < Ae_{i1} * Ke_{10} >, \quad 1 < i \le n;$$

$$\Gamma_i = L_{i+1} + B \cdot L_i, \quad 1 < i \le 2n;$$

$$Z_{n-i} = L_{n+i} + L \cdot R_{n-[(n-i)/2]} + L' \cdot R_{i+1}, \quad 1 < i \le n$$

$$Z_{n+i} = L_{n-i} + L' \cdot R_1 L \cdot R_{n-[(n-i)/2]} + \sum_{j=1}^{i+1} Le_{n-1-i+j,j}, \quad 0 \le i < n-1;$$

*где, $G = B_n$, а $(A, B)$ совпадает с $(K, 2K)$, $R_m = \sum_{j=m}^{n} Ke_{j0}, L' = a \in L|a^2 = 0$.*

## 6 Гиперцентральные автоморфизмы группы $UC_n(K)$, $2K = 0$

В этом параграфе построим гиперцентральный автоморфизм группы $UC_n(K)$, отличный от автоморфизма Гиббса. Всюду $J_2$ - его идеал, порожденный множеством $\{t^2 - t|t \in K\}$. Обозначим также через $T_{ij}$ - подгруппа группы $U$.

Рассмотрим произвольный автоморфизм $\mu$ группы $NC_n(K), n \ge 4$ над полем $K$. С точностью до умножения на стандартный автоморфизм, $\mu$ по модулю $T_{2,-2} + T_{n,-1}$ тождествен, в силу [6, теорема 1].

Пусть $||x_{uv}^{(i)}||$ - образ относительно $\mu$ элемента $xe_{ii-1}^i$ при $1 < i \le n$ и элемента $xe_{1,-1}$ при $i = 1$, $x \in K$. Умножив $\mu$ на сопряжение элементом из $T_{2,-2} + L_{n-1}$, добьемся условий:

$$1_{i,-m}^{(i)} = 0, \quad 1 \le m < i \le n; \quad 1_{n,-i}^{(i)} = 0, \quad 1 \le i < n. \tag{19}$$

Перестановочность элемента $||x_{uv}^{(i)}||$ с $e_{j+1j}^{\mu}, \quad 1 \le i < j < n$, показывает, что ненулевыми у него могут быть лишь $i$-я и $n$-я строки, $1 < i \le n$. Элементы у $e_{j+1j}$ и $xe_{mm-1}, \quad 1 < m < j < n$, перестановочны и в то же время коммутатор их образов при $j \le n-2$ равен

$$[yx_{n,j}^{(m)} e_{n,-j-1} - y_{n,-m+1}^{(j+1)} xe_{n,-m}] - y_{j+1,-m}^{(j+1)} xe_{j+1,-m}.$$

Когда $j = n-1 > m+1$, то выражение в квадратных скобках заменяется на $2yx^{(m)}_{n,-n+1}e_{n,-n}$, а при $(j,m) = (n-1, n-2)$ оно заменяется выражением

$$2yx^{(n-2)}_{n,-n+1}e_{n,-n} - 2y^{(n)}_{n-2,-n+3}xe_{n-2,-n+2} - y^{(n)}_{n-1,-n+3}xe_{n-1,-n+2}.$$

Поэтому у элемента $||x^{(i)}_{uv}||$ по модулю центра $1 < i \leq n$ либо $(-s)$ -й столбец при $\geq 1$ нулевой, либо $i-2 \leq s \leq i$, либо $i = n > 3, s = n-3$.

Рассмотрим коммутатор образов элементов $ye_{i+1i}$ и $xe_{ii-1}$, $1 < i \leq n-2, \quad x, y \in K$. Он симметричен относительно $x, y$. Его $(i+1, m)$ - координата при $-i < m < 0$ равна $yx^{(i)}_{im}$ и в силу (19) равна нулю. Далее находим:

$$0 = [e^{\mu}_{i+1,i-1}, (Ke_{ii-1})^{\mu}] = K^{(i)}_{n,-i+1}e_{n,-i-1}, \quad 1 < i \leq n-2;$$

$$(yxe_{i+1,i-1})^{\mu} = yxe_{i+1,i-1} + (yx^{(i)}_{i,-i} - y^{(i+1)}_{i+1,-i+1}x)e_{i+1,-i} - y^{(i+1)}_{n,-i+1}xe_{n,-i}+$$

$$+(2yxy^{i+1}_{i+1,-i+1} - y^2x^{(i)}_{i,-i})e_{i+1,-i-1} + (yx^{(i)}_{n,-i} + yxy^{(i+1)}_{n,-i+1})e_{n,-i-1};$$

$$0 = [ye_{i+1i}, xe_{i+2,i-1}]^{\mu} = yx^{(i)}_{i,-i}e_{i+2,-i-1} - y^{i+1}_{n,-i+1}xe_{n,-i-1}, \quad 1 < i \leq n-3.$$

Поэтому на $Ke_{ii-1}, \quad 2 \leq i \leq n-3$, $\mu$ тождествен по модулю центра. Предыдущие равенства для $i = n-2$ также дают:

$$y^{n-1}_{n,-n+3} = cy, x^{n-2}_{n,-n+2} = c(x^2 - x), 2c = c(x^2-x)(y^2-y) = 0, \quad x, y \in K.$$

Нужно лишь заметить, что координаты коммутатора $[ye_{i+1i}, xe_{ii-1}]^{\mu}$ есть функции от произведения $xy$. Рассматривая этот коммутатор для $i = n-1$, аналогично получаем:

$$(yxe_{nn-2})^{\mu} = yxe_{nn-2} \circ \sum_{j=n-3}^{n-2} [(d_jxy^2 + yx^{(n-1)}_{n-1,-j}e_{n,-j} - d_jxye_{ii-1,-j}]\circ$$

$$\circ(d_{n-2}yx^2 - 2xy^{(n)}_{n-1,-n+2})e_{n-1,-n+1} + A(x,y)e_{n,-n+1} + B(x,y)e_{n,-n}; \tag{20}$$

$$y^{(n)}_{n-2,j} = d_jy(d_j = 1^{(n)}_{n-2,-j}), \quad x^{(n-1)}_{n-1,-j} = d_j(x^2 - x), \quad j = n-2, n-3, \quad x, y \in K.$$

Из перестановочности элементов $e^{\mu}_{n-1,n-2}$, $e^{\mu}_{nn-2}$ получаем $d_{n-2} = 0$. Наконец, перестановочность образов элементов $xe_{n-1,n-3}$,$te_{nn-2}$ дает соотношения: $x^{n-2}_{n-2,-n+2} = d_{n-3}, \quad d_{n-3}J_2 = 0$.

Сейчас автоморфизм $\mu$ упрощается умножением на автоморфизм из следующего предложения.

**Предложение 1.** *Для любых элеметов* $c, d \in K$ *с условием* $dJ_2 = 0, \quad 2c = 0, \quad cJ_2J_2 = 0$ *отображение*

$$\phi : \left.\begin{aligned} te_{nn-1} &\to t(e_{nn-1} + de_{n-2,-n+3}),\\ ue_{n-1,n-2} &\to u(e_{n-1,n-2} + ce_{n,-n+3}),\\ te_{n-2,n-3} &\to te_{n-2,n-3} + dte_{n-2,-n+2} + c(t^2 - t)e_{n,-n+2},\\ ute_{nn-2} &\to te_{nn-2} + dt(e_{n-1,-n+3} + e_{n,-n+3}),\\ te_{n-1,n-3} &\to te_{n-1,n-3} + dt(e_{n-1,-n+2} + e_{n-1,-n+1}) + cte_{n,-n+2} + ct^2_{n,-n+1},\\ te_{nn-3} &\to te_{nn-3} + dt(e_{n-1,n+2} + e_{n,-n+1} + e_{n,-n}), \quad t \in K, \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

является автоморфизмом присоединенной группы $(NC_n(K), \circ) \quad n \geq 4$.

*Доказательство.* Учитывая леммы 4 и 6, достаточно проверить $\mu$ - инвариантность соотношения из леммы 6. Проверим инвариантность соотношения по лемме 6 для типа $C_n$. Если $(i, k) = (n, n-1)$, то $n > j \geq |k| = n-1$, поэтому $j = n-1$ и проверке подлежит соотношение:

$$[te^{\phi}_{nn-1}, ue^{\phi}_{n-1,n-2}] = (ute_{nn-2})^{\phi}, \tag{22}$$

$$(ute_{nn-2})^{\phi} = te_{nn-2} + tde_{n,-n+3} + tde_{n-1,-n+3} =$$

$$= te_{nn-2} + dt(e_{n,-n+3} + e_{n-1,-n+3}).$$

По вышесказанным холловским соотношениям проверим, что (22) действительно есть равенство. Подставляя в холловское соотношение (2) и обозначая следующим образом, где $z = ab$, получим

$$x = te_{nn-1}, y = utde_{n-2,-n+3}, \quad a = te_{n-1,n-2}, b = tc_{n,-n+3}. \tag{23}$$

$$[te_{nn-1}ude_{n-2,-n+3}, ue_{n-1,n-2}tc_{n,-n+3}] =$$

$$= [te_{nn-1}, ue_{n-1,n-2}tc_{n,-n+3}]^{(}ude_{n-2,-n+3})[ude_{n-2,-n+3}, ue_{n-1,n-2}tc_{n,-n+3}] =$$

$$= [te_{nn-1}, ue_{n-1,n-2}][ude_{n-2,-n+3}, te_{n-1,n-2}] = [te_{nn-1}, tde_{n-1,n-2}].$$

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получены следующие результаты:

1. в теореме 2 исследован гиперцентральный автоморфизм Гиббса группы $U$

2. проверены сохраняют ли соотношения гиперцентральные автоморфизмы унипотентных подгрупп $U$ групп Шевалле

3. исследованы гиперцентральные автоморфизмы группы $UC_n(K)$, $2K = 0$

Полученные результаты имеют теоретическое значение и могут быть ипользованы в учебном процессе при изучении курса алгебры Шевалле.

# СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ


1. Carter, R. Simple groups of Lie type / R. Carter – New York: Wiley and Sons, 1972 — 332 p.

2. Левчук, В.М. Автоморфизмы унипотентных подгрупп групп Шевалле: учебное пособие / В.М. Левчук — Алгебра и логика Т. 29, № 3., 1990 – 315-338 с.

3. Левчук, В.М. Алгебры и группы Шевалле и ассоцированные системы корне: учебное пособие / В.М. Левчук. — Красноярск гос.ун-т: Красноярск, 2006. – 38 с.

4. Gibbs J., Automorphisms of certain unipotent groups. /J. Gibbs – J. Algebra, Vol. 14 (1970), no. 2,–203-228 p.

5. Hall M. The theory of groups./ M. Hall – The Macmillan Company, New York 1959,– 171-186 p.

6. Левчук, В.М. Связи унитреугольной группы с некоторыми кольцами. / В.М. Левчук –Ч.2. Группы автоморфизмов, Сиб.мат.ж., 24, № 4 (1983),– 64-80 с.

7. Cao, Y., Automorphisms of certain nilpotent algebras over commutative rings.// Y. Cao, D.Jiang,D. Wang – J. Algebra – 2007 – Vol. 17, no. 3, 527-555 – p.

8. Литаврин, А.В. Автоморфизмы нильпотентной подалгебры $N\Phi(K)$ алгебры Шевалле симплектического типа./ А.В. Литаврин .– Известия ИркГУ, сер. матем., 8 (2015), No. 2, – 43-58 с.

9. Steinberg, R. Lections on Chevalley groups./ R. Steinberg – Yale University, 1967. –P. 1-145

10. Seligman, G.B., On automorphisms of Lie algebras of classical type. / G.B. Seligman – Trans.Amer. Math. Part I. – 1959. – Vol. 92.–p. 430–448. Part II. – 1960. – Vol. 94. – 452–481 p. Part III. – 1960. – Vol. 97. – 286–316 p.