УДК 517.55

Устойчивость многослойных разностных схем и амебы алгебраических гиперповерхностей

Марина С. Рогозина*
Институт математики,
Сибирский федеральный университет,
Свободный 79, Красноярск, 660041,
Россия

Получена 18.12.2011, окончательный вариант 25.01.2012, принята к печати 10.02.2012

Рассматривается проблема устойчивости многослойных разностных схем, в исследовании которой применяются методы теории амеб алгебраических гиперповерхностей. Дано необходимое условие устойчивости задачи Коши для многослойной линейной разностной схемы. Приведен пример, показывающий, что это условие не является достаточным. Сформулировано и доказано достаточное условие устойчивости.

Ключевые слова: разностная схема, задача Коши, устойчивость, амеба алгебраической гиперповерхности.

Введение

Разностной схемой обычно называют разностное уравнение, аппроксимирующее исходное дифференциальное уравнение и дополнительные (начальные, граничные) условия. Рассмотрим сначала одномерный случай (см., например, [1]).

Оператор сдвига δ по переменной x в одномерном случае определяется следующим: образом $\delta f(x) = f(x+1)$, а полиномиальный разностный оператор имеет вид

$$P(\delta) = \sum_{\alpha \in A} a_\alpha \delta^\alpha,$$

где $a_\alpha(x)$ — коэффициенты оператора. Рассматриваются разностные уравнения вида

$$P(\delta)f(x) = g(x), \ \ x \in X, \tag{1}$$

где $f(x)$ — неизвестная, а $g(x)$ — заданная на некотором фиксированном множестве $X \subset \mathbb{Z}$ функция. Из множества X выделим подмножество $X_0 \subset X$ "начальных" ("граничных") точек и сформулируем задачу: найти функцию $f(x)$, удовлетворяющую уравнению (1) и совпадающую на X_0 с заданной функцией:

$$f(x) = \varphi(x), \ \ x \in X_0. \tag{2}$$

Как правило, в качестве X берем целые неотрицательные числа $X = \mathbb{Z}_+$, а в качестве $X_0 = (0, 1, ..., m-1)$. При этих условиях задача (1)–(2) очевидным образом имеет единственное решение.

Различные варианты определения устойчивости в случае однородного линейного разностного уравнения с постоянными коэффициентами означают, *что все корни характеристического уравнения по модулю не превосходят единицу, а если корень по модулю равен единице, то он простой.*

*rogozina.marina@mail.ru

В многомерном случае существование и единственность решения задачи (1)–(2) зависят от всех объектов, участвующих в ее постановке: разностного оператора $P(\delta)$, множеств X и X_0 . Приведем некоторые типичные ситуации.

В первой из них, возникающей, как правило, в комбинаторном анализе, $X = \mathbb{Z}^n_+$, а выбор множества, на котором задаются начальные данные X_0, зависит от свойства характеристического полинома P (см., например, [2, 3]).

Во втором случае $X = \{x \in \mathbb{Z}^n, x_n \geqslant 0\}$ и в качестве множества $X_0 \subset X$ берем $X_0 = \{x \in X : x_n = 0, 1, ..., m-1\}$, а характеристический многочлен имеет моном старшей степени m по одной из переменных (см. [4]). Такого рода разностные операторы появляются в теории разностных схем, например при дискретизации уравнений математической физики, и называются они линейными многослойными разностными схемами с постоянными коэффициентами. Коэффициенты разностного оператора при этом зависят от параметров сетки. Разностная схема – это разностное уравнение, коэффициенты которого зависят от параметров сетки.

Одно из важнейших свойств разностной схемы — устойчивость. Есть разные подходы к этому понятию.Так, разностную схему можно рассматривать как операторное уравнение с операторами, действующими в пространстве сеточных функций, и соответствующим образом определить понятие устойчивости [5]. В теории Лакса [6] сходимость разностной схемы изучается в пространстве решений исходной дифференциальной задачи и теорема эквивалентности утверждает, что если исходная дифференциальная задача корректна и схема аппроксимирует эту задачу, то устойчивость необходима и достаточна для сходимости.

В монографии [4] исследована устойчивость однородной двухслойной линейной разностной схемы с постоянными коэффициентами. Условие устойчивости здесь дается в терминах, связанных с понятием разностной функции Грина задачи Коши.

В данной работе к исследованию устойчивости многослойных разностных схем применяется теория амеб алгебраических гиперповерхностей. Понятие амебы позволяет сформулировать многомерный аналог условия, что все корни характеристического многочлена лежат в единичном круге, т.е. условия устойчивости многомерных разностных схем.

Пионерской работой по теории амеб является статья Форсберга–Пассаре–Циха [7]. После этой работы появилось множество других, связанных как с описанием самих амеб, так и с их применением в теории димеров, в теории расширений неархимедовых нолей и др. Недавно Лейнартасом–Пассаре–Цихом [8] теория амеб была применена к исследованию асимптотик многомерных разностных уравнений, играющих важную роль в теории обработки цифровых сигналов, в частности при исследовании устойчивости цифровых рекурсивных фильтров.

В первом параграфе для многослойных однородных разностных схем получена формула для решения задачи Коши через ее разностную функцию Грина (теорема 1). В случае двухслойных разностных схем эта формула была получена в монографии [4], а для задачи Коши в положительном октанте $\mathbb{Z}^n_+$ целочисленной решетки $\mathbb{Z}^n$ в [2]. Кроме того, во втором параграфе формулируются и доказываются необходимое и достаточное условия устойчивости задачи Коши для многослойной линейной разностной схемы (теорема 2).

1. Формула для решения задачи Коши

Введем необходимые обозначения и определения.

Пусть $P(\delta, \delta_{n+1}) = \sum\limits_{(\alpha,\beta)\in A} a_{\alpha,\beta}\delta^\alpha\delta^\beta_{n+1}$ — полиномиальный разностный оператор, т.е. $A = \{(\alpha, \beta)\}$ — конечное подмножество целочисленной решетки $\mathbb{Z}^{n+1}$, где $\delta = (\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n)$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ и $\delta^\alpha = (\delta_1^{\alpha_1}, \delta_2^{\alpha_2}, ..., \delta_n^{\alpha_n})$.

В данной работе рассматриваются разностные уравнения с постоянными коэффициентами, символ которых имеет специальный вид. А именно, если записать характеристический многочлен $P(z,w)$ как многочлен по переменной w , коэффициенты которого $P_j(z)$ являются многочленами переменных $z=(z_1,\, z_2,\, ...,\, z_n)$

$$P(z,w)=P_m(z)w^m+P_{m-1}(z)w^{m-1}+...+P_0(z),$$

то *коэффициент при старшей степени* $P_m(z)\equiv 1$.

Такие разностные уравнения возникают в теории разностных схем, и ниже мы будем использовать терминологию этой теории.

Рассмотрим задачу Коши для однородной $(m+1)$-слойной линейной разностной схемы вида

$$[\delta_{n+1}^m+P_{m-1}(\delta)\delta_{n+1}^{m-1}+...+P_0(\delta)]f(x,y)=0, \tag{3}$$

где $P_j(\delta)$ — полиномиальные разностные операторы с постоянными коэффициентами и $x=(x_1,\, x_2,\, ...,\, x_n)\in\mathbb{Z}^n$.

Задача Коши для уравнения (3) формулируется следующим образом: *найти решение уравнения (3), удовлетворяющее начальным условиям*

$$f(x,y)=\varphi_y(x),\; y=0,1,...,m-1, \tag{4}$$

где $\varphi_y(x)$ *— заданные функции переменного* $x=(x_1,\, x_2,\, ...,\, x_n)$.

Далее нам потребуются некоторые сведения из теории амеб алгебраических гиперповерхностей (см. [7]).

Определение 1. *Многогранником Ньютона* N_P *многочлена* $P\,(z,w)$ *называется выпуклая оболочка в* $\mathbb{R}^{n+1}$ *элементов множества* A.

Пусть $V=\left\{\lambda\in\mathbb{C}^{n+1}: P(z,w)=0\right\}$ — множество нулей многочлена $P(z,w)$, оно называется характеристическим множеством.

Определение 2. *Амебой алгебраической гиперповерхности называется образ множества нулей* V *многочлена* $P(z,w)=\sum\limits_{(\alpha,\beta)\in A} c_{\alpha,\beta}z^\alpha w^\beta$ *при отображении*

$$\mathrm{Log}:(z,w)\to(z_1,...,z_n,w)\to(\log|z_1|,...,\log|z_n|,\log|w|)=(\mathrm{Log}|z|,\mathrm{Log}|w|).$$

Применение термина "амеба" объясняется тем, что для $n=2$ изображение множества $\mathrm{Log}\,V$ в общем случае действительно напоминает амебу.

Отметим следующие свойства амебы.

Множество V, а значит и $\mathrm{Log}\,V$, замкнуто, поэтому его дополнение открыто. Оно состоит из конечного числа связных выпуклых компонент. Пусть E — связная компонента дополнения $\mathbb{R}^{n+1}\setminus\mathrm{Log}\,V$.

Определение 3. *Конус рецессии выпуклого множества* E *–– это наибольший конус, который можно поместить в* E *некоторым сдвигом.*

Определение 4. *Для* $v\in\mathbb{Z}^{n+1}\bigcap N_P$ *двойственным конусом называется множество* $C_v^V=\left\{s\in\mathbb{R}^{n+1}:\langle s,v\rangle=\max\limits_{\alpha\in N_p}\langle s,\alpha\rangle\right\}$.

Любой вершине (l,m) многогранника Ньютона N_P соответствует связная компонента $E_{l,m}$ дополнения амебы.

Двойственный конус к вершине $(l,m)\in N_P$ есть конус рецессии для выпуклой компоненты $E_{l,m}$.

Определение 5. *Решение* $\mathcal{P}(x,y)$ *разностного уравнения*

$$\sum_{(\alpha,\beta)\in A} c_{\alpha,\beta}\mathcal{P}(x+\alpha, y+\beta) = \delta_{(0,0)}(x,y),\ (x,y)\in\mathbb{Z}^{n+1},$$

где

$$\delta_{(0,0)}(x,y) = \begin{cases} 0, \text{ если } (x,y)\neq 0, \\ 1, \text{ если } (x,y) = 0, \end{cases}$$

называется фундаментальным решением.

С понятием фундаментального решения разностного уравнения тесно связана разностная функция Грина (в случае двухслойных разностных схем см. [4]).

Определение 6. *Разностной функцией Грина задачи Коши (3)–(4) называется решение* $\Gamma(x,y)$ *задачи (3)–(4) с начальными данными вида*

$$\varphi_0(x)\equiv 0,\ ...,\ \varphi_{m-2}(x)\equiv 0,$$
$$\varphi_{m-1}(0) = 1,\ \varphi_{m-1}(x) = 0, \text{ для } x\neq 0.$$

Для доказательства теоремы 1 нам потребуется следующее предложение.

Предложение. *Если вершина* $(0,m)\in N_P$ *удовлетворяет условию* $m>\beta$ *для любой точки* $(\alpha,\beta)\in N_P$, $(\alpha,\beta)\neq(0,m)$, *то:*

1) для любого фиксированного $y>m$ *число значений* $\mathcal{P}(x,y)$, *не равных нулю, конечно;*

2) разностная функция Грина задачи Коши и фундаментальное решение разностного уравнения связаны следующим соотношением:

$$\Gamma(x,y) = \mathcal{P}(x,y+1). \tag{5}$$

Доказательству предложения предпошлем лемму.

Лемма. *Пусть* K *— конус в* $\mathbb{R}^{n+1}_{x,y}$, *порожденный векторами* $a^j = \left(a^j_1,...,a^j_n,a^j_{n+1}\right)$, $j = 1,2,...,m$:

$$K = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^{n+1} : (x,y) = \sum_{j=1}^{m}\lambda_j a^j,\ \lambda_j\geqslant 0\right\}.$$

Если $a^j_{n+1}>0$ *для* $j=1,...,m$, *то пересечение конуса* K *с гиперплоскостью* $y = \mathrm{const}$ *является ограниченным множеством.*

Доказательство. Всякая точка $(x,y)\in K$ представляется в виде $(x,y) = \sum\limits_{j=1}^{m}\lambda_j a^j$, где $\lambda_j\geqslant 0$, $j=1,...,m$. Точка $(x,y)\in K\cap\{y=\mathrm{const}\}$, следовательно, определяется из уравнения

$$a^1_{n+1}\lambda_1 + ... + a^m_{n+1}\lambda_m = \mathrm{const}\ ,$$

в котором коэффициенты $a^j_{n+1}>0$. Множество Λ решений $\lambda = (\lambda_1,...,\lambda_m)$ такого уравнения — ограниченное множество в $\mathbb{R}^m$, а конус K можно рассматривать как образ Λ при линейном преобразовании, матрица которого составлена из координат векторов a^j. □

Доказательство предложения. Разложим рациональную функцию $1/P(z,w)$ в ряд Лорана в вершине $(0,m)$ многогранника Ньютона:

$$\frac{1}{P(z,w)} = \frac{1}{w^m + \sum\limits_{(\alpha,\beta)\in A'} a_{\alpha,\beta}z^\alpha w^\beta} = \frac{1}{w^m(1 - \sum\limits_{(\alpha,\beta)\in A'}(-a_{\alpha,\beta})z^\alpha w^{\beta-m})} =$$
$$= \frac{1}{w^m}\sum_{k=0}^{\infty}\left((-a_{\alpha,\beta})z^\alpha w^{\beta-m}\right)^k = \sum_{(x,y)\in(0,m)+K_{0,m}\cap\mathbb{Z}^{n+1}} \frac{\mathcal{P}(x,y)}{z^x w^{y+1}},$$

где $A' = A\setminus\{0,m\}$, $(x,y) \in (0,m) + K_{0,m} \cap \mathbb{Z}^{n+1}$, а $K_{0,m}$ — конус, построенный на векторах $(0,m) - (\alpha,\beta)$, $(\alpha,\beta) \in A$. По условию предложения $m - \beta > 0$ для всех $(\alpha,\beta) \in N_P$, $(\alpha,\beta) \neq (0,m)$. Согласно лемме для фиксированного y это означает, что число значений $\mathcal{P}(x,y)$, не равных нулю, конечно.

Кроме того, $\mathcal{P}(x,y) = 0$ для $y = 0,1,...,m-1$, а $\mathcal{P}(x,m) = \delta_{(0)}(x)$, что говорит о справедливости формулы (5), так как по определению 6 имеем

$$\begin{gathered}\Gamma(x,0) = \varphi_0(x) \equiv 0,\\ \dots\\ \Gamma(x,m-2) = \varphi_{m-2}(x) \equiv 0,\\ \Gamma(x,m-1) = \delta_{(0)}(x).\end{gathered}$$

□

Отметим, что из определения фундаментального решения следует, что

$$P(\delta,\delta_{n+1})\Gamma(x,y) = P(\delta,\delta_{n+1})\mathcal{P}(x,y+1) = \delta_{(0,0)}(x,y+1). \qquad (6)$$

Определим две функции на $\mathbb{Z}^{n+1}$:

$$\varphi(x,y) = \begin{cases}\varphi_y(x), \text{ для } x \in \mathbb{Z}^n \text{ и } y = 0,1,...,m-1,\\ 0, \text{ для } x \in \mathbb{Z}^n \text{ и } y \geqslant m;\end{cases}$$

$$\mu(x,y) = \sum_{(\alpha,\beta)\in A} a_{\alpha,\beta}\varphi(x+\alpha, y+\beta),\ x \in \mathbb{Z}^n \text{и} - m \leqslant y < 0.$$

Обозначим через $\Pi = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^{n+1} : y \geqslant 0\}$ полупространство в $\mathbb{Z}^{n+1}$.

Теорема 1. *Если $f(x,y)$ — решение задачи Коши (3)–(4), то для $(x,y) \in \Pi$ справедлива формула*

$$f(x,y) = \sum_{(x',y')} \mu(x',y')\Gamma(x-x', y-y'), \qquad (7)$$

где суммирование проводится по всем точкам $(x',y') \in \mathbb{Z}^{n+1}$, удовлетворяющим условию $-m \leqslant y' < 0$. При этом для любого фиксированного $(x,y) \in \Pi$ число слагаемых в правой части формулы (7) конечно.

Доказательство. Докажем, что формула (7) дает решение уравнения (3). Действительно, с учетом равенства (6) и свойств δ-функции получим для любых $(x,y) \in \Pi$, что

$$\begin{aligned}P(\delta,\delta_{n+1})f &= \sum_{(x',y')} \mu(x',y')P(\delta,\delta_{n+1})\Gamma(x-x', y-y') =\\ &= \sum_{(x',y')} \mu(x',y')\delta_{(0,0)}(x-x', y-y'+1) = 0,\end{aligned}$$

так как $y - y' + 1 > 0$ для всех $y \geqslant 0$.

Проверим выполнение условия (4). Пусть $0 \leqslant y \leqslant m-1$. Согласно определению $\mu(x,y)$ имеем

$$f(x,y) = \sum_{(x',y')} \left(\sum_{(\alpha,\beta)\in A} a_{\alpha,\beta}\varphi(x'+\alpha, y'+\beta) \right) \Gamma(x-x', y-y').$$

Суммирование здесь ведется по всем (x',y') таким, что $-m \leqslant y' \leqslant -1$, при этом во внутренней сумме суммируем по тем (α,β), для которых $-y' \leqslant \beta \leqslant m$. Это следует из определения $\varphi\,(x,y)$.

Поменяем порядок суммирования:

$$f(x,y)=\sum_{(\alpha,\beta)\in A} a_{\alpha,\beta}\sum_{(x',y')}\varphi(x'+\alpha,y'+\beta)\Gamma(x+\alpha-(x'+\alpha),y+\beta-(y'+\beta)),$$

и после замены индексов суммирования $x''=x'+\alpha$, $y''=y+\beta$ и приведения во внутренней сумме подобных при $\varphi(x'',y'')$ получим

$$f(x,y)=\sum_{(\alpha,\beta)} a_{\alpha,\beta}\sum_{(x'',y'')}\varphi(x'',y'')\Gamma(x+\alpha-x'',y+\beta-y'')=$$

$$=\sum_{(x'',y'')}\varphi(x'',y'')\sum_{(\alpha,\beta)\in A:y''+1\leqslant\beta\leqslant m} a_{\alpha,\beta}\Gamma(x-x''+\alpha,y-y''+\beta),$$

где суммируем по (x'',y'') таким, что $0\leqslant y''\leqslant m-1$, и по (α,β) таким, что $y''+1\leqslant\beta\leqslant m$.

Для $0\leqslant\beta\leqslant y''$ в силу условия $0\leqslant y\leqslant m-1$ по определению 6 имеем $\Gamma(x-x''+\alpha,y-y''+\beta)=0$.

Тогда

$$f(x,y)=\sum_{(x'',y''):0\leqslant y''\leqslant m-1}\varphi(x'',y'')\sum_{(\alpha,\beta)\in A:0\leqslant\beta\leqslant m} a_{\alpha,\beta}\Gamma(x-x''+\alpha,y-y''+\beta)=$$

$$=\sum_{(x'',y'')}\varphi(x'',y'')P(\delta,\delta_{n+1})\Gamma(x-x'',y-y'')=\sum_{(x'',y'')}\varphi(x'',y'')\delta_{(0,0)}(x-x'',y-y'')=\varphi(x,y).$$

□

2. Устойчивость многослойной однородной линейной разностной схемы

Для произвольной функции $\varphi(x,y)$, заданной в полупространстве $\Pi=\{(x,y)\in\mathbb{Z}^{n+1}:y\geqslant 0\}$, определим ее норму следующим образом:

$$\|\varphi\|=\sup_{(x,y)\in\Pi}|\varphi(x,y)|. \tag{8}$$

Определение 7. *Назовем задачу (3)–(4) устойчивой, если существует константа $L>0$ такая, что при любых ограниченных начальных данных (4) для соответствующего решения f выполняется неравенство*

$$\|f\|\leqslant L\|\varphi\|.$$

Теорема 2. *Пусть $E_{0,m}$ — связная компонента дополнения амебы характеристического многочлена $P(z,w)$, соответствующая вершине $(0,m)$ многогранника Ньютона.*

1. Если задача Коши (3)–(4) устойчива, то начало координат принадлежит замыканию $E_{0,m}$, т.е. $(0,0)\in\overline{E}_{0,m}$.

2. Если начало координат $(0,0)\in E_{0,m}$, то задача Коши (3)–(4) устойчива.

Доказательство.

1. Предположим, что $(0,0)\notin\overline{E}_{0,m}$. Так как луч $(0,\operatorname{Log}|w|)$ лежит в конусе рецессии $C_{0,m}$, то найдется $\upsilon>0$ такое, что точка $(0,\upsilon)\notin\overline{E}_{0,m}$ и $(0,\upsilon)\in\operatorname{Log}V$ (рис. 1).

Так как $(0,\upsilon)\in\operatorname{Log}V$, то найдется точка $(z_0,w_0)\in\mathbb{C}^{n+1}:\operatorname{Log}|z_0|=0,\operatorname{Log}|w_0|=\upsilon$ такая, что $f(x,y)=z_0^x w_0^y$ – решение, при этом $f(x,0)=z_0^x$, а $f(x,m-1)=z_0^x w_0^{m-1}$.

Но $|z_0^x|=1^x\equiv 1$, т.е. начальные данные ограничены, а решение $f(x,y)=z_0^x w_0^y$ не ограничено, так как, например, при $x=0$ для соответствующего решения $|f(0,y)|=|w_0|^y=e^{vy}\to\infty$ при $y\to\infty$.

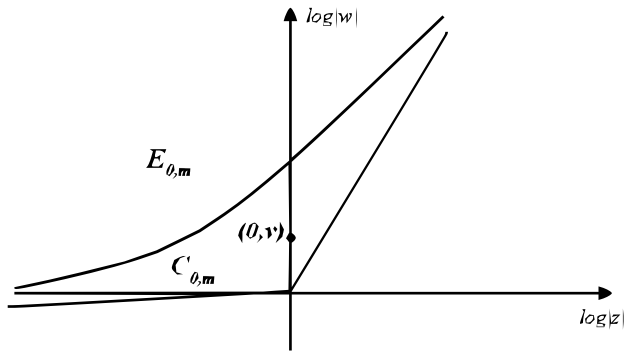

Рис. 1

2. Пусть $\varphi(x,y)$ — начальные данные и $\|\varphi\| < +\infty$. Согласно теореме 1 и соотношению (5) соответствующее решение разностного уравнения можно записать в виде

$$f(x,y) = \sum_{(x',y')} \mu(x',y')\mathcal{P}(x-x',y-y'+1),$$

где

$$\mu(x',y') = \sum_{(\alpha,\beta)\in A} a_{\alpha,\beta}\varphi(x'+\alpha,y'+\beta).$$

Оценим функцию f(x,y)

$$|f(x,y)| \leqslant \sum_{(x',y')} \sum_{(\alpha,\beta)\in A} |a_{\alpha,\beta}|\,|\varphi(x'+\alpha,y'+\beta)|\,|\mathcal{P}(x-x',y-y'+1)|\,.$$

С учетом равенства (8) получим

$$|f(x,y)| \leqslant \|\varphi\| \sum_{(x',y')} \sum_{(\alpha,\beta)\in A} |a_{\alpha,\beta}|\,|\mathcal{P}(x-x',y-y'+1)| \leqslant$$
$$\leqslant L_1\,\|\varphi\| \sum_{(x',y')} |\mathcal{P}(x-x',y-y'+1)|\,,$$

где $L_1 = \sum\limits_{(\alpha,\beta)\in A} |a_{\alpha,\beta}|$.

Так как точка $(0,0)\in E_{0,m}$, то ряд $\sum\limits_{(x,y)\in\Pi} \dfrac{\mathcal{P}(x,y)}{z^x w^y}$ сходится, причем абсолютно в точке $z=1$, $w=1$, т.е. $\sum\limits_{(x,y)\in\Pi} |\mathcal{P}(x,y)| \leqslant L_2$, где L_2 — некоторая константа.

Получаем

$$|f(x,y)| \leqslant L_1L_2\,\|\varphi\| \leqslant L\,\|\varphi\|\,,$$

и по определению 7 это означает, что задача Коши (3)–(4) устойчива. □

Приведем пример, показывающий, что необходимое условие теоремы 2 не является достаточным. Рассмотрим разностное уравнение вида

$$\left(\delta_2^2 - \delta_2 - \delta_1\delta_2 + \delta_1\right) f\,(x,y) = 0 \tag{9}$$

с начальными данными

$$f\,(x,0) \equiv 0,\; f\,(x,1) \equiv 1.$$

Решением этой задачи является функция $f(x,y) \equiv y$, которая очевидным образом не ограничена, следовательно, задача Коши неустойчива.

Амеба характеристического многочлена $P(z,w) = w^2 - w - zw + z$ разностного уравнения (9) имеет вид, изображенный на рис. 2.

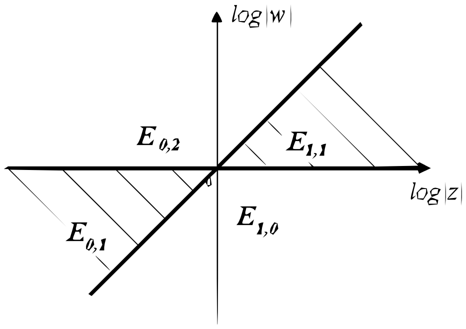

Рис. 2

В данном случае точка $(0,0) \in \partial E_{0,2}$, но задача Коши неустойчива.

Работа поддержана грантом Минобрнауки № 1.34.11.

Список литературы

[1] А.А.Первозванский, Курс теории автоматического управления, М., Наука, 1986.

[2] Е.К.Лейнартас, Д.Е.Лейнартас, Многомерные разностные уравнения: учеб. пособие, Красноярск, СФУ, 2010.

[3] Е.К.Лейнартас, Кратные ряды Лорана и разностные уравнения, *Сиб. матем. журн.*, **45**(2004), №2, 387–393.

[4] М.В.Федорюк, Асимптотика: интегралы и ряды, М., Наука, 1987.

[5] А.А.Самарский, Введение в теорию разностных схем, М., Наука, 1971.

[6] В.С.Рябенький, Введение в вычислительную математику: учеб. пособие, изд. 2-е, исправл., М., ФИЗМАТЛИТ, 2000.

[7] M.Forsberg, M.Passare, A.Tsikh, Laurent determinants and arrangements of hyperplane amoebas, *Advances in Mathematics*, **151**(2000), №1, 45–70.

[8] Е.К.Лейнартас, М.Пассаре, А.К.Цих, Многомерная версия теоремы Пуанкаре для разностных уравнений, *Мат. сб.*, **199**(2008), №10, 87–104.

Stability of Multilayer Finite Difference Schemes and Amoebas of Algebraic Hypersurfaces

Marina S. Rogozina

We study the numerical stability of the multilayer finite difference schemes by using methods of the theory of amoebas of algebraic hypersurfaces. We give a necessary condition for the stability of a Cauchy problem for a multilayer scheme and show that it is not a sufficient one. Therefore, we formulate and prove a sufficient condition for the stability.

Keywords: difference scheme, Cauchy problem, stability, amoeba of algebraic hypersurfaces.