Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики
Кафедра алгебры и математической логики

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
_______ В.М. Левчук
« 17 » июня 2016 г.

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

Направление 01.03.01 Математика

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛУПОЛЕЙ ПОРЯДКА 81

Научный руководитель
кандидат физико-математических наук,
доцент _______ О. В. Кравцова
17.06.16

Выпускник _______ Ю. И. Кармышева
17.06.16

Красноярск 2016

РЕФЕРАТ

Выпускная квалификационная работа по теме «Исследование полуполей порядка 81» содержит 39 страниц текста, 3 приложения, 4 использованных источника.

ПОЛУПОЛЕ, РЕГУЛЯРНОЕ МНОЖЕСТВО, КОЛЛИНЕАЦИЯ, АВТОМОРФИЗМ, ПРОЕКТИВНАЯ ПЛОСКОСТЬ, КУБИЧЕСКИЙ МАССИВ.

Цель работы – восстановление матричного представления регулярного множества для всех полуполей порядка 81 и изучение основных свойств построенных систем.

В работе перечислены 72 полуполя порядка 81 на основе списка из 12 S_3-классов Демпвольфа. Построены регулярные множества, вычислены порядки ядер, найдены автоморфизмы порядка 2.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Исследования полуполей ведутся с середины XX века, в том числе, с использованием компьютерных вычислений. Одним из способов представления конечного полуполя является его задание при помощи специального семейства квадратных матриц, так называемого регулярного множества. В работе У. Демпвольфа [1] перечислены, с точностью до S_3, 12 полуполей порядка 81. Целью работы является восстановление матричного представления регулярного множества для всех полуполей порядка 81 и изучение основных свойств построенных систем.

Поставлена задача:

1. Найти матричное представление в $GL_4(3) \cup \{0\}$ всех полуполей порядка 81, S_3 -эквивалентных полуполям в перечислении У. Демпвольфа;
2. Найти правое, левое и среднее ядра N_l, N_m, N_r построенных полуполей, вычислить порядки ядер;
3. Выделить полуполя порядка 81, допускающие автоморфизм порядка 2;
4. Доказать возможность задания любого полуполя порядка 81 двумерным линейным пространством над $GF(9)$.

Для выполнения поставленных целей разработан пакет прикладных программ на языке программирования $C++$, доказаны соответствующие теоретические результаты.

1 Основные определения и вспомогательные материалы

Определение 1.1. Проективной плоскостью π называется множество, состоящее из элементов двух типов: точки и прямые, с отношением инцидентности между ними, которое удовлетворяет следующим условиям:

1) любые две различные точки инцидентны с единственной прямой;
2) любые две различные прямые инцидентны с единственной точкой;
3) существуют четыре различные точки такие, что никакие три из них не инцидентны с одной прямой.

Определение 1.2. Порядком проективной плоскости называется такое число n, что:

1) плоскость содержит n^2+n+1 точку, столько же прямых;
2) каждая прямая инцидентна с $n+1$ точками;
3) каждая точка инцидентна с $n+1$прямыми.

Определение 1.3. Изоморфизмом φ проективных плоскостей π и π' называется взаимно однозначное отображение множества элементов плоскости π на множество элементов плоскости π', переводящее точки в точки, прямые в прямые и сохраняющее отношение инцидентности, то есть для любой точки A и любой прямой l плоскости π условие $A \in l$ выполняется тогда и только тогда, когда $A^{\varphi} \in l^{\varphi}$.

Определение 1.4. Изоморфизм проективной плоскости π на себя называется **коллинеацией**, или **автоморфизмом**. Все коллинеации плоскости образуют группу$Aut(\pi)$, которая называется полной группой коллинеаций этой плоскости.

Определение 1.5. Среди всех коллинеаций проективной плоскости выделяется класс коллинеаций, называемых **перспективностями**, или **центральными коллинеациями**. Центральная коллинеация фиксирует поточечно некоторую прямую (ось), оставляет на месте некоторую точку (центр) и все прямые, проходящие через эту точку.

Определение 1.6. Трансляционной прямой l плоскости π называется такая прямая, что для любых двух точек A и B, не лежащих на этой прямой, найдется автоморфизм β плоскости π, который переводит A в B и фиксирует прямую l поточечно.

Определение 1.7. Трансляционной точкой K плоскости π называется такая точка, что для любых двух различных точек A и B, лежащих с K на одной прямой, но отличных от нее, найдется автоморфизм β плоскости π, который переводит A в B и фиксирует все прямые, проходящие через K, не поточечно.

Определение 1.8. Проективная плоскость π является **плоскостью трансляций**, если она содержит трансляционную прямую.

Пусть P – конечная проективная плоскость, $|P| = n$, т.е. P содержит n^2+n+1 точку и столько же прямых. Пусть D – такое множество, состоящее из n символов, что $0,1 \in D$, $0 \neq 1$, $\infty \notin D$.

С помощью D введем координаты для всех точек и прямых проективной плоскости P.

Выберем 4 точки, образующие невырожденный четырехугольник: O, X, Y, I.

Рассмотрим точки прямых и сопоставим им элементы либо пары элементов множества D.

Точки прямой OI, кроме точки I'.

Каждой точке поставим в соответствие элемент из D:

$$O \leftrightarrow 0 \Rightarrow O=(0,0),$$

$$A \leftrightarrow a \Rightarrow A=(a,a),$$

$$I \leftrightarrow 1.$$

Точки прямой OX=[0,0], кроме точки X:

$$\forall D \in OX, D \neq X \quad \Rightarrow D = (d,0).$$

Точки прямой OY=[0], кроме точки Y:

$$\forall C \in OY, C \neq Y \quad \Rightarrow C=(0,c).$$

Точки, не лежащие на прямых OI, OX, OY:

$$\forall F \notin OX, OY, XY : \begin{array}{l} XF \cap OX = (0,g) \\ YF \cap OY = (f,0) \end{array} \Rightarrow F=(f, g),$$

$$Y = (\infty).$$

Точки прямой XY=[∞]:

$$(O + (1,m)) \cap [\infty] = (m),$$

$$Y=(\infty),$$

$$X=(0).$$

Прямые:

$$\begin{array}{l} [m,k] = (m) + (0,k), \\ [b] = Y + (b,0). \end{array}$$

Таким образом, мы получили плоскость, где каждая точка и прямая имеет свои координаты.

Определение 1.9. Алгебраическая система $\langle Q, +, \cdot \rangle$ называется **квазиполем**, если:

1) $(Q, +)$ − абелева группа,
2) $(Q, \cdot)$ −лупа,
3) выполняется левый дистрибутивный закон,
4) $0 \cdot a = 0$ для всех $a \in Q$,

5) Уравнение $ax = bx + c$ однозначно разрешимо для всех $a, b, c \in Q, a \neq b$.

Определение 1.10. Алгебраическая система $< S, +, \circ >$ называется **полуполем**, если:

1) $< S, +>$ – абелева группа с нейтральным элементом 0;
2) $< S \backslash \{0\}, \circ>$ – лупа с нейтральным элементом 1;
3) выполняются дистрибутивные законы.

Определение 1.11. Два полуполя W и $\overline{W}$ называются **изотопными**, если существует тройка $(\varphi, \psi, \varepsilon)$ невырожденных аддитивных отображений из W на $\overline{W}$, таких, что

$$x^{\varphi} \circ y^{\psi} = (x \cdot y)^{\varepsilon} \ \forall x, y \in W.$$

(где $\cdot -$ умножение в W, $\circ -$ умножение в $\overline{W}$). Тройка $(\varphi, \psi, \varepsilon)$ называется изотопизмом из W на $\overline{W}$.

Теорема 1.1.(Albert A.A., 1960)[3] Полуполевые плоскости изоморфны тогда и только тогда, когда координатизирующие полуполя изотопны.

Определение 1.12. Подмножества полуполя

$$N_l = \{x \in S | x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z \ \forall y, z \in S\},$$

$$N_m = \{y \in S | x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z \ \forall x, z \in S\},$$

$$N_r = \{z \in S | x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z \ \forall x, y \in S\}$$

называются его **левым, средним и правым ядрами** соответственно.

Лемма 1.2. Ядра N_l, N_m, N_r произвольного конечного полуполя являются полями.

Доказательство:

Пусть N_l – левое ядро полуполя S,

$$N_l = \{x \in S \mid x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z \;\; \forall\, y, z \in S\}.$$

Проверим замкнутость по сложению в N_l. Пусть $x_1, x_2 \in N_l$, тогда для произвольных $y, z \in S$:

$$(x_1 + x_2) \circ (y \circ z) = x_1 \circ (y \circ z) + x_2 \circ (y \circ z) = (x_1 \circ y) \circ z + (x_2 \circ y) \circ z = (x_1 \circ y + x_2 \circ y) \circ z = ((x_1 + x_2) \circ y) \circ z.$$

Следовательно, $x_1 + x_2 \in N_l$.

Проверим замкнутость по умножению в N_l. Пусть $x_1, x_2 \in N_l$, тогда

$$(x_1 \circ x_2) \circ (y \circ z) = x_1 \circ \big(x_2 \circ (y \circ z)\big) = x_1 \circ \big((x_2 \circ y) \circ z\big) = \big(x_1 \circ (x_2 \circ y)\big) = \big((x_1 \circ x_2) \circ y\big) \circ z.$$

Следовательно, $x_1 \circ x_2 \in N_l$.

Ассоциативность умножения в N_l. Пусть $x_1, x_2, x_3 \in N_l$, тогда

$$(x_1 \circ (x_2 \circ x_3)) = ((x_1 \circ x_2) \circ x_3).$$

Очевидно, что $0{,}1 \in N_l$:

$$0 = 0 \circ (y \circ z) = (0 \circ y) \circ z = 0 \circ z = 0,$$

$$y \circ z = 1 \circ (y \circ z) = (1 \circ y) \circ z = y \circ z.$$

Существование противоположного элемента по сложению в N_l: пусть $x \in N_l$, тогда должно выполняться условие:

$$(-x) \circ (y \circ z) = \big((-x) \circ y\big) \circ z.$$

Действительно, сложим с равенством

$$x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z,$$

и получим

$$(-x + x) \circ (y \circ z) = \big((-x) \circ y + x \circ y\big) \circ z,$$

$$0 \circ (y \circ z) = \big((-x + x) \circ y\big) \circ z,$$

$$0 = 0.$$

Следовательно, если $x \in N_l$, то $(-x) \in N_l$.

Существование обратного элемента в N_l:

Пусть $x^{'}-$ правый обратный элемент к $x \neq 0$, то есть $x \circ x^{'} = e$. Покажем, что $x' \in N_l$. Действительно,

$$x \circ x' = e,$$
$$e \circ (y \circ z) = (e \circ y) \circ z,$$
$$(x \circ x') \circ (y \circ z) = ((x \circ x') \circ y) \circ z,$$
$$x \circ (x' \circ (y \circ z)) = (x \circ (x' \circ y)) \circ z = x \circ ((x' \circ y)) \circ z),$$
$$x' \circ (y \circ z) = (x' \circ y) \circ z.$$

Покажем, что правый обратный элемент является левым обратным к x. Рассмотрим равенство:

$$(x^{'} \circ x - e) \circ x^{'} = 0,$$

$$x^{'} \circ x \circ x^{'} - e \circ x^{'} = 0,$$

$$x^{'} \circ e - e \circ x^{'} = 0,$$

$$x^{'} - x^{'} = 0.$$

Так как в полуполе нет делителей нуля, то

$$x^{'} \circ x - e = 0,$$

то есть $x^{'}-$ это левый обратный к x. Таким образом, всякий ненулевой элемент из N_l обратим, $N_l -$ поле.

Для N_r и N_m доказательство аналогично.

■

Определение 1.13. Множество

$$Z(S) = \{x \in N_l \cap N_m \cap N_r | \, x \circ y = y \circ x \, \forall \, y \in S\},$$

называется **центром** полуполя.

Лемма 1.3. Если $|Z(S)| = p^k$, $p -$ простое, то полуполе S является линейным пространством над Z_p.

Доказательство:

Очевидно, что $Z_p = \{0,1,2, \dots, p-1\} \subset Z(S)$. Проверим аксиомы линейного пространства:

Коммутативность сложения:

$$\forall\, x, y \in S \quad x + y = y + x.$$

Ассоциативность сложения:

$$\forall\, x, y, z \in S \quad x + (y + z) = (x + y) + z.$$

Существование нейтрального элемента относительно сложения:

$$\exists\, 0 \quad x + 0 = x \;\; \forall\, x \in S.$$

Существование противоположного элемента относительно сложения:

$$\forall\, x \in S \;\; \exists(-x) \in S \quad x + (-x) = 0.$$

Ассоциативность умножения на скаляр:

$$\forall\, \alpha, \beta \in Z_p \;\; \forall\, x \in S \quad \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x,$$

следует из того, что $Z_p \subset Z(S)$.

Существование нейтрального элемента относительно умножения:

$$\exists\, 1 \in Z_p \;\; 1 \cdot x = x \quad \forall\, x \in S.$$

Дистрибутивность умножения на вектор:

$$\forall\, x \in S \;\; \forall\, \alpha, \beta \in Z_p \; (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x.$$

Дистрибутивность умножения на скаляр:

$$\forall\, x, y \in S \;\; \forall\, \alpha \in Z_p \;\; \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y.$$

■

Следствие. Порядок конечного полуполя является примарным, то есть равен степени простого числа.

Теорема 1.4.(Knuth D.E., 1963)[2] Собственное полуполе порядка p^n ($p -$ простое число) существует тогда и только тогда, когда $n \geq 3$ и $p^n \geq 16$.

Определение 1.14. Рассмотрим множество матриц $R \subset GL_n(q) \cup \{0\}$, удовлетворяющее условиям:

1) $|R| = q^n$;
2) R содержит нулевую и единичную матрицы;
3) всякая ненулевая матрица из R является невырожденной;
4) R замкнуто по сложению.

Такое множество матриц будем называть **регулярным множеством** (spread set в англоязычной литературе).

Теорема 1.5. Пусть $S-$ полуполе порядка p^n ($p-$ простое), $W-$ линейное пространство размерности n над полем Z_p. Существует регулярное множество

$$R = \{\theta(y) | y \in W\} \subset GL_n(p) \cup \{0\},$$

такое, что полуполе $< W,\ +,\ \circ >$ изоморфно S.

Доказательство:

S является n -мерным линейным пространством над полем Z_p, пусть

$$1 = f_1, f_1, \dots, f_n$$

$-$ его базис. Каждое произведение базисных элементов запишем в виде разложения по базису:

$$f_i f_j = a_{ij1} f_1 + a_{ij2} f_2 + \dots + a_{ijn} f_n, \quad i, j = 1,2, \dots, n.$$

Рассмотрим базис пространства W:

$$e_1 = (1,0, \dots, 0), e_1 = (0,1, \dots, 0), \dots e_n = (0,0, \dots, 1),$$

и зададим отображение

$$\varphi: x_1 f_1 + x_2 f_2 + \dots + x_n f_n \to x_1 e_1 + x + 2e_2 + \dots + x_n e_n,$$

$x_i \in Z_p, i = 1,2, \dots, n,$ удовлетворяющую условию $(x+y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$ для всех $x, y \in S$.

Зададим умножение $\circ$ на W по правилу

$$(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \circ y^\varphi \qquad x, y \in S.$$

Достаточно задать умножение $\circ$ на базисных элементах e_i. Рассмотрим

$$(e_i \circ e_j)^{\varphi^{-1}} = f_i f_j,$$

поэтому i -ая строка матрицы $\theta(e_j)$ состоит из элементов

$$a_{ij1}, a_{ij2}, \dots, a_{ijn}.$$

Таким образом, для $j = 1,2, \dots, n$ матрица $\theta(e_j)$ равна

$$\theta(e_j) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ a_{2j1} & a_{2j1} & \dots & a_{2jj} & \dots & a_{2jn} \\ a_{3j1} & a_{3j2} & \dots & a_{3jj} & \dots & a_{3jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{nj1} & a_{nj2} & \dots & a_{njj} & \dots & a_{njn} \end{pmatrix}.$$

Отметим, что $f_1 f_j = 1 f_j = f_j \to e_i = (0,0, \dots,1, \dots,0)$, и $\theta(e_1) = E -$ единичная матрица.

Для того, чтобы доказать, что $< W,\ +,\ \circ > -$ полуполе, достаточно проверить, что матрица $\theta(y)$ является невырожденной для любого ненулевого вектора $y \in W$. Действительно, если $det\theta(y) = 0,$ то существует линейная зависимость между строками матрицы $\theta(y)$ (с коэффициентами из Z_p), тогда для некоторого ненулевого вектора $x \in W$ верно

$$x\theta(y) = 0.$$

Так как $x \circ y = 0$ в W, то $x^{\varphi^{-1}} \cdot y^{\varphi^{-1}} = 0$ в S, противоречие. ■

Таким образом, для задания умножения в произвольном полуполе S порядка p^n требуется выбрать матрицы $\theta(e_j)$, $j = 1,2, \dots, n,$ образующие базис ргулярного множества R как n -мерного линейного пространства над полем Z_p, тогда правило умножения в S следующее:

$$x \circ y = (x_1, x_2, \dots, x_n) \sum_{i=1}^{n} y_i\, \theta(e_j),$$

где $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n.$

2 Перечисление полуполей порядка 81

В статье У. Демпвольфа [1] перечислены 12 полуполей порядка 81 , как 4-мерные векторные пространства над Z_3. Это перечисление выполнено с точностью до S_3 при использовании кубического массива.

Определение 2.1. Произведение $x \circ y,\ x, y \in S$, − это вектор, j -я координата которого равна $\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{kij} x_i y_k$, где $x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i$, $y = \sum_{k=1}^{n} x_k\, e_k$, a_{kij} − элемент на месте (i, j) в матрице A_k. Все элементы a_{kij} образуют **кубический массив** $\mathcal{A}$.

Переставляя индексы i, j, k элементов кубического массива, мы получаем 6 полуполей, не обязательно изоморфных и даже изотопных. Эти 6 полуполей образуют так называемый S_3-класс.

Одной из решенных в работе задач является восстановление регулярного множества 72 полуполей порядка 81 на основе перечисления Демпвольфом 12 S_3-классов.

Перечисление выполнено при помощи вычислительной техники, была написана программа на языке программирования $C++$, программа приведена в приложении А.

Используются следующие обозначения: $P_{ijk}^n P_{jik}^n P_{ikj}^n P_{jki}^n P_{kij}^n P_{kji}^n$, $n = 1,2, \ldots ,12 -$ полуполя, полученные перестановкой индексов кубического массива. Так, например, $P_{jki}^n -$ полуполе, полученное из полуполя Демпвольфа № n применением к элементам кубического массива $\mathcal{A}$ подстановки $\begin{pmatrix} i & j & k \\ j & k & i \end{pmatrix}$. При этом получим новый кубический массив $\mathcal{M}$,

$$m_{ijk} = a_{jki}.$$

Матрицы $M_1 = (m_{1jk}), M_2 = (m_{2jk}), M_3 = (m_{3jk}), M_4 = (m_{4jk})$ образуют базис регулярного множества полуполя P_{jki}^n.

Канонический базис при этом состоит из линейных комбинаций матриц M_1, M_2, M_3, M_4, первая строка которых совпадает с базисными элементами e_1, e_2, e_3, e_4 векторного пространства S.

Для всех построенных полуполей (соответственно, полуполевых плоскостей) построены ядра N_l, N_m, N_r и вычислены их порядки.

Элемент x принадлежит левому ядру полуполя тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z \ \ \forall\, y, z \in S.$$

Перепишем это условие, используя закон умножения и регулярное множество:

$$x \cdot \theta\big(y \cdot \theta(z)\big) = \big(x \cdot \theta(y)\big) \cdot \theta(z).$$

В качестве y и z достаточно рассмотреть только базисные элементы векторного пространства:

$$x \cdot \theta\left(e_i \cdot \theta(e_j)\right) = \big(x \cdot \theta(e_i)\big) \cdot \theta(e_j), \quad i, j = 0,1, \dots ,4.$$

Аналогично для правого ядра, элемент z принадлежит правому ядру полуполя тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z \ \ \forall\, x, y \in S.$$

Это условие можно переписать

$$\theta(z) \cdot \theta(x\ ) = \theta\big(z \cdot \theta(x)\big).$$

Отсюда

$$\theta(e_i) \cdot \theta(x\ ) = \theta\big(e_i \cdot \theta(x)\big).$$

Так же для среднего ядра: элемент y принадлежит среднему ядру полуполя тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z \ \ \forall\, x, z \in S.$$

Перепишем это условие

$$\theta(x) \cdot \theta(z) = \theta\big(x \cdot \theta(z)\big).$$

И получим

$$\theta(x) \cdot \theta(e_j) = \theta\big(x \cdot \theta(e_i)\big).$$

Результаты приведены в таблице (приложение Б). Из 72 полуполей:

1) для 46 полуполей $|N_l| = 3, |N_m| = 3, |N_r| = 3,$
2) для 6 полуполей $|N_l| = 9, |N_m| = 3, |N_r| = 3,$
3) для 3 полуполя $|N_l| = 3, |N_m| = 9, |N_r| = 3,$
4) для 3 полуполя $|N_l| = 3, |N_m| = 3, |N_r| = 9,$
5) для 10 полуполей $|N_l| = 9, |N_m| = 9, |N_r| = 9,$
6) для 4 полуполя $|N_l| = 81, |N_m| = 81, |N_r| = 81.$

Рассмотрим S_3-класс №12. Четыре полуполя этого класса $P_{ijk}^{12}, P_{jik}^{12}, P_{kij}^{12}, P_{ikj}^{12}$ являются полями порядка 81, а $P_{jki}^{12}, P_{kji}^{12}$ – собственные полуполя, несмотря на то, что получены при перестановке индексов кубического массива поля.

3 Автоморфизмы конечных полуполей

Определение 3.1. Изоморфизм полуполя на себя называется **автоморфизмом**.

Лемма 3.1. Если полуполе $W -$ линейное пространство над Z_p, $\varphi -$ автоморфизм W, то φ является линейным преобразованием пространства W.

Доказательство:

Достаточно проверить условия линейности:

1. $(x+y)^{\varphi} = x^{\varphi} + y^{\varphi}$,
2. $(\alpha x)^{\varphi} = \alpha \cdot x^{\varphi} \;\; \forall \alpha \in Z_p, \forall x, y \in W$.

Первое условие выполнено по определению. Во втором условии $\alpha = 1 + 1 + \cdots + 1$, поэтому

$$\alpha x = x + x + \cdots x, (\alpha x)^{\varphi} = (x + x + \cdots + x)^{\varphi} = x^{\varphi} + x^{\varphi} + \cdots + x^{\varphi} = \alpha \cdot x^{\varphi}.$$

■

Следовательно, если регулярное множество $R \subset GL_n(p) \cup \{0\}$, то автоморфизм полуполя задается умножением на матрицу из $GL_n(p)$,

$$x^{\varphi} = x \cdot A, \;\; A \in GL_n(p).$$

Лемма 3.2. Пусть $\varphi -$ автоморфизм полуполя W,

$$x^{\varphi} = x \cdot A, \;\; A \in GL_n(p).$$

Тогда для каждого элемента $x \in W$ верно равенство

$$A^{-1}\theta(x)A = \theta(xA). \tag{3.1}$$

И обратно, всякая матрица $A \in GL_n(p)$, удовлетворяющая условию (3.1), задает автоморфизм полуполя W.

Доказательство:

По определению автоморфизма, для произвольных элементов $x, y \in W$ верно

$$y^{\varphi} * x^{\varphi} = (y * x)^{\varphi}.$$

Перепишем равенство в виде

$$yA \cdot \theta(xA) = y\theta(x)A,$$

в силу произвольности $y \in W$ из этого равенства следует (3.1). Обратное также очевидно. ■

Решена задача по построению автоморфизмов порядка 2 для всех найденных полуполей. Автоморфизм имеет порядок 2, если $A^2 = E$. Условие (3.1) достаточно проверять только для базисных элементов пространства.

Так как достаточно проверять только для базисных элементов, то

$$e_1 = (1,0,0,0) \quad \rightarrow \quad \theta(e_1) = E$$
$$e_2 = (0,1,0,0) \quad \rightarrow \quad \theta(e_2) = B$$
$$e_3 = (0,0,1,0) \quad \rightarrow \quad \theta(e_3) = C$$
$$e_4 = (0,0,0,1) \quad \rightarrow \quad \theta(e_4) = D$$

Для каждого набора матриц нужно, чтобы выполнялось условие

$$\theta(e_i)A = A\theta(e_iA),$$

где $A \in GL_4(3), i = 1,2,3,4$.

Результаты расчетов представлены в таблице (приложение В).

Отметим, что в случаях 1-5 автоморфизм порядка 2 – единственный, он задается матрицей

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1\end{pmatrix} \text{для плоскостей } P^6_{ijk}, P^6_{jik} P^6_{kij};$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix} \text{для плоскости } P^6_{ikj};$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix} \text{для плоскостей } P^7_{kji}, P^8_{kji}, P^{10}_{kji}, P^{11}_{kji}, P^7_{jki}, P^8_{jki}, P^{10}_{jki}, P^{11}_{jki},$$

$P^7_{ijk}, P^8_{ijk}, P^7_{ikj}, P^8_{ikj}, P^7_{jik}, P^8_{jik}, P^7_{kij}, P^8_{kij}, P^{10}_{ijk}, P^{11}_{ijk}, P^{10}_{jik}, P^{11}_{jik}, P^{10}_{kij}, P^{11}_{kij}, P^{10}_{ikj}, P^{11}_{ikj}$.

Для полей порядка 81 (случай 6, $P^{12}_{ijk}, P^{12}_{jik}, P^{12}_{kij}, P^{12}_{ikj}$) автоморфизм порядка 2 – это возведение элемента поля в 9-ю степень, он также задан в матричном виде,

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 2\end{pmatrix} \text{для плоскостей } P^{12}_{ijk}, P^{12}_{jik};$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix} \text{для плоскостей } P^{12}_{kij}, P^{12}_{ikj}.$$

4 Задание полуполей порядка 81 двумерным линейным пространством

Если N_l содержит $GF(9)$, то полуполе S порядка 81 можно рассмотреть как линейное пространство размерности 2 над $GF(9)$ и задавать регулярным множеством в $GL_2(9) \cup \{0\}$.

Например, пусть W – полуполе порядка 81,

$$W = \{y = (y_1, y_2) \mid y_1, y_2 \in GF(9)\},$$

$$\theta(y) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ {y_2}^3 & {y_1}^3 + y_2 \end{pmatrix},$$

$$x \circ y = x\theta(y).$$

Здесь используется представление поля

$$GF(9) = \{0,1,2,t,t+1,t+2,2t,2t+1,2t+2\}, \text{ где } t^2 + 1 = 0.$$

Можно считать W линейным пространством размерности 4 над полем Z_3, с базисными элементами $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (t,0)$, $e_3 = (0,1), e_4 = (0,t)$. Составим таблицу умножения для базисных элементов:

$\circ$	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	$2e_1$	e_4	$2e_3$
e_3	e_3	$2e_4$	$e_1 + e_3$	$2e_2 + e_4$
e_4	e_4	e_3	$e_2 + e_4$	$e_1 + 2e_3$

Каждый столбец этой таблицы соответствует строкам одной из базисных матриц регулярного множества в $GL_4(3) \cup \{0\}$.

Тогда W изоморфно полуполю

$$\overline{W} = \{\tau(x, x_2, x_3, x_4) \mid x_i \in \mathbb{Z}_3, i = \overline{1,4}\},$$

с регулярным множеством $\bar{R} \subset GL_4(3) \cup \{0\}$, состоящим из матриц вида

$$\tau\,(y_1, y_2, y_3, y_4) =$$

$$y_1\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}+y_2\begin{pmatrix}0&1&0&0\\2&0&0&0\\0&0&0&2\\0&0&1&0\end{pmatrix}+y_3\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}+y_4\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&2&0\\0&2&0&1\\1&0&2&0\end{pmatrix}.$$

Далее, даже если N_l не содержит $GF(9)$, существует способ задания полуполя порядка 81 с использованием 2-мерного линейного пространства.

В этом случае умножение в полуполе определяется более сложным способом.

Пусть $< W, +, * > -$ произвольное полуполе порядка 81, $S -$ линейное пространство размерности 2 над $GF(9)$,

$$x, y \in S, x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2),\ \ x_1, x_2, y_1, y_2 \in GF(9).$$

Определим умножение $*$ в S правилом:

$$x * y = (z_1, z_2), \tag{4.1}$$

где $z_1 = xM_{00}y^T + xM_{01}(y^\delta)^T + x^\delta M_{10}y^T + x^\delta M_{11}(y^\delta)^T$,

$z_2 = xN_{00}y^T + xN_{01}(y^\delta)^T + x^\delta N_{10}y^T + x^\delta N_{11}(y^\delta)^T, x^\delta = (x_1^3, x_2^3),\ \delta: t \to t^3$,

$M_{00}, M_{01}, M_{10}, M_{11}, N_{00}, N_{01}, N_{10}, N_{11} -\ 2 \times 2 -$ матрицы над $GF(9)$.

$$M_{00} = \begin{pmatrix}m_1 & m_2\\ m_3 & m_4\end{pmatrix}, M_{01} = \begin{pmatrix}m_5 & m_6\\ m_7 & m_8\end{pmatrix}, N_{01} = \begin{pmatrix}n_5 & n_6\\ n_7 & n_8\end{pmatrix}, N_{00} = \begin{pmatrix}n_1 & n_2\\ n_3 & n_4\end{pmatrix},$$
$$M_{11} = \begin{pmatrix}m_{13} & m_{14}\\ m_{15} & m_{16}\end{pmatrix}, M_{10} = \begin{pmatrix}m_9 & m_{10}\\ m_{11} & m_{12}\end{pmatrix}, N_{10} = \begin{pmatrix}n_9 & n_{10}\\ n_{11} & n_{12}\end{pmatrix}, N_{11} = \begin{pmatrix}n_{13} & n_{14}\\ n_{15} & n_{16}\end{pmatrix},$$
$$m_i, n_i \in GF(9).$$

Теорема 4.1. Всякое полуполе W порядка 81 изоморфно полуполю $< S, +, * >$, где умножение $*$ задано формулой (4.1). При этом матрицы $M_{00}, M_{01}, M_{10}, M_{11}, N_{00}, N_{01}, N_{10}, N_{11}$ определяются однозначно.

Доказательство:

Без ограничения общности можно считать, что полуполе W есть 4-мерное линейное пространство над Z_3 (см. теорему 1.1.). Рассмотрим соответствие φ базисных элементов

Базис W Базис S

$$\varepsilon_1 = (1,0,0,0) \quad \to \quad e_1 = (1,0)$$

$$\varepsilon_2 = (0,1,0,0) \quad \to \quad e_2 = (t,0)$$

$$\varepsilon_3 = (0,0,1,0) \quad \to \quad e_3 = (0,1)$$

$$\varepsilon_4 = (0,0,0,1) \quad \to \quad e_4 = (0,t)$$

Запишем произведения элементов e_i при помощи правила (4.1):

$$(1,0) * (1,0) = (m_1 + m_5 + m_9 + m_{13}, n_1 + n_5 + n_9 + n_{13}),$$

$$(1,0) * (t,0) = (tm_1 + t^3m_5 + tm_9 + t^3m_{13}, tn_1 + t^3n_5 + tn_9 + t^3n_{13}),$$

$$(1,0) * (0,1) = (m_2 + m_6 + m_{10} + m_{14}, n_2 + n_6 + n_{10} + n_{14}),$$

$$(1,0) * (t,0) = (tm_2 + t^3m_6 + tm_{10} + t^3m_{14}, tn_2 + t^3n_6 + tn_{10} + t^3n_{14}),$$

$$(t,0) * (1,0) = (tm_1 + tm_5 + t^3m_9 + t^3m_{13}, tn_1 + tn_5 + t^3n_9 + t^3n_{13}),$$

$$(t,0) * (t,0) = (t^2m_1 + t^4m_5 + t^4m_9 + t^6m_{13}, t^2n_1 + t^4n_5 + t^4n_9 + t^6n_{13}),$$

$$(t,0) * (0,1) = (tm_2 + tm_6 + t^3m_{10} + t^3m_{14}, tn_2 + tn_6 + t^3n_{10} + t^3n_{14}),$$

$$(t,0) * (0,t) = (t^2m_2 + t^4m_6 + t^4m_{10} + t^6m_{14}, t^2n_2 + t^4n_6 + t^4n_{10} + t^6n_{14}),$$

$$(0,1) * (1,0) = (m_3 + m_7 + m_{11} + m_{15}, n_3 + n_7 + n_{11} + n_{15}),$$

$$(0,1) * (t,0) = (tm_3 + t^3m_7 + tm_{11} + t^3m_{15}, tn_3 + t^3n_7 + tn_{11} + t^3n_{15}),$$

$$(0,1) * (0,1) = (m_4 + m_8 + m_{12} + m_{16}, n_4 + n_8 + n_{12} + n_{16}),$$

$$(0,1) * (0,t) = (tm_4 + t^3m_8 + tm_{12} + t^3m_{16}, tn_4 + t^3n_8 + tn_{12} + t^3n_{16}),$$

$$(0,t) * (1,0) = (tm_3 + tm_7 + t^3m_{11} + t^3m_{15}, tn_3 + tn_7 + t^3n_{11} + t^3n_{15},),$$

$$(0,t) * (t,0) = (t^2m_3 + t^4m_7 + t^4m_{11} + t^6m_{15}, t^2n_3 + t^4n_7 + t^4n_{11} + t^6n_{15}),$$

$$(0,t) * (0,1) = (tm_4 + tm_8 + t^3m_{12} + t^3m_{16}, tn_4 + tn_8 + t^3n_{12} + t^3n_{16}),$$

$$(0,t) * (0,t) = (t^2m_4 + t^4m_8 + t^4m_{12} + t^6m_{16}, t^2n_{\ 4} + t^4n_8 + t^4n_{12} + t^6n_{16}).$$

Учитывая изоморфизм полуполей S и W, приравняем вычисленные произведения соответствующим произведениям базисных элементов в W, получим систему уравнений:

$$
\begin{cases}
m_1 + m_5 + m_9 + m_{13} = (\varepsilon_1\varepsilon_1)_1^{\varphi}, \\
tm_1 + t^3m_5 + tm_9 + t^3m_{13} = (\varepsilon_1\varepsilon_2)_1^{\varphi}, \\
m_2 + m_6 + m_{10} + m_{14} = (\varepsilon_1\varepsilon_3)_1^{\varphi}, \\
tm_2 + t^3m_6 + tm_{10} + t^3m_{14} = (\varepsilon_1\varepsilon_4)_1^{\varphi}, \\
tm_1 + tm_5 + t^3m_9 + t^3m_{13} = (\varepsilon_2\varepsilon_1)_1^{\varphi}, \\
t^2m_1 + t^4m_5 + t^4m_9 + t^6m_{13} = (\varepsilon_2\varepsilon_2)_1^{\varphi}, \\
tm_2 + tm_6 + t^3m_{10} + t^3m_{14} = (\varepsilon_2\varepsilon_3)_1^{\varphi}, \\
t^2m_2 + t^4m_6 + t^4m_{10} + t^6m_{14} = (\varepsilon_2\varepsilon_4)_1^{\varphi}, \\
m_3 + m_7 + m_{11} + m_{15} = (\varepsilon_3\varepsilon_1)_1^{\varphi}, \\
tm_3 + t^3m_7 + tm_{11} + t^3m_{15} = (\varepsilon_3\varepsilon_2)_1^{\varphi}, \\
m_4 + m_8 + m_{12} + m_{16} = (\varepsilon_3\varepsilon_3)_1^{\varphi}, \\
tm_4 + t^3m_8 + tm_{12} + t^3m_{16} = (\varepsilon_3\varepsilon_4)_1^{\varphi}, \\
tm_3 + tm_7 + t^3m_{11} + t^3m_{15} = (\varepsilon_4\varepsilon_1)_1^{\varphi}, \\
t^2m_3 + t^4m_7 + t^4m_{11} + t^6m_{15} = (\varepsilon_4\varepsilon_2)_1^{\varphi}, \\
tm_4 + tm_8 + t^3m_{12} + t^3m_{16} = (\varepsilon_4\varepsilon_3)_1^{\varphi}, \\
t^2m_4 + t^4m_8 + t^4m_{12} + t^6m_{16} = (\varepsilon_4\varepsilon_4)_1^{\varphi}.
\end{cases}
$$

Здесь в правой части каждого уравнения записана первая координата образа произведения базисных элементов полуполя W. Для вторых координат и элементов матриц $N_{00}, N_{01}, N_{10}, N_{11}$ система выглядит аналогично. Далее, поскольку основная матрица каждой системы является блочно-диагональной, для доказательства совместности системы достаточно вычислить определитель блока:

$$
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ t & t^3 & t & t^3 \\ t & t & t^3 & t^3 \\ t^2 & t^4 & t^4 & t^6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & t^3-t & 0 & t^3-t \\ 0 & 0 & t^3-t & t^3-t \\ 0 & t^4-t^2 & t^4-t^2 & t^6-t^2 \end{vmatrix} = (t^3-t)^2\,(t^2-1)\,t^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & t^2+1 \end{vmatrix}
$$

$$
= (t^3-t)^2\,(t^2-1)\,t^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = t^4\,(t^2-1)^3 = 1 \neq 0.
$$

Следовательно, по теореме Крамера существует единственное решение системы. Теорема доказана. ■

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе перечислены 72 полуполя порядка 81 на основе списка из 12 S_3-классов Демпвольфа [1]. Построены регулярные множества, вычислены порядки ядер, найдены автоморфизмы порядка 2.

Доказаны теоретические результаты о способах задания полуполя линейными пространствами различной размерности, о матричном представлении автоморфизмов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Dempwolff, U. Semifield Planes of Order 81 / U. Dempwolff, J. Geom // Journal of Geometry / Birkhauser Verlag. –Basel. – 2008. – V.89. –P. 1–16.
2. Knuth, D.E. Finite semifields and projective planes : PhD dissertation / Donald Ervin Knuth. – Pasadena: California Inst. of Thechnology, 1963. – 70 p.
3. Albert, A.A. Finite division algebras and finite planes / A.A. Albert // Proc. Sympos. Appl. Math / AMS.– Providence, R.I. –1960. –V.10. –P. 53–70.
4. Hughes, D. R. Projective planes / D. R. Hughes, F. C. Piper. – New-York : Springer-Verlag, 1973. – 324 p.

ПРИЛОЖЕНИЕ А . Программа, для построения регулярных множеств.

```
#include <iostream>
#include <conio.h>
#include <fstream>
#include <time.h>
using namespace std;
void main()
{
	ifstream f,r,r1,fm;
	ofstream vuvod,vuvod1;
	f.open("file.txt", ios::in);
	int **mas=new int*[9];
	for(int i=0;i<9;i++) mas[i]=new int [9];
	for(int i=0; i<9; i++)
		for (int j=0;j<9;j++){
			if(f.eof()) break;
			else f>>mas[i][j];}
		for(int i=0; i<9; i++){
			cout<<endl;
			for (int j=0;j<9;j++)
				cout<<mas[i][j]<<"\t";}
		cout<<endl;
		r.open("file1.txt", ios::in);
		int **mas1=new int*[9];
		for(int n=0;n<9;n++) mas1[n]=new int [9];

		for(int n=0; n<9; n++)
			for (int m=0;m<9;m++){
				if(f.eof()) break;
```

```
        else r>>mas1[n][m];}
    for(int n=0; n<9; n++){
        cout<<endl;
        for (int m=0;m<9;m++)
            cout<<mas1[n][m]<<"\t";}
    cout<<endl;
    r1.open("filekub.txt", ios::in);
    int *mas3=new int[8];
    for(int n1=0; n1<8; n1++){
        if(r1.eof()) break;
        else r1>>mas3[n1];}
    vuvod.open("rezult.txt", ios::out);
    int x, y,y1,y2,y3,y4, a0, a1, b0, b1, c0, c1, d0, d1,
k,u=0,det;
    for(a0=0; a0<9; a0++)
        for(b0=0; b0<9; b0++)
            for(b1=0; b1<9; b1++)
                for(c0=0; c0<9; c0++)
                    for(d0=0; d0<9; d0++)
                        for(d1=0; d1<9; d1++)
                            for(c1=0; c1<9; c1++)
                            for(a1=0; a1<9; a1++)
            if((mas[a0][a1]==0)&&(mas[c0][c1])==1)
                                    {
                                        {
                                        k=0;
                                for(x=0; x<9; x++)

    for(y=0; y<9; y++)
                {
    det=mas[mas1[mas[mas[mas1[a0][x]][mas1[a1][mas1[mas1[x][x]][x]]]][m
as[mas1[b0][y]][mas1[b1][mas1[mas1[y][y]][y]]]]][y]][mas1[2][mas1[mas[mas
[mas1[c0][x]][mas1[c1][mas1[mas1[x][x]][x]]]][mas[mas1[d0][y]][mas1[d1][m
```

```
as1[mas1[y][y]][y]]]]][x]]];
                                        if (det==0)
                                                        k++
                                                }
                                if (k==1)
                                                                                                                {
u++;
        vuvod<<u<<" "<<a0<<" "<<a1<<" "<<b0<<" "<<b1<<" "<<c0<<" "<<c1<<"
"<<d0<<" "<<d1<<endl;
        }}
                                                                                                }
                                                                                        vuvod.close();

        system("pause");
}
```

ПРИЛОЖЕНИЕ Б.Таблица порядков и элементов ядер.

Плоскость P	Порядок N_l	Элементы N_l	Порядок N_r	Элементы N_r	Порядок N_m	Элементы N_m
P^1_{ijk}	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0
P^2_{ijk}	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0
P^3_{ijk}	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0
P^4_{ijk}	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0
P^5_{ijk}	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0
P^6_{ijk}	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0
P^7_{ijk}	9	0 0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1 2 0 0 2 0 0 0 2 1 0 0 2 2 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0

P_{ijk}^{8}	9	0 0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1 2 0 0 2 0 0 0 2 1 0 0 2 2 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0
P_{ijk}^{9}	9	0 0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1 2 0 0 2 0 0 0 2 1 0 0 2 2 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0
P_{ijk}^{10}	9	0 0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1 2 0 0 2 0 0 0 2 1 0 0 2 2 0 0	9	0 0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1 2 0 0 2 0 0 0 2 1 0 0 2 2 0 0	9	0 0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1 2 0 0 2 0 0 0 2 1 0 0 2 2 0 0
P_{ijk}^{11}	9	0 0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1 2 0 0 2 0 0 0 2 1 0 0 2 2 0 0	9	0 0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1 2 0 0 2 0 0 0 2 1 0 0 2 2 0 0	9	0 0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1 2 0 0 2 0 0 0 2 1 0 0 2 2 0 0
P_{ijk}^{12}	81	0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1 2 0 0 2 0 0 0 2 1 0 0 2 2 0 1 0 0 0 1 0 1 0 1 0 2 0 1 1 0 0 1 1 1 0 1 1 2 0 1 2 0 0 1 2 1 0 1 2 2 0 2 0 0 0 2 0 1	81	0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1 2 0 0 2 0 0 0 2 1 0 0 2 2 0 1 0 0 0 1 0 1 0 1 0 2 0 1 1 0 0 1 1 1 0 1 1 2 0 1 2 0 0 1 2 1 0 1 2 2 0 2 0 0 0 2 0 1	81	0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1 2 0 0 2 0 0 0 2 1 0 0 2 2 0 1 0 0 0 1 0 1 0 1 0 2 0 1 1 0 0 1 1 1 0 1 1 2 0 1 2 0 0 1 2 1 0 1 2 2 0 2 0 0 0 2 0 1

		0 2 0 2		0 2 0 2		0 2 0 2
		0 2 1 0		0 2 1 0		0 2 1 0
		0 2 1 1		0 2 1 1		0 2 1 1
		0 2 1 2		0 2 1 2		0 2 1 2
		0 2 2 0		0 2 2 0		0 2 2 0
		0 2 2 1		0 2 2 1		0 2 2 1
		0 2 2 2		0 2 2 2		0 2 2 2
		1 0 0 0		1 0 0 0		1 0 0 0
		1 0 0 1		1 0 0 1		1 0 0 1
		1 0 0 2		1 0 0 2		1 0 0 2
		1 0 1 0		1 0 1 0		1 0 1 0
		1 0 1 1		1 0 1 1		1 0 1 1
		1 0 1 2		1 0 1 2		1 0 1 2
		1 0 2 0		1 0 2 0		1 0 2 0
		1 0 2 1		1 0 2 1		1 0 2 1
		1 0 2 2		1 0 2 2		1 0 2 2
		1 1 0 0		1 1 0 0		1 1 0 0
		1 1 0 1		1 1 0 1		1 1 0 1
		1 1 0 2		1 1 0 2		1 1 0 2
		1 1 1 0		1 1 1 0		1 1 1 0
		1 1 1 1		1 1 1 1		1 1 1 1
		1 1 1 2		1 1 1 2		1 1 1 2
		1 1 2 0		1 1 2 0		1 1 2 0
		1 1 2 1		1 1 2 1		1 1 2 1
		1 1 2 2		1 1 2 2		1 1 2 2
		1 2 0 0		1 2 0 0		1 2 0 0
		1 2 0 1		1 2 0 1		1 2 0 1
		1 2 0 2		1 2 0 2		1 2 0 2
		1 2 1 0		1 2 1 0		1 2 1 0
		1 2 1 1		1 2 1 1		1 2 1 1
		1 2 1 2		1 2 1 2		1 2 1 2
		1 2 2 0		1 2 2 0		1 2 2 0
		1 2 2 1		1 2 2 1		1 2 2 1
		1 2 2 2		1 2 2 2		1 2 2 2
		2 0 0 0		2 0 0 0		2 0 0 0
		2 0 0 1		2 0 0 1		2 0 0 1
		2 0 0 2		2 0 0 2		2 0 0 2
		2 0 1 0		2 0 1 0		2 0 1 0
		2 0 1 1		2 0 1 1		2 0 1 1
		2 0 1 2		2 0 1 2		2 0 1 2
		2 0 2 0		2 0 2 0		2 0 2 0
		2 0 2 1		2 0 2 1		2 0 2 1
		2 0 2 2		2 0 2 2		2 0 2 2
		2 1 0 0		2 1 0 0		2 1 0 0
		2 1 0 1		2 1 0 1		2 1 0 1
		2 1 0 2		2 1 0 2		2 1 0 2
		2 1 1 0		2 1 1 0		2 1 1 0
		2 1 1 1		2 1 1 1		2 1 1 1
		2 1 1 2		2 1 1 2		2 1 1 2
		2 1 2 0		2 1 2 0		2 1 2 0
		2 1 2 1		2 1 2 1		2 1 2 1
		2 1 2 2		2 1 2 2		2 1 2 2
		2 2 0 0		2 2 0 0		2 2 0 0
		2 2 0 1		2 2 0 1		2 2 0 1
		2 2 0 2		2 2 0 2		2 2 0 2
		2 2 1 0		2 2 1 0		2 2 1 0
		2 2 1 1		2 2 1 1		2 2 1 1

		2 2 1 2 2 2 2 0 2 2 2 1 2 2 2 2		2 2 1 2 2 2 2 0 2 2 2 1 2 2 2 2		2 2 1 2 2 2 2 0 2 2 2 1 2 2 2 2
P_{jki}^{1}	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0
P_{jki}^{2}	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0
P_{jki}^{3}	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0
P_{jki}^{4}	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0
P_{jki}^{5}	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0
P_{jki}^{6}	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0
P_{jki}^{7}	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0
P_{jki}^{8}	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0
P_{jki}^{9}	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0
P_{jki}^{10}	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0
P_{jki}^{11}	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0
P_{jki}^{12}	9	0 0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1 2 0 0 2 0 0 0 2 1 0 0 2 2 0 0	9	0 0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1 2 0 0 2 0 0 0 2 1 0 0 2 2 0 0	9	0 0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1 2 0 0 2 0 0 0 2 1 0 0 2 2 0 0
P_{jik}^{1}	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0
P_{jik}^{2}	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0
P_{jik}^{3}	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0
P_{jik}^{4}	3	0 0 0 0	3	0 0 0 0	3	0 0 0 0

		1 0 0 0 2 0 0 0		1 0 0 0 2 0 0 0		1 0 0 0 2 0 0 0
P_{jik}^{5}	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0
P_{jik}^{6}	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0
P_{jik}^{7}	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	9	0 0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1 2 0 0 2 0 0 0 2 1 0 0 2 2 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0
P_{jik}^{8}	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	9	0 0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1 2 0 0 2 0 0 0 2 1 0 0 2 2 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0
P_{jik}^{9}	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	9	0 0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1 2 0 0 2 0 0 0 2 1 0 0 2 2 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0
P_{jik}^{10}	9	0 0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1 2 0 0 2 0 0 0 2 1 0 0 2 2 0 0	9	0 0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1 2 0 0 2 0 0 0 2 1 0 0 2 2 0 0	9	0 0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1 2 0 0 2 0 0 0 2 1 0 0 2 2 0 0
P_{jik}^{11}	9	0 0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1 2 0 0 2 0 0 0 2 1 0 0 2 2 0 0	9	0 0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1 2 0 0 2 0 0 0 2 1 0 0 2 2 0 0	9	0 0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1 2 0 0 2 0 0 0 2 1 0 0 2 2 0 0
P_{jik}^{12}	81	0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 2	81	0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 2	81	0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 2

		0 0 1 0		0 0 1 0		0 0 1 0
		0 0 1 1		0 0 1 1		0 0 1 1
		0 0 1 2		0 0 1 2		0 0 1 2
		0 0 2 0		0 0 2 0		0 0 2 0
		0 0 2 1		0 0 2 1		0 0 2 1
		0 0 2 2		0 0 2 2		0 0 2 2
		0 1 0 0		0 1 0 0		0 1 0 0
		0 1 0 1		0 1 0 1		0 1 0 1
		0 1 0 2		0 1 0 2		0 1 0 2
		0 1 1 0		0 1 1 0		0 1 1 0
		0 1 1 1		0 1 1 1		0 1 1 1
		0 1 1 2		0 1 1 2		0 1 1 2
		0 1 2 0		0 1 2 0		0 1 2 0
		0 1 2 1		0 1 2 1		0 1 2 1
		0 1 2 2		0 1 2 2		0 1 2 2
		0 2 0 0		0 2 0 0		0 2 0 0
		0 2 0 1		0 2 0 1		0 2 0 1
		0 2 0 2		0 2 0 2		0 2 0 2
		0 2 1 0		0 2 1 0		0 2 1 0
		0 2 1 1		0 2 1 1		0 2 1 1
		0 2 1 2		0 2 1 2		0 2 1 2
		0 2 2 0		0 2 2 0		0 2 2 0
		0 2 2 1		0 2 2 1		0 2 2 1
		0 2 2 2		0 2 2 2		0 2 2 2
		1 0 0 0		1 0 0 0		1 0 0 0
		1 0 0 1		1 0 0 1		1 0 0 1
		1 0 0 2		1 0 0 2		1 0 0 2
		1 0 1 0		1 0 1 0		1 0 1 0
		1 0 1 1		1 0 1 1		1 0 1 1
		1 0 1 2		1 0 1 2		1 0 1 2
		1 0 2 0		1 0 2 0		1 0 2 0
		1 0 2 1		1 0 2 1		1 0 2 1
		1 0 2 2		1 0 2 2		1 0 2 2
		1 1 0 0		1 1 0 0		1 1 0 0
		1 1 0 1		1 1 0 1		1 1 0 1
		1 1 0 2		1 1 0 2		1 1 0 2
		1 1 1 0		1 1 1 0		1 1 1 0
		1 1 1 1		1 1 1 1		1 1 1 1
		1 1 1 2		1 1 1 2		1 1 1 2
		1 1 2 0		1 1 2 0		1 1 2 0
		1 1 2 1		1 1 2 1		1 1 2 1
		1 1 2 2		1 1 2 2		1 1 2 2
		1 2 0 0		1 2 0 0		1 2 0 0
		1 2 0 1		1 2 0 1		1 2 0 1
		1 2 0 2		1 2 0 2		1 2 0 2
		1 2 1 0		1 2 1 0		1 2 1 0
		1 2 1 1		1 2 1 1		1 2 1 1
		1 2 1 2		1 2 1 2		1 2 1 2
		1 2 2 0		1 2 2 0		1 2 2 0
		1 2 2 1		1 2 2 1		1 2 2 1
		1 2 2 2		1 2 2 2		1 2 2 2
		2 0 0 0		2 0 0 0		2 0 0 0
		2 0 0 1		2 0 0 1		2 0 0 1
		2 0 0 2		2 0 0 2		2 0 0 2
		2 0 1 0		2 0 1 0		2 0 1 0
		2 0 1 1		2 0 1 1		2 0 1 1
		2 0 1 2		2 0 1 2		2 0 1 2

		2 0 2 0 2 0 2 1 2 0 2 2 2 1 0 0 2 1 0 1 2 1 0 2 2 1 1 0 2 1 1 1 2 1 1 2 2 1 2 0 2 1 2 1 2 1 2 2 2 2 0 0 2 2 0 1 2 2 0 2 2 2 1 0 2 2 1 1 2 2 1 2 2 2 2 0 2 2 2 1 2 2 2 2		2 0 2 0 2 0 2 1 2 0 2 2 2 1 0 0 2 1 0 1 2 1 0 2 2 1 1 0 2 1 1 1 2 1 1 2 2 1 2 0 2 1 2 1 2 1 2 2 2 2 0 0 2 2 0 1 2 2 0 2 2 2 1 0 2 2 1 1 2 2 1 2 2 2 2 0 2 2 2 1 2 2 2 2		2 0 2 0 2 0 2 1 2 0 2 2 2 1 0 0 2 1 0 1 2 1 0 2 2 1 1 0 2 1 1 1 2 1 1 2 2 1 2 0 2 1 2 1 2 1 2 2 2 2 0 0 2 2 0 1 2 2 0 2 2 2 1 0 2 2 1 1 2 2 1 2 2 2 2 0 2 2 2 1 2 2 2 2
P_{ikj}^{1}	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0
P_{ikj}^{2}	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0
P_{ikj}^{3}	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0
P_{ikj}^{4}	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0
P_{ikj}^{5}	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0
P_{ikj}^{6}	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0
P_{ikj}^{7}	9	0 0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1 2 0 0 2 0 0 0 2 1 0 0 2 2 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0
P_{ikj}^{8}	9	0 0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1 2 0 0 2 0 0 0 2 1 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0

		2 2 0 0				
P_{ikj}^{9}	9	0 0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1 2 0 0 2 0 0 0 2 1 0 0 2 2 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0
P_{ikj}^{10}	9	0 0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1 2 0 0 2 0 0 0 2 1 0 0 2 2 0 0	9	0 0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1 2 0 0 2 0 0 0 2 1 0 0 2 2 0 0	9	0 0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1 2 0 0 2 0 0 0 2 1 0 0 2 2 0 0
P_{ikj}^{11}	9	0 0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1 2 0 0 2 0 0 0 2 1 0 0 2 2 0 0	9	0 0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1 2 0 0 2 0 0 0 2 1 0 0 2 2 0 0	9	0 0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1 2 0 0 2 0 0 0 2 1 0 0 2 2 0 0
P_{ikj}^{12}	81	0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1 2 0 0 2 0 0 0 2 1 0 0 2 2 0 1 0 0 0 1 0 1 0 1 0 2 0 1 1 0 0 1 1 1 0 1 1 2 0 1 2 0 0 1 2 1 0 1 2 2 0 2 0 0 0 2 0 1 0 2 0 2 0 2 1 0 0 2 1 1 0 2 1 2 0 2 2 0 0 2 2 1 0 2 2 2 1 0 0 0	81	0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1 2 0 0 2 0 0 0 2 1 0 0 2 2 0 1 0 0 0 1 0 1 0 1 0 2 0 1 1 0 0 1 1 1 0 1 1 2 0 1 2 0 0 1 2 1 0 1 2 2 0 2 0 0 0 2 0 1 0 2 0 2 0 2 1 0 0 2 1 1 0 2 1 2 0 2 2 0 0 2 2 1 0 2 2 2 1 0 0 0	81	0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1 2 0 0 2 0 0 0 2 1 0 0 2 2 0 1 0 0 0 1 0 1 0 1 0 2 0 1 1 0 0 1 1 1 0 1 1 2 0 1 2 0 0 1 2 1 0 1 2 2 0 2 0 0 0 2 0 1 0 2 0 2 0 2 1 0 0 2 1 1 0 2 1 2 0 2 2 0 0 2 2 1 0 2 2 2 1 0 0 0

		1 0 0 1 1 0 0 2 1 0 1 0 1 0 1 1 1 0 1 2 1 0 2 0 1 0 2 1 1 0 2 2 1 1 0 0 1 1 0 1 1 1 0 2 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 2 1 1 2 0 1 1 2 1 1 1 2 2 1 2 0 0 1 2 0 1 1 2 0 2 1 2 1 0 1 2 1 1 1 2 1 2 1 2 2 0 1 2 2 1 1 2 2 2 2 0 0 0 2 0 0 1 2 0 0 2 2 0 1 0 2 0 1 1 2 0 1 2 2 0 2 0 2 0 2 1 2 0 2 2 2 1 0 0 2 1 0 1 2 1 0 2 2 1 1 0 2 1 1 1 2 1 1 2 2 1 2 0 2 1 2 1 2 1 2 2 2 2 0 0 2 2 0 1 2 2 0 2 2 2 1 0 2 2 1 1 2 2 1 2 2 2 2 0 2 2 2 1 2 2 2 2		1 0 0 1 1 0 0 2 1 0 1 0 1 0 1 1 1 0 1 2 1 0 2 0 1 0 2 1 1 0 2 2 1 1 0 0 1 1 0 1 1 1 0 2 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 2 1 1 2 0 1 1 2 1 1 1 2 2 1 2 0 0 1 2 0 1 1 2 0 2 1 2 1 0 1 2 1 1 1 2 1 2 1 2 2 0 1 2 2 1 1 2 2 2 2 0 0 0 2 0 0 1 2 0 0 2 2 0 1 0 2 0 1 1 2 0 1 2 2 0 2 0 2 0 2 1 2 0 2 2 2 1 0 0 2 1 0 1 2 1 0 2 2 1 1 0 2 1 1 1 2 1 1 2 2 1 2 0 2 1 2 1 2 1 2 2 2 2 0 0 2 2 0 1 2 2 0 2 2 2 1 0 2 2 1 1 2 2 1 2 2 2 2 0 2 2 2 1 2 2 2 2		1 0 0 1 1 0 0 2 1 0 1 0 1 0 1 1 1 0 1 2 1 0 2 0 1 0 2 1 1 0 2 2 1 1 0 0 1 1 0 1 1 1 0 2 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 2 1 1 2 0 1 1 2 1 1 1 2 2 1 2 0 0 1 2 0 1 1 2 0 2 1 2 1 0 1 2 1 1 1 2 1 2 1 2 2 0 1 2 2 1 1 2 2 2 2 0 0 0 2 0 0 1 2 0 0 2 2 0 1 0 2 0 1 1 2 0 1 2 2 0 2 0 2 0 2 1 2 0 2 2 2 1 0 0 2 1 0 1 2 1 0 2 2 1 1 0 2 1 1 1 2 1 1 2 2 1 2 0 2 1 2 1 2 1 2 2 2 2 0 0 2 2 0 1 2 2 0 2 2 2 1 0 2 2 1 1 2 2 1 2 2 2 2 0 2 2 2 1 2 2 2 2
P_{kij}^{1}	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0

P_{kij}^{2}	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0
P_{kij}^{3}	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0
P_{kij}^{4}	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0
P_{kij}^{5}	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0
P_{kij}^{6}	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0
P_{kij}^{7}	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	9	0 0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1 2 0 0 2 0 0 0 2 1 0 0 2 2 0 0
P_{kij}^{8}	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	9	0 0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1 2 0 0 2 0 0 0 2 1 0 0 2 2 0 0
P_{kij}^{9}	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	9	0 0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1 2 0 0 2 0 0 0 2 1 0 0 2 2 0 0
P_{kij}^{10}	9	0 0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1 2 0 0 2 0 0 0 2 1 0 0 2 2 0 0	9	0 0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1 2 0 0 2 0 0 0 2 1 0 0 2 2 0 0	9	0 0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1 2 0 0 2 0 0 0 2 1 0 0 2 2 0 0
P_{kij}^{11}	9	0 0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0	9	0 0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0	9	0 0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0

		1 2 0 0 2 0 0 0 2 1 0 0 2 2 0 0		1 2 0 0 2 0 0 0 2 1 0 0 2 2 0 0		1 2 0 0 2 0 0 0 2 1 0 0 2 2 0 0
P_{kij}^{12}	81	0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1 2 0 0 2 0 0 0 2 1 0 0 2 2 0 1 0 0 0 1 0 1 0 1 0 2 0 1 1 0 0 1 1 1 0 1 1 2 0 1 2 0 0 1 2 1 0 1 2 2 0 2 0 0 0 2 0 1 0 2 0 2 0 2 1 0 0 2 1 1 0 2 1 2 0 2 2 0 0 2 2 1 0 2 2 2 1 0 0 0 1 0 0 1 1 0 0 2 1 0 1 0 1 0 1 1 1 0 1 2 1 0 2 0 1 0 2 1 1 0 2 2 1 1 0 0 1 1 0 1 1 1 0 2 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 2 1 1 2 0 1 1 2 1 1 1 2 2 1 2 0 0 1 2 0 1 1 2 0 2 1 2 1 0 1 2 1 1 1 2 1 2 1 2 2 0 1 2 2 1	81	0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1 2 0 0 2 0 0 0 2 1 0 0 2 2 0 1 0 0 0 1 0 1 0 1 0 2 0 1 1 0 0 1 1 1 0 1 1 2 0 1 2 0 0 1 2 1 0 1 2 2 0 2 0 0 0 2 0 1 0 2 0 2 0 2 1 0 0 2 1 1 0 2 1 2 0 2 2 0 0 2 2 1 0 2 2 2 1 0 0 0 1 0 0 1 1 0 0 2 1 0 1 0 1 0 1 1 1 0 1 2 1 0 2 0 1 0 2 1 1 0 2 2 1 1 0 0 1 1 0 1 1 1 0 2 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 2 1 1 2 0 1 1 2 1 1 1 2 2 1 2 0 0 1 2 0 1 1 2 0 2 1 2 1 0 1 2 1 1 1 2 1 2 1 2 2 0 1 2 2 1	81	0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1 2 0 0 2 0 0 0 2 1 0 0 2 2 0 1 0 0 0 1 0 1 0 1 0 2 0 1 1 0 0 1 1 1 0 1 1 2 0 1 2 0 0 1 2 1 0 1 2 2 0 2 0 0 0 2 0 1 0 2 0 2 0 2 1 0 0 2 1 1 0 2 1 2 0 2 2 0 0 2 2 1 0 2 2 2 1 0 0 0 1 0 0 1 1 0 0 2 1 0 1 0 1 0 1 1 1 0 1 2 1 0 2 0 1 0 2 1 1 0 2 2 1 1 0 0 1 1 0 1 1 1 0 2 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 2 1 1 2 0 1 1 2 1 1 1 2 2 1 2 0 0 1 2 0 1 1 2 0 2 1 2 1 0 1 2 1 1 1 2 1 2 1 2 2 0 1 2 2 1

		1 2 2 2 2 0 0 0 2 0 0 1 2 0 0 2 2 0 1 0 2 0 1 1 2 0 1 2 2 0 2 0 2 0 2 1 2 0 2 2 2 1 0 0 2 1 0 1 2 1 0 2 2 1 1 0 2 1 1 1 2 1 1 2 2 1 2 0 2 1 2 1 2 1 2 2 2 2 0 0 2 2 0 1 2 2 0 2 2 2 1 0 2 2 1 1 2 2 1 2 2 2 2 0 2 2 2 1 2 2 2 2		1 2 2 2 2 0 0 0 2 0 0 1 2 0 0 2 2 0 1 0 2 0 1 1 2 0 1 2 2 0 2 0 2 0 2 1 2 0 2 2 2 1 0 0 2 1 0 1 2 1 0 2 2 1 1 0 2 1 1 1 2 1 1 2 2 1 2 0 2 1 2 1 2 1 2 2 2 2 0 0 2 2 0 1 2 2 0 2 2 2 1 0 2 2 1 1 2 2 1 2 2 2 2 0 2 2 2 1 2 2 2 2		1 2 2 2 2 0 0 0 2 0 0 1 2 0 0 2 2 0 1 0 2 0 1 1 2 0 1 2 2 0 2 0 2 0 2 1 2 0 2 2 2 1 0 0 2 1 0 1 2 1 0 2 2 1 1 0 2 1 1 1 2 1 1 2 2 1 2 0 2 1 2 1 2 1 2 2 2 2 0 0 2 2 0 1 2 2 0 2 2 2 1 0 2 2 1 1 2 2 1 2 2 2 2 0 2 2 2 1 2 2 2 2
P_{kji}^{1}	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0
P_{kji}^{2}	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0
P_{kji}^{3}	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0
P_{kji}^{4}	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0
P_{kji}^{5}	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0
P_{kji}^{6}	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0
P_{kji}^{7}	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0
P_{kji}^{8}	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0
P_{kji}^{9}	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0
P_{kji}^{10}	3	0 0 0 0	3	0 0 0 0	3	0 0 0 0

		1 0 0 0 2 0 0 0		1 0 0 0 2 0 0 0		1 0 0 0 2 0 0 0
P_{kji}^{11}	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0	3	0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 0
P_{kji}^{12}	9	0 0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1 2 0 0 2 0 0 0 2 1 0 0 2 2 0 0	9	0 0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1 2 0 0 2 0 0 0 2 1 0 0 2 2 0 0	9	0 0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1 2 0 0 2 0 0 0 2 1 0 0 2 2 0 0

ПРИЛОЖЕНИЕ В. Таблица полуполей, допускающих автоморфизм порядка 2.

№	$\mid N_l \mid$	$\mid N_r \mid$	$\mid N_m \mid$	Плоскости	
				Допускают автоморфизм порядка 2	Не допускают автоморфизм порядка 2
1	3	3	3	$P_{ijk}^{6}, P_{jik}^{6}, P_{kji}^{7}, P_{kji}^{8}, P_{kji}^{10}, P_{kji}^{11}, P_{kij}^{6}, P_{ikj}^{6}, P_{jki}^{7}, P_{jki}^{8}, P_{jki}^{10}, P_{jki}^{11}$	$P_{ijk}^{1}, P_{ijk}^{2}, P_{ijk}^{3}, P_{ijk}^{4}, P_{ijk}^{5}, P_{jik}^{1}, P_{jik}^{2}, P_{jik}^{3}, P_{jik}^{4}, P_{jik}^{5}, P_{kji}^{1}, P_{kji}^{2}, P_{kji}^{3}, P_{kji}^{4}, P_{kji}^{5}, P_{kji}^{6}, P_{kji}^{9} P_{kij}^{1}, P_{kij}^{2}, P_{kij}^{3}, P_{kij}^{4}, P_{kij}^{5}, P_{ikj}^{1}, P_{ikj}^{2}, P_{ikj}^{3}, P_{ikj}^{4}, P_{ikj}^{5}, P_{jki}^{1}, P_{jki}^{2}, P_{jki}^{3}, P_{jki}^{4}, P_{jki}^{5}, P_{jki}^{6}, P_{jki}^{9}$
2	9	3	3	$P_{ijk}^{7}, P_{ijk}^{8}, P_{ikj}^{7}, P_{ikj}^{8}$	P_{ijk}^{9}, P_{ikj}^{9}
3	3	9	3	P_{jik}^{7}, P_{jik}^{8}	P_{jik}^{9}
4	3	3	9	P_{kij}^{7}, P_{kij}^{8}	P_{kij}^{9}
5	9	9	9	$P_{ijk}^{10}, P_{ijk}^{11}, P_{jik}^{10}, P_{jik}^{11}, P_{kij}^{10}, P_{kij}^{11}, P_{ikj}^{10}, P_{ikj}^{11}$	$P_{jki}^{12} P_{kji}^{12}$
6	81	81	81	$P_{ijk}^{12}, P_{jik}^{12}, P_{kij}^{12}, P_{ikj}^{12}$	