

УДК 621.3

## **Анализ установившихся режимов в электрических цепях с коммутируемыми элементами**

**В.П. Довгун<sup>а\*</sup>, Н.П. Боярская<sup>б</sup>,  
П.А. Барыбин<sup>а</sup>, С.А. Темербаев<sup>а</sup>**

<sup>а</sup> *Сибирский федеральный университет  
Россия 660041, Красноярск, пр. Свободный, 79*

<sup>б</sup> *Красноярский государственный аграрный университет  
Россия 660049, Красноярск, пр. Мира, 90*<sup>1</sup>

Received 2.12.2011, received in revised form 9.12.2011, accepted 16.12.2011

---

*Рассмотрен метод анализа установившихся режимов в электрических цепях с периодически коммутируемыми элементами, основанный на представлении переменных цепи в виде ряда Фурье. Метод может быть использован как для аналитических, так и для численных расчетов. Точность результатов анализа можно контролировать, варьируя число гармоник, учитываемых при анализе.*

*Предложен алгоритм автоматического формирования уравнений цепи в смешанном координатном базисе напряжений узлов и токов коммутируемых элементов. Приведены примеры расчета, иллюстрирующие предлагаемый метод.*

*Ключевые слова: качество электроэнергии, импульсные преобразователи, многочастотное усреднение.*

---

### **Введение**

С конца 1980-х гг. проблема качества электроэнергии приобретает все большее значение как для энергосетевых компаний, так и для потребителей. Одной из причин, вызывающих ухудшение качества электроэнергии, является рост нелинейных нагрузок. В первую очередь это импульсные источники питания. В настоящее время импульсные преобразователи, работающие на частотах переключения от десятков до сотен килогерц, используются в источниках вторичного электропитания компьютеров, систем телекоммуникаций, технологических установок, бытовой техники и т.п.

Существенный недостаток импульсных преобразователей заключается в том, что они источники высокочастотных помех, возникающих в процессе переключения. Такие помехи представляют в виде суммы гармоник с частотами, кратными частоте сети. Высокий уровень содержания гармоник отрицательно влияет на эффективность работы промышленного электрооборудования, бытовых приборов, вычислительной техники, приводит к увеличению

---

\* Corresponding author E-mail address: [Vdovgun@sfu-kras.ru](mailto:Vdovgun@sfu-kras.ru)

<sup>1</sup> © Siberian Federal University. All rights reserved

потерь электроэнергии [1, 2]. Поэтому развитие методов анализа гармонического состава несинусоидальных напряжений и токов в электрических цепях с импульсными преобразователями – важная и актуальная задача. Такие методы необходимы при анализе качества электрической энергии, при проектировании фильтрокомпенсирующих устройств.

Следует отметить, что анализ цепей с импульсными преобразователями сопряжен с серьезными трудностями. Причина в том, что коммутации изменяют топологию цепи, поэтому работа импульсного преобразователя представляет периодическую последовательность различных режимов. Для расчета таких цепей необходимы специализированные методы. Наряду с численными важное значение имеют и аналитические методы, так как они позволяют понять особенности распространения гармоник токов и напряжений в электрических сетях, исследовать влияние конфигурации сети на уровень гармоник. При этом целесообразно сочетание аналитических и численных процедур расчета цепей с импульсными преобразователями.

В настоящее время для моделирования цепей с импульсными преобразователями широко используются программы схемотехнического моделирования, такие как Pspice или Multisim [3, 4]. Анализ несинусоидальных режимов осуществляется во временной области. Для этого используются методы численного интегрирования с автоматическим выбором шага [5]. Однако в случае анализа цепей с периодически коммутируемыми элементами эти методы имеют существенные недостатки. В цепях с коммутируемыми элементами наблюдаются процессы двух видов: быстро изменяющееся состояние коммутируемых элементов и относительно медленное изменение токов и напряжений непрерывной части цепи. На временном интервале, соответствующем переключению коммутируемого элемента, происходит резкое уменьшение шага интегрирования. Это приводит к увеличению времени моделирования и ухудшению точности расчетов [4, 6]. Подчеркнем, что анализ выполняется во временной области. Для определения спектрального состава переменных цепи используется процедура быстрого преобразования Фурье.

Другой метод анализа цепей с импульсными преобразователями, основанный на представлении токов и напряжений в виде ряда Фурье, рассмотрен в работах [9-14]. В [12] он назван обобщенным методом усреднения. Исходным математическим описанием цепи является система дифференциальных уравнений, которые затем трансформируются в частотную область. С точки зрения компьютерного моделирования это существенный недостаток, так как алгоритмы формирования уравнений состояния для цепей общего вида очень сложны.

В статье изложен общий метод анализа установившихся режимов в электрических цепях с периодически коммутируемыми элементами, основанный на спектральном представлении переменных цепи и законов управления коммутируемыми элементами.

Особенности предлагаемого метода заключаются в следующем.

1. Коммутируемые элементы выступают непрерывными моделями, содержащими зависимые источники напряжения и тока.

2. Используется представление токов и напряжений цепи в виде ряда Фурье.

3. Уравнения цепи формируются в частотной области. Это позволяет упростить анализ за счет исключения этапа формирования дифференциальных уравнений. Результатом расчета являются комплексные амплитуды гармоник токов и напряжений.

4. Математической моделью анализируемой цепи являются линейные уравнения в смешанном координатном базисе напряжений узлов цепи и токов коммутируемых элементов. Для решения таких уравнений можно использовать эффективные методы хранения и обращения разреженных матриц, имеющиеся в математических пакетах, таких как Matlab.

### 1. Модели коммутируемых элементов

Анализируемая цепь может содержать индуктивные, емкостные, резистивные элементы, независимые источники, а также коммутируемые элементы. Последние мы будем полагать идеальными. Это означает, что коммутация происходит мгновенно, сопротивление замкнутой ветви равно нулю, а разомкнутой – бесконечно велико. При коммутациях ключей не должны нарушаться условия непрерывности токов индуктивных и напряжений емкостных элементов в непрерывной части цепи.

Представим коммутируемый элемент многополюсником, переменные на внешних зажимах которого связаны компонентными уравнениями

$$[x_2]=[M][x_1].$$

Здесь  $[x_1]$  – вектор входных (управляющих), а  $[x_2]$  – вектор зависимых (выходных) переменных. Рассмотрим модели коммутируемых элементов, которые будут использоваться в дальнейшем.

Двухпозиционный ключ (рис. 1). Компонентные уравнения ключа имеют вид.

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mu \\ \mu & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Значения коэффициента  $\mu$  зависят от положения ключа на рис. 1. Уравнениям (1) соответствует эквивалентная схема, показанная на рис. 2.

В качестве другого примера рассмотрим схему диодного моста (рис. 3).

Компонентные уравнения моста

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mu \\ \mu & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

В формуле (2)  $\mu = \text{sign}(u_1)$ . Последним уравнениям также соответствует модель, показанная на рис. 2.

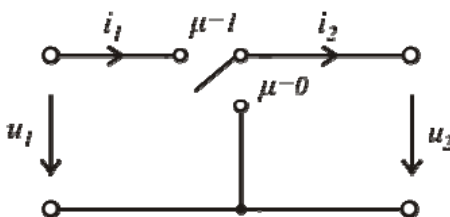


Рис. 1. Схема двухпозиционного ключа

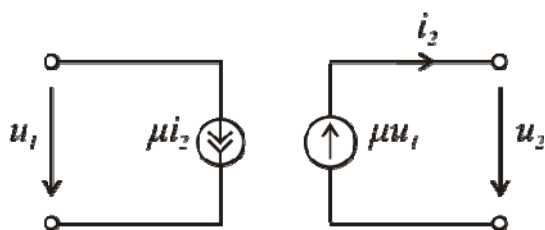


Рис. 2. Модель двухпозиционного ключа

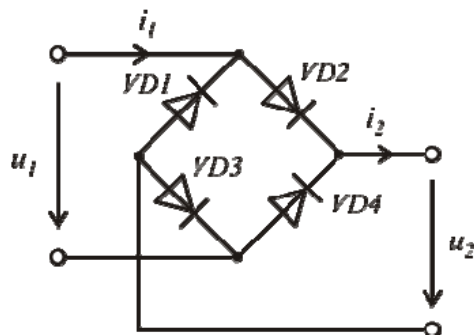


Рис. 3. Схема диодного моста

## 2. Спектральный анализ цепей с коммутируемыми элементами

Будем считать, что коммутации в цепи происходят с периодом  $T$ . Переменные цепи (токи, напряжения, законы управления коммутируемыми элементами) являются периодическими функциями времени. Они могут быть представлены рядом Фурье

$$x(t) = \sum_n \langle x \rangle_n(t) e^{jn\omega t}.$$

Здесь  $\langle x \rangle(t)$  – комплексная амплитуда  $n$ -й гармоники, определяемая по формуле

$$\langle x \rangle_n(t) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jn\omega t} dt.$$

Частота основной гармоники  $\omega_1 = 2\pi/T$ .

Коэффициент  $\langle x \rangle_0$  равен среднему значению  $x(t)$  за период. Коэффициент  $\langle x \rangle_1$  определяет амплитуду основной гармоники.

В установившемся режиме, когда токи и напряжения есть периодические функции времени, комплексные амплитуды гармоник  $\langle x \rangle_n$  – постоянные, не зависящие от времени. Если функция времени  $x(t)$  является вещественной, то коэффициенты  $\langle x \rangle_n$  и  $\langle x \rangle_{-n}$  – комплексно сопряженными, т.е. комплексные амплитуды гармоник с отрицательными частотами определяются амплитудами компонент с положительными частотами.

Точность результатов расчета зависит от числа гармоник, учитываемых при анализе. Амплитуды гармоник быстро убывают с ростом их порядкового номера. Кроме того, в большинстве случаев непрерывная подсистема импульсного преобразователя обладает частотно-селективными свойствами и ослабляет амплитуды большинства гармоник. Например, не-

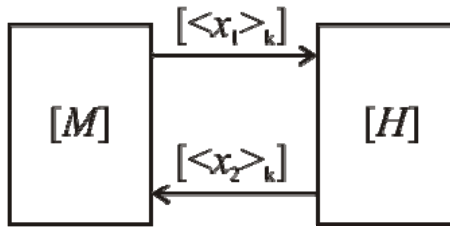


Рис. 4. Обобщенная структура цепи с коммутируемыми элементами

прерывная подхема резонансного конвертора – это колебательный контур, настроенный на частоту основной гармоники, поэтому составляющие с частотами, отличными от  $\omega_1$ , оказываются пренебрежимо малыми.

Представим анализируемую цепь в виде структуры, показанной на рис. 4. Здесь  $H$  – непрерывная часть цепи,  $M$  – коммутируемый элемент.

Связь между спектральными составляющими переменных цепи определяется компонентными уравнениями. Компонентные уравнения непрерывной части цепи (учтены гармоники с индексами  $k - 1, k, k + 1$ )

$$\begin{bmatrix} \langle x_1 \rangle_{k-1} \\ \langle x_1 \rangle_k \\ \langle x_1 \rangle_{k+1} \end{bmatrix} = \text{diag} \left[ [H]_{k-1} \quad [H]_k \quad [H]_{k+1} \right] \begin{bmatrix} \langle x_2 \rangle_{k-1} \\ \langle x_2 \rangle_k \\ \langle x_2 \rangle_{k+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \langle U \rangle_{k-1} \\ \langle U \rangle_k \\ \langle U \rangle_{k+1} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

В уравнении (3)  $\langle x_1 \rangle_k, \langle x_2 \rangle_k$  – комплексные амплитуды гармоник входных (управляющих) и выходных (управляемых) переменных коммутируемого элемента,  $[H]_k$  – матрица иммитансов непрерывной части цепи для  $k$ -й гармоники,  $[\langle U \rangle_k]$  – вектор внешних воздействий (токов и напряжений источников).

При выводе компонентных уравнений для коммутируемых элементов учтем, что умножению функций времени соответствует свертка их спектров

$$\langle m \cdot x \rangle_n = \sum_{(i)} \langle m \rangle_{n-i} \langle x \rangle_i.$$

Поэтому компонентное уравнение коммутируемого элемента имеет вид:

$$\begin{bmatrix} \langle x_2 \rangle_{-1} \\ \langle x_2 \rangle_0 \\ \langle x_2 \rangle_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle m \rangle_0 & \langle m \rangle_{-1} & 0 \\ \langle m \rangle_1 & \langle m \rangle_0 & \langle m \rangle_{-1} \\ 0 & \langle m \rangle_1 & \langle m \rangle_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle x_1 \rangle_{-1} \\ \langle x_1 \rangle_0 \\ \langle x_1 \rangle_1 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Заметим, что компонентная матрица в формуле (4) имеет теплицеву структуру. Матрицы такой структуры часто встречаются в задаче спектрального оценивания при использовании параметрических моделей случайных процессов [11].

Таким образом, модель коммутируемого элемента, соответствующая равенству (4), представляет собой связанный многополюсник, имеющий  $2n \times (2k + 1)$  зажимов. Здесь  $n$  – число управляющих переменных коммутируемого элемента,  $k$  – число учитываемых гармоник. Размер модели определяется числом учитываемых гармоник.

Решая уравнения (3) и (4), получим:

$$[X_1] = ([1] - [H][M])^{-1}[U]. \tag{5}$$

Система уравнений (5) позволяет определить комплексные амплитуды гармоник управляющих переменных.

В качестве примера запишем уравнения (3) и (4) для схемы понижающего импульсного регулятора, показанного на рис. 5.

Представим коммутируемые элементы двухпозиционным ключом. Заменяя ключ непрерывной моделью, получим расчетную схему, показанную на рис. 6. Пунктиром на рис. 6 выделена модель двухпозиционного ключа.

При расчетах будем учитывать гармоники с номерами -1, 0, 1. Непрерывная часть цепи описывается уравнениями

$$\begin{bmatrix} \langle U_1 \rangle_{-1} \\ \langle I_2 \rangle_{-1} \\ \langle U_1 \rangle_0 \\ \langle I_2 \rangle_0 \\ \langle U_1 \rangle_1 \\ \langle I_2 \rangle_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/Z(-j\omega_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/R_H & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/Z(j\omega_1) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle U_2 \rangle_{-1} \\ \langle I_1 \rangle_{-1} \\ \langle U_2 \rangle_0 \\ \langle I_1 \rangle_0 \\ \langle U_2 \rangle_1 \\ \langle I_1 \rangle_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ E \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Здесь  $Z(j\omega) = \frac{-\omega^2 RLC + j\omega L + R}{j\omega RC + 1}$  ..

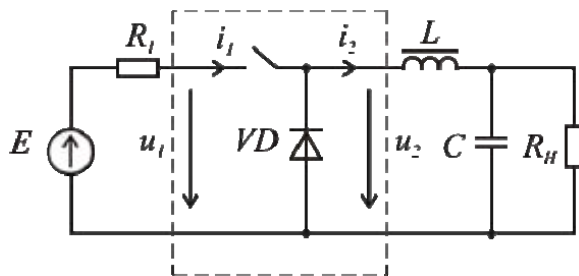


Рис. 5. Схема понижающего импульсного регулятора

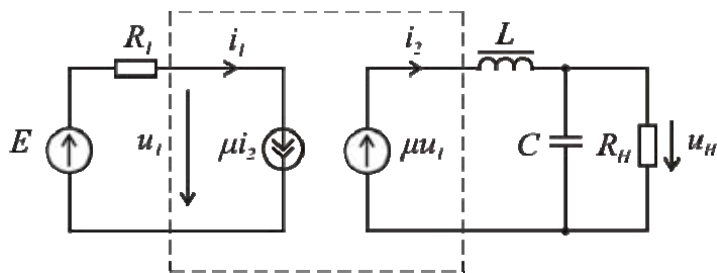


Рис. 6. Модель понижающего импульсного регулятора

### Уравнения коммутируемого элемента

$$\begin{bmatrix} \langle U_2 \rangle_{-1} \\ \langle I_1 \rangle_{-1} \\ \langle U_2 \rangle_0 \\ \langle I_1 \rangle_0 \\ \langle U_2 \rangle_1 \\ \langle I_1 \rangle_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle m \rangle_0 & 0 & \langle m \rangle_{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \langle m \rangle_0 & 0 & \langle m \rangle_{-1} & 0 & 0 \\ \langle m \rangle_1 & 0 & \langle m \rangle_0 & 0 & \langle m \rangle_{-1} & 0 \\ 0 & \langle m \rangle_1 & 0 & \langle m \rangle_0 & 0 & \langle m \rangle_{-1} \\ 0 & 0 & \langle m \rangle_1 & 0 & \langle m \rangle_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \langle m \rangle_1 & 0 & \langle m \rangle_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle U_1 \rangle_{-1} \\ \langle I_2 \rangle_{-1} \\ \langle U_1 \rangle_0 \\ \langle I_2 \rangle_0 \\ \langle U_1 \rangle_1 \\ \langle I_2 \rangle_1 \end{bmatrix}.$$

Здесь  $\langle m \rangle_0 = (\tau/T) = 1/2$ ,  $\langle m \rangle_1 = \langle m \rangle_{-1} = 1/\pi$ .

Подставляя последние равенства в уравнение (5), в случае  $R_1 = 0$  получим:  $\langle U_2 \rangle_{-1} = \langle U_2 \rangle_1 = E/\pi$ ,  $\langle U_2 \rangle_0 = (\tau/T)E$ , где  $\tau/T$  – коэффициент заполнения импульса.

### 3. Уравнения в расширенном координатном базисе узловых напряжений и токов коммутируемых элементов

Уравнения в форме (3) и (4) удобны для приближенного аналитического расчета цепей небольшого размера, когда элементы гибридной матрицы могут быть определены вручную. К тому же они позволяют определить только управляющие переменные коммутируемых элементов. В общем случае необходим регулярный метод, дающий возможность автоматизировать процесс формирования уравнений для цепи произвольной конфигурации.

Наиболее распространенным методом, используемым при компьютерном моделировании электрических цепей, является метод формирования уравнений в однородном координатном базисе узловых напряжений (метод узловых напряжений). К основным достоинствам этого метода можно отнести простые правила формирования уравнений и хорошую численную обусловленность матрицы узловых проводимостей. Однако для анализа цепей с коммутируемыми элементами «классический» метод узловых напряжений неприменим, так как уравнения коммутируемых элементов нельзя описать с помощью проводимостей. Кроме того, в уравнениях для гармоники с номером  $k = 0$  появляются короткозамкнутые ветви. Для учета «нерегулярных» элементов расширим координатный базис, включив в него токи таких коммутируемых элементов и короткозамкнутых ветвей. Система уравнений в расширенном координатном базисе примет вид

$$\begin{bmatrix} [Y] & [M] \\ [M]_2 & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\dot{V}] \\ [\dot{I}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [J] \\ [0] \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Здесь  $[Y] = \text{diag}[\langle Y \rangle_{k-1} \langle Y \rangle_k \langle Y \rangle_{k+1}]$  – блочно-диагональная матрица узловых проводимостей непрерывной части цепи размера  $(n_y - 1) \times k$ ;  $[M]$  – матрица коэффициентов компонентных уравнений коммутируемых элементов размера  $n \times (2k + 1)$ ;  $[\dot{E}]$  и  $[\dot{J}]$  – векторы комплексных амплитуд гармоник внешних источников.

Матрицы узловых проводимостей непрерывной части цепи имеют обычную структуру. Алгоритмы их формирования подробно рассмотрены в литературе по компьютерному моделированию электронных цепей [5]. Для схемы на рис. 6 субматрица  $[\langle Y \rangle_k]$  имеет вид

$$[\langle Y \rangle_k] = \begin{bmatrix} G_1 & -G_1 & 0 & 0 \\ -G_1 & G_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/jk\omega_1 L & -1/jk\omega_1 L \\ 0 & 0 & -1/jk\omega_1 L & G_n + jk\omega_1 C + 1/jk\omega_1 L \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим подробнее структуру матрицы компонентных уравнений коммутируемых элементов  $[M]$ . Ненулевые элементы расположены в столбцах, соответствующих узлам, к которым подключены коммутируемые элементы. Остальные элементы  $[M]$  нулевые. Таким образом, ненулевая часть  $[M]$  имеет теплицеву структуру и аналогична компонентной матрице в системе уравнений (4).

Матрицы коэффициентов в системе уравнений (6) имеют большую размерность и являются существенно разреженными, поэтому для увеличения скорости обработки целесообразно использовать специальные методы кодирования разреженных матриц. Субматрицы в уравнениях (6) целесообразно хранить в виде набора одномерных и двумерных массивов.

### Заключение

В статье рассмотрен общий метод анализа цепей с коммутируемыми элементами, основанный на спектральном представлении переменных цепи. Основное отличие предлагаемого метода от известных заключается в том, что расчет проводится в частотной, а не во временной области. Анализируемая цепь описывается системой линейных уравнений, размер которой зависит от числа учитываемых гармоник. Точность результатов анализа можно контролировать, варьируя число гармоник. Метод можно использовать как для аналитических, так и для численных расчетов. Он может быть применен для исследования спектрального состава колебаний в цепях с импульсными преобразователями, а также для определения показателей качества электроэнергии, таких как коэффициент искажений, коэффициент гармоник и т.п. [1, 2].

### Список литературы

- [1] *Аррилага Дж., Брэдли Д., Боджер П.* Гармоники в электрических системах: Пер. с англ. М.: Энергоатомиздат, 1990. 320 с.
- [2] *Жежеленко И.В.* Высшие гармоники в системах электроснабжения промпредприятий. 4-е изд., М.: Энергоатомиздат, 1994.
- [3] *Разевиг В.Д.* Система сквозного проектирования электронных устройств DESIGNLAB 8.0. М.: СОЛОН-Р, 2003. 704 с.
- [4] *Болотовский Ю.И., Таназлы Г.И.* ORCAD 9.x, ORCAD 10.x. Практика моделирования. М.: СОЛОН-ПРЕСС, 2008. 208 с.
- [5] *Влах И., Сингал К.* Машинные методы анализа и проектирования электронных схем: Пер. с англ. М.: Радио и связь, 1988. 560 с.
- [6] *Li Q., Yuan F.* Time-domain response and sensitivity of periodically switched nonlinear circuits// IEEE trans. on circuits and systems. 2003. Vol. 50. No 11. Pp. 1437-1446.
- [7] *Миддлбрук Р.* Малосигнальное моделирование ключевых преобразователей мощности с широтно-импульсным регулированием// ТИИЭР. 1988. Т. 76, № 4. С. 46-59.



- [8] Мелешин В.И. Широтно-импульсный модулятор в непрерывной модели преобразователя // Электричество. 2004. № 3.
- [9] Sanders S., Verghese G. Synthesis of averaged circuit models for switched power converters// IEEE trans. on circuits and systems. 1991. Vol. 38. No 8. Pp. 905-915.
- [10] Kamas L., Sanders S. Parameter and state estimation in power electronic circuits// IEEE transactions on circuits and systems. 1993. Vol. 40. No 12. Pp. 920-928.
- [11] Sanders S., Norovolski J., Liu X., Verghese G. Generalized averaging method for power conversion circuits// IEEE transactions on power electronics. 1991. Vol. 6. No 2. Pp. 251-258.
- [12] Caliskan V., Verghese G., Stankovich A. Multifrequency averaging of DC/DC converters// IEEE trans. on power electronics. 1999. Vol. 14. No 1. Pp. 124-133.
- [13] Van der Woude, Koning W, Fuad Y. On the periodic behavior of PWM DC-DC converters// IEEE trans. on power electronics. 2002. Vol. 17. No. 4. Pp. 585-595.
- [14] Ignatova V., Granjon P., Bacha S. Power electronics harmonic analysis based on the linear time periodic modeling// Electrical power quality and utilization. 2006. Vol. XII. No 1. Pp. 45-51.

## **Steady-State Analysis of Networks with Switched Elements**

**Valery P. Dovgun<sup>a</sup>, Natalia P. Boyarskaya<sup>b</sup>,  
Pavel A. Barybin<sup>a</sup> and Sergey A. Temerbaev<sup>a</sup>**  
*<sup>a</sup> Siberian Federal University  
79 Svobodny, Krasnoyarsk, 660041 Russia  
<sup>b</sup> Krasnoyarsk State Agrarian University,  
90 Mira st., Krasnoyarsk, 660049 Russia*

---

*A general method for steady-state analysis of periodically switched electrical networks is considered. The method is based on Fourier series. It can be used to compute the steady-state responses of switched networks up to any degree of accuracy.*

*An algorithm for computer formulation of network equations is presented. Illustrative examples are given.*

*Keywords: power quality, switched elements, multifrequency averaging.*

---