Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики
Кафедра алгебры и математической логики

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
________ / В.М. Левчук
«16» июня 2016 г.

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

Направление 01.03.01 Математика

ПОРЯДКИ УНИПОТЕНТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НАД ПОЛЕМ НЕНУЛЕВОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор ________ / Я. Н. Нужин
16.06.2016г

Выпускник ________ / Т. С. Сопикова
16.06.2016г

Красноярск 2016

РЕФЕРАТ

Выпускная квалификационная работа по теме «Порядки унипотентных элементов над полем ненулевой характеристики» содержит 27 страниц текста, 2 таблицы, 2 использованных источника.

УНИТРЕУГОЛЬНАЯ ГРУППА, УНИПОТЕНТНЫЙ ЭЛЕМЕНТ, ГРУППОВОЙ ПОРЯДОК, ХАРАКТЕРИСТИКА ПОЛЯ, ЖОРДАНОВА КЛЕТКА, ЖОРДАНОВА МАТРИЦА.

Цель работы — определить групповые порядки матричных унипотентных элементов над основным полем K характеристики p отличной от нуля.

В результате исследований найдены групповые порядки всех клеток жордана для небольших n и p, где n — размерность клетки жордана, а p — характеристика основного поля. Сформулированы и доказаны леммы : о групповом порядке унипотентной жордановой клетки при $p \geq n$; о групповом порядке унипотентной жордановой матрицы, состоящей из унипотентных жордановых клеток. Выдвинута гипотеза о групповых порядках унипотентных элементов и построена гипотетическая таблица до размерности 37.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматриваются элементы группы $UT_n(K)$. Основная задача заключается в нахождении групповых порядков матричных унипотентных элементов над полем K характеристики p. По определению, порядком элемента g группы G называется наименьшее натуральное число n, такое что g^n есть единица группы G. Известно, что характеристика поля всегда ноль или простое число. Любой унипотентный элемент над полем нулевой характеристики имеет бесконечный порядок. Поэтому далее считаем, что характеристика p основного поля K отлична от нуля. В работе используется известная формула, из книги А. И. Мальцева [1, 181], возведения унипотентной матрицы в степень.

Целью работы является решение следующих задач:

1. Определить групповые порядки унипотентных жордановых клеток размерности n.
2. Проанализировать поведение найденых групповых порядков унипотентных элементов.

1 Обозначения и определения

Придерживаясь терминолигии из книги «Основы теории групп»[2], введем следующие стандартные обозначения и определения:

K — алгебраически замкнутое поле;

$UT_n(K)$ — унитреугольная группа.

Определение 1.1. Матрица А называется унипотентной, если $(A-E)^n = 0$, для некоторого натурального числа n.

Определение 1.2. Порядком элемента g группы G называется наименьшее натуральное число n, такое что $g^n = 1$. Если такого n не существует, то говорят, что порядок элемента g равен бесконечности.

Определение 1.3. Характеристикой поля K называется наименьшее положительное целое число n, такое что сумма n копий единицы равна нулю:

$$\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n} = n\,1 = 0.$$

Если такого n не существует, то говорят, что характеристика поля K равна 0.

Определение 1.4. Жордановой клеткой порядка k, называется квадратная матрица порядка k, имеющая вид

$$\begin{pmatrix} \rho & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \rho & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \rho \end{pmatrix}.$$

Соответственно жордановыми клетками первого, второго и третьего порядка будут

$$\begin{pmatrix} \rho \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \rho & 1 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \rho & 1 & 0 \\ 0 & \rho & 1 \\ 0 & 0 & \rho \end{pmatrix}.$$

Определение 1.5. Жордановой матрицей порядка n, называется квадратная матрица порядка n, имеющая вид

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & J_3 & \dots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & J_s \end{pmatrix},$$

где $J_1, J_2, \dots, J_s$ жордановы клетки некоторых порядков. Например, при $s = 2$ жорданова матрица, без тривиальных клеток жордана, с точностью до эквивалентности, может иметь один из следующих двух видов

$$\begin{pmatrix} \rho_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_2 \end{pmatrix}.$$

2 Жорданова матрица

Рассмотрим отдельную клетку жордана порядка n

$$A = \begin{pmatrix} \rho & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho & \dots & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \rho & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \rho \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Опираясь на доказательство из книги А. И. Мальцева, «Основы линейной алгебры»[1, 181], приведем подробное доказательство следующего утверждения.

Теорема 1. *Для всех натуральных m имеет место формула*

$$A^m = \begin{pmatrix} \rho^m & \binom{m}{1}\rho^{m-1} & \binom{m}{2}\rho^{m-2} & \dots & \binom{m}{n-1}\rho^{m-n+1} \\ 0 & \rho^m & \binom{m}{1}\rho^{m-2} & \dots & \binom{m}{n-2}\rho^{m-n+2} \\ 0 & 0 & \rho^m & \dots & \binom{m+1}{n-3}\rho^{m-n+3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \rho^m \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

где

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!}.$$

Доказательство. Проведем индукцию по m. Для $m = 1$ формула (2.2) совпадает с формулой (2.1)

$$A^1 = A = \begin{pmatrix} \rho & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \rho & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \rho \end{pmatrix},$$

и поэтому верна. С другой стороны, если равенство (2.2) верно для какого-нибудь m, то, умножая его на A, мы непосредственными вычислениями получим что для A^{m+1} формула (2.2) также верна.

$$A^m A = A^{m+1} = \begin{pmatrix} \rho^{m+1} & \binom{m+1}{1}\rho^m & \binom{m+1}{2}\rho^{m-1} & \dots & \binom{m+1}{n-1}\rho^{m-n+2} \\ 0 & \rho^{m+1} & \binom{m+1}{1}\rho^{m-1} & \dots & \binom{m+1}{n-2}\rho^{m-n+3} \\ 0 & 0 & \rho^{m+1} & \dots & \binom{m}{n-3}\rho^{m-n+4} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \rho^{m+1} \end{pmatrix}.$$

□

3 Порядки унипотентных элементов

Очевидно, что порядки унипотентных элементов над полем характеристики p являются степенями p.

При $\rho = 1$ жорданову клетку будем называть унипотентной, а жорданову матрицу состоящую из унипотентных клеток — унипотентной жордановой матрицей. В этом случае формула (2.2) примет вид

$$A^m = \begin{pmatrix} 1 & \binom{m}{1} & \binom{m}{2} & \dots & \binom{m}{n-1} \\ 0 & 1 & \binom{m}{1} & \dots & \binom{m}{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \binom{p}{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Лемма 3.1. *Групповой порядок унипотентной жордановой клетки размерности n равен характеристике p, если $p \geq n$.*

Доказательство. Пусть A — жорданова клетка размерности n. Тогда формула (3.1), при $m = p$ имеет следующий вид

$$A^p = \begin{pmatrix} 1 & \binom{p}{1} & \binom{p}{2} & \dots & \binom{p}{n-1} \\ 0 & 1 & \binom{p}{1} & \dots & \binom{p}{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \binom{p}{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

где

$$\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!}.$$

Очевидно, что $1 \leq k \leq n-1 < p$. При $p \geq n$ выражение в знаменателе $k!\,(p-k)!$ всегда будет кратно p. Отсюда вытекат

$$\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!\,(p-k)!} = 0.$$

Таким образом, A^p=1. Следовательно, групповой порядок унипотентной жордановой клетки размерности n равен характеристике p, если $p \geq n$. □

Следующие три утверждения включены для наглядности применения формулы (3.2).

Утверждение 1. *Групповой порядок унипотентной жордановой клетки размерности* 2*, над полем характеристики* p*, равен* p*.*

Доказательство. Пусть A — жорданова клетка размерности 2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^p = \begin{pmatrix} 1 & \binom{p}{1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

□

Утверждение 2. *Групповой порядок унипотентной жордановой клетки размерности 3, над полем характеристики $p \geqslant 3$, равен p.*

Доказательство. Пусть A — жорданова клетка размерности 3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^p = \begin{pmatrix} 1 & \binom{p}{1} & \binom{p}{2} \\ 0 & 1 & \binom{p}{1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\binom{p}{1} = p,$$

$$\binom{p}{2} = \frac{p!}{2!(p-2)!} = \frac{p\,(p-1)}{2!} = 0.$$

□

Утверждение 3. *Групповой порядок унипотентной жордановой клетки размерности 5, над полем характеристики $p \geqslant 5$, равен p.*

Доказательство. Пусть A — жорданова клетка размерности 5.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^p = \begin{pmatrix} 1 & \binom{p}{1} & \binom{p}{2} & \binom{p}{3} & \binom{p}{4} \\ 0 & 1 & \binom{p}{1} & \binom{p}{2} & \binom{p}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \binom{p}{1} & \binom{p}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \binom{p}{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\binom{p}{3} = \frac{p!}{3!(m-3)!} = \frac{m\,(m-1)(m-2)}{3!},$$

$$\binom{m}{4} = \frac{m!}{4!(m-4)!} = \frac{m\,(m-1)(m-2)(m-3)}{4!}.$$

$\square$

Далее рассмотрим случаи, когда характеристика основного поля K меньше размерности.

Утверждение 4. *Групповой порядок унипотентной жордановой клетки размерности 3, над полем характеристики $p = 2$, равен p^2.*

Доказательство. Пусть A — жорданова клетка размерности 3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^m = \begin{pmatrix} 1 & \binom{m}{1} & \binom{m}{2} \\ 0 & 1 & \binom{m}{1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\binom{m}{1} = m,$$

$$\binom{m}{2} = \frac{m!}{2!(m-2)!} = \frac{m\,(m-1)}{2!}.$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\binom{m}{2} = \frac{m\,(m-1)}{2!} = \frac{p^2\,(p^2-1)}{2!} = 0.$$

$\square$

Утверждение 5. *Групповой порядок унипотентной жордановой клетки размерности 4, над полем характеристики $p = 2$, равен p^2. Если $p = 3$ порядок равен p^2.*

Доказательство. Пусть A — жорданова клетка размерности 4.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^m = \begin{pmatrix} 1 & \binom{m}{1} & \binom{m}{2} & \binom{m}{3} \\ 0 & 1 & \binom{m}{1} & \binom{m}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \binom{m}{1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\binom{m}{3} = \frac{m!}{3!(m-3)!} = \frac{m\,(m-1)(m-2)}{3!}.$$

1. Если $p = 2$, то

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^4 = 1,$$

$$\binom{m}{3} = \frac{m\,(m-1)(m-2)}{3!} = \frac{p^2\,(p^2-1)(p^2-2)}{3!} = 0.$$

2. Если $p = 3$, то

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^9 = 1,$$

$$\binom{m}{3} = \frac{m\,(m-1)(m-2)}{3!} = \frac{p^2\,(p^2-1)(p^2-2)}{3!} = 0.$$

$\square$

Утверждение 6. *Групповой порядок унипотентной жордановой клетки размерности 5, над полем характеристики $p = 2$, равен p^3. Если $p = 3$ порядок равен p^2.*

Доказательство. Пусть A — жорданова клетка размерности 5.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^m = \begin{pmatrix} 1 & \binom{m}{1} & \binom{m}{2} & \binom{m}{3} & \binom{m}{4} \\ 0 & 1 & \binom{m}{1} & \binom{m}{2} & \binom{m}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \binom{m}{1} & \binom{m}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \binom{m}{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\binom{m}{4} = \frac{m!}{4!(m-4)!} = \frac{m\,(m-1)(m-2)(m-3)}{4!}.$$

1. Если $p = 2$, то

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^8 = 1.$$

$$\binom{m}{4} = \frac{m\,(m-1)(m-2)(m-3)}{4!} = \frac{p^3\,(p^3-1)(p^3-2)(p^3-3)}{4!} = 0.$$

2. Если $p = 3$, то

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^9 = 1.$$

$$\binom{m}{4} = \frac{m\,(m-1)(m-2)(m-3)}{4!} = \frac{p^2\,(p^2-1)(p^2-2)(p^2-3)}{4!} = 0.$$

$\square$

Утверждение 7. *Групповой порядок унипотентной жордановой клетки размерности 6, над полем характеристики $p=2$, равен p^3. Если $p=3$ порядок равен p^2. Если $p=5$ порядок равен p^2.*

Доказательство. Пусть A — жорданова клетка размерности 6.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^m = \begin{pmatrix} 1 & \binom{m}{1} & \binom{m}{2} & \binom{m}{3} & \binom{m}{4} & \binom{m}{5} \\ 0 & 1 & \binom{m}{1} & \binom{m}{2} & \binom{m}{3} & \binom{m}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \binom{m}{1} & \binom{m}{2} & \binom{m}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \binom{m}{1} & \binom{m}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \binom{m}{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\binom{m}{5} = \frac{m!}{5!(m-5)!} = \frac{m\,(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{5!}.$$

1. Если $p=2$, то

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^8 = 1.$$

$$\binom{m}{5} = \frac{m\,(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{5!} = \frac{p^3\,(p^3-1)(p^3-2)(p^3-3)(p^3-4)}{5!} = 0.$$

2. Если $p = 3$, то

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^9 = 1.$$

$$\binom{m}{5} = \frac{m\,(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{5!} = \frac{p^2\,(p^2-1)(p^2-2)(p^2-3)(p^2-4)}{5!} = 0.$$

3. Если $p = 5$, то

$$A^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{25} = 1.$$

$$\binom{m}{5} = \frac{m\,(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{5!} = \frac{p^2\,(p^2-1)(p^2-2)(p^2-3)(p^2-4)}{5!} = 0.$$

□

Утверждение 8. *Групповой порядок унипотентной жордановой клетки размерности 7, над полем характеристики* $p = 2$*, равен* p^3*. Если* $p = 3$ *порядок равен* p^2*. Если* $p = 5$ *порядок равен* p^2*.*

Доказательство. Пусть A — жорданова клетка размерности 7.

$$
A = \begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}, \qquad
A^m = \begin{pmatrix}
1 & \binom{m}{1} & \binom{m}{2} & \binom{m}{3} & \binom{m}{4} & \binom{m}{5} & \binom{m}{6} \\
0 & 1 & \binom{m}{1} & \binom{m}{2} & \binom{m}{3} & \binom{m}{4} & \binom{m}{5} \\
0 & 0 & 1 & \binom{m}{1} & \binom{m}{2} & \binom{m}{3} & \binom{m}{4} \\
0 & 0 & 0 & 1 & \binom{m}{1} & \binom{m}{2} & \binom{m}{3} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \binom{m}{1} & \binom{m}{2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \binom{m}{1} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix},
$$

$$
\binom{m}{6} = \frac{m!}{6!(m-6)!} = \frac{m\,(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}{6!}.
$$

1. Если $p = 2$, то

$$
A^2 = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix},
A^4 = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix} \Rightarrow A^8 = 1.
$$

$$
\binom{m}{6} = \frac{m\,(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}{6!} =
$$

$$
= \frac{p^3\,(p^3-1)(p^3-2)(p^3-3)(p^3-4)(p^3-5)}{6!} = 0.
$$

2. Если $p=3$, то

$$A^3=\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&1\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow A^9=1.$$

$$\binom{m}{6}=\frac{m\,(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}{6!}=$$

$$=\frac{p^2\,(p^2-1)(p^2-2)(p^2-3)(p^2-4)(p^2-5)}{6!}=0.$$

3. Если $p=5$, то

$$A^5=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow A^{25}=1.$$

$$\binom{m}{6}=\frac{m\,(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}{6!}=$$

$$=\frac{p^2\,(p^2-1)(p^2-2)(p^2-3)(p^2-4)(p^2-5)}{6!}=0.$$

□

Утверждение 9. *Групповой порядок унипотентной жордановой клетки размерности 8, над полем характеристики $p=2$, равен p^3. Если $p=3$ порядок равен p^2. Если $p=5$ порядок равен p^2. Если $p=7$ порядок равен p^2.*

Доказательство. Пусть A — жорданова клетка размерности 8.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^m = \begin{pmatrix} 1 & \binom{m}{1} & \binom{m}{2} & \binom{m}{3} & \binom{m}{4} & \binom{m}{5} & \binom{m}{6} & \binom{m}{7} \\ 0 & 1 & \binom{m}{1} & \binom{m}{2} & \binom{m}{3} & \binom{m}{4} & \binom{m}{5} & \binom{m}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \binom{m}{1} & \binom{m}{2} & \binom{m}{3} & \binom{m}{4} & \binom{m}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \binom{m}{1} & \binom{m}{2} & \binom{m}{3} & \binom{m}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \binom{m}{1} & \binom{m}{2} & \binom{m}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \binom{m}{1} & \binom{m}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \binom{m}{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\binom{m}{7} = \frac{m!}{7!(m-7)!} = \frac{m\,(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)(m-6)}{7!}.$$

1. Если $p = 2$, то

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}, \quad A^4 = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^8 = 1.$$

$$\binom{m}{7} = \frac{m\,(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)(m-6)}{7!} =$$

$$= \frac{p^3\,(p^3-1)(p^3-2)(p^3-3)(p^3-4)(p^3-5)(p^3-6)}{7!} = 0.$$

2. Если $p = 3$, то

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^9 = 1.$$

$$\binom{m}{7} = \frac{m\,(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)(m-6)}{7!} =$$

$$= \frac{p^2\,(p^2-1)(p^2-2)(p^2-3)(p^2-4)(p^2-5)(p^2-6)}{7!} = 0.$$

3. Если $p = 5$, то

$$A^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{25} = 1.$$

$$\binom{m}{7} = \frac{m\,(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)(m-6)}{7!} =$$

$$= \frac{p^2\,(p^2-1)(p^2-2)(p^2-3)(p^2-4)(p^2-5)(p^2-6)}{7!} = 0.$$

4. Если $p = 7$, то

$$A^7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{49} = 1.$$

$$\binom{m}{7} = \frac{m\,(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)(m-6)}{7!} =$$

$$= \frac{p^2\,(p^2-1)(p^2-2)(p^2-3)(p^2-4)(p^2-5)(p^2-6)}{7!} = 0.$$

□

Утверждение 10. *Групповой порядок унипотентной жордановой клетки размерности 9, над полем характеристики* $p = 2$*, равен* p^4*. Если* $p = 3$ *порядок равен* p^2*. Если* $p = 5$ *порядок равен* p^2*. Если* $p = 7$ *порядок равен* p^2*.*

Доказательство. Пусть A — жорданова клетка размерности 9.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^m = \begin{pmatrix} 1 & \binom{m}{1} & \binom{m}{2} & \binom{m}{3} & \binom{m}{4} & \binom{m}{5} & \binom{m}{6} & \binom{m}{7} & \binom{m}{8} \\ 0 & 1 & \binom{m}{1} & \binom{m}{2} & \binom{m}{3} & \binom{m}{4} & \binom{m}{5} & \binom{m}{6} & \binom{m}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \binom{m}{1} & \binom{m}{2} & \binom{m}{3} & \binom{m}{4} & \binom{m}{5} & \binom{m}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \binom{m}{1} & \binom{m}{2} & \binom{m}{3} & \binom{m}{4} & \binom{m}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \binom{m}{1} & \binom{m}{2} & \binom{m}{3} & \binom{m}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \binom{m}{1} & \binom{m}{2} & \binom{m}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \binom{m}{1} & \binom{m}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \binom{m}{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\binom{m}{8} = \frac{m!}{8!(m-8)!} = \frac{m\,(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)(m-6)(m-7)}{8!}.$$

1. Если $p = 2$, то

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}, \quad A^4 = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix},$$

$$A^8 = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{16} = 1.$$

$$\binom{m}{8} = \frac{m\,(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)(m-6)(m-7)}{8!} =$$

$$= \frac{p^4\,(p^4-1)(p^4-2)(p^4-3)(p^4-4)(p^4-5)(p^4-6)(p^4-7)}{8!} = 0.$$

2. Если $p = 3$, то

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^9 = 1.$$

$$\binom{m}{8} = \frac{m\,(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)(m-6)(m-7)}{8!} =$$

$$= \frac{p^2\,(p^2-1)(p^2-2)(p^2-3)(p^2-4)(p^2-5)(p^2-6)(p^2-7)}{8!} = 0.$$

3. Если $p = 5$, то

$$A^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{25} = 1.$$

$$\binom{m}{8} = \frac{m\,(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)(m-6)(m-7)}{8!} =$$

$$= \frac{p^2\,(p^2-1)(p^2-2)(p^2-3)(p^2-4)(p^2-5)(p^2-6)(p^2-7)}{8!} = 0.$$

4. Если $p = 7$, то

$$A^7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{49} = 1.$$

$$\binom{m}{8} = \frac{m\,(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)(m-6)(m-7)}{8!} =$$

$$= \frac{p^2\,(p^2-1)(p^2-2)(p^2-3)(p^2-4)(p^2-5)(p^2-6)(p^2-7)}{8!} = 0.$$

□

Полученные результаты демонстрирует таблица 1.

Таблица 1 — Порядки унипотентных элементов

	$p=2$	$p=3$	$p=5$	$p=7$
$n=2$	p	p	p	p
$n=3$	p^2	p	p	p
$n=4$	p^2	p^2	p	p
$n=5$	p^3	p^2	p	p
$n=6$	p^3	p^2	p^2	p
$n=7$	p^3	p^2	p^2	p
$n=8$	p^3	p^2	p^2	p^2
$n=9$	p^4	p^2	p^2	p^2

Гипотеза 1. Групповой порядок унипотентной жордановой клетки размерности n равен p^k, если $p^{k-1} < n \leq p^k$.

Гипотеза проверена до размерности 9. Таблица 2 наглядно иллюстрирует выдвинутую гипотезу.

Таблица 2 — Гипотетическая таблица до размерности 37

	$p=2$	$p=3$	$p=5$	$p=7$	$p=11$	$p=13$	$p=17$	$p=19$	$p=23$
$n=2$	p	p	p	p	p	p	p	p	p
$n=3$	p^2	p	p	p	p	p	p	p	p
$n=4$	p^2	p^2	p	p	p	p	p	p	p
$n=5$	p^3	p^2	p	p	p	p	p	p	p
$n=6$	p^3	p^2	p^2	p	p	p	p	p	p
$n=7$	p^3	p^2	p^2	p	p	p	p	p	p
$n=8$	p^3	p^2	p^2	p^2	p	p	p	p	p
$n=9$	p^4	p^2	p^2	p^2	p	p	p	p	p
$n=10$	p^4	p^3	p^2	p^2	p	p	p	p	p
$n=11$	p^4	p^3	p^2	p^2	p	p	p	p	p
$n=12$	p^4	p^3	p^2	p^2	p^2	p	p	p	p
$n=13$	p^4	p^3	p^2	p^2	p^2	p	p	p	p
$n=14$	p^4	p^3	p^2	p^2	p^2	p^2	p	p	p
$n=15$	p^4	p^3	p^2	p^2	p^2	p^2	p	p	p
$n=16$	p^4	p^3	p^2	p^2	p^2	p^2	p	p	p
$n=17$	p^5	p^3	p^2	p^2	p^2	p^2	p	p	p
$n=18$	p^5	p^3	p^2	p^2	p^2	p^2	p^2	p	p
$n=19$	p^5	p^3	p^2	p^2	p^2	p^2	p^2	p	p
$n=20$	p^5	p^3	p^2	p^2	p^2	p^2	p^2	p^2	p
$n=21$	p^5	p^3	p^2	p^2	p^2	p^2	p^2	p^2	p
$n=22$	p^5	p^3	p^2	p^2	p^2	p^2	p^2	p^2	p
$n=23$	p^5	p^3	p^2	p^2	p^2	p^2	p^2	p^2	p
$n=24$	p^5	p^3	p^2	p^2	p^2	p^2	p^2	p^2	p^2
$n=25$	p^5	p^3	p^2	p^2	p^2	p^2	p^2	p^2	p^2
$n=26$	p^5	p^3	p^3	p^2	p^2	p^2	p^2	p^2	p^2
$n=27$	p^5	p^3	p^3	p^2	p^2	p^2	p^2	p^2	p^2
$n=28$	p^5	p^4	p^3	p^2	p^2	p^2	p^2	p^2	p^2
$n=29$	p^5	p^4	p^3	p^2	p^2	p^2	p^2	p^2	p^2
$n=30$	p^5	p^4	p^3	p^2	p^2	p^2	p^2	p^2	p^2
$n=31$	p^5	p^4	p^3	p^2	p^2	p^2	p^2	p^2	p^2
$n=32$	p^5	p^4	p^3	p^2	p^2	p^2	p^2	p^2	p^2
$n=33$	p^6	p^4	p^3	p^2	p^2	p^2	p^2	p^2	p^2
$n=34$	p^6	p^4	p^3	p^2	p^2	p^2	p^2	p^2	p^2
$n=35$	p^6	p^4	p^3	p^2	p^2	p^2	p^2	p^2	p^2
$n=36$	p^6	p^4	p^3	p^2	p^2	p^2	p^2	p^2	p^2
$n=37$	p^6	p^4	p^3	p^2	p^2	p^2	p^2	p^2	p^2

4 Порядки унипотентных элементов, состоящие из жордановых клеток

Пусть J — матрица состоящая из жордановых клеток

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & J_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & J_s \end{pmatrix},$$

где $J_1, J_2, \dots, J_s$ жордановы клетки некоторых порядков $l_1, l_2 \dots, l_s$.

Лемма 4.1. *Групповой порядок унипотентной жордановой матрицы, состоящей из унипотентных жордановых клеток, над полем ненулевой характеристики p, есть* $\max(l_1, l_2 \dots, l_s)$*, где* $l_1, l_2 \dots, l_s$ *порядки жордановых клеток.*

Доказательство. Так как жордановы клетки перестановочны, а групповой порядок перестановочных элементов определяется как

$$|J_1\, J_2| = \text{НОК}(l_1, l_2),$$

$$l_1 = p^{k_1}, l_2 = p^{k_2}, \dots, l_s = p^{k_s}.$$

Тогда справедливо для общего случая

$$\text{НОК}(l_1, l_2, \dots, l_s) = \text{НОК}(p^{k_1}, p^{k_2}, \dots, p^{k_s}) =$$

$$= \max(p^{k_1}, p^{k_2}, \dots, p^{k_s}) = \max(l_1, l_2, \dots, l_s). \qquad \square$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В бакалаврской работе получены следующие результаты:

1. Доказано, что групповой порядок унипотентной жордановой клетки размерности n равен характеристике p, если $p \geq n$.

2. Для небольших n и p, где n — размерность клетки жордана, а p — характеристика основного поля, найдены групповые порядки всех клеток жордана.

3. Используя результаты эксперимента из пункта 2, выдвинута следующая гипотеза. Групповой порядок унипотентной жордановой клетки размерности n равен p^k, если $p^{k-1} < n \leq p^k$.

4. Доказано, что групповой порядок унипотентной жордановой матрицы, состоящей из унипотентных жордановых клеток, есть максимум порядков жордановых клеток.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Мальцев, А. И. Основы линейной алгебры : учебное пособие для вузов / А. И. Мальцев. — М. : Наука, 1970. — 402 с.

2 Каргаполов, М. И. Основы теории групп : учебное пособие для вузов / М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков. — 3-е изд., перераб. и доп. — М. : Наука, 1982. — 288 с.