

Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики  
Базовая кафедра вычислительных и информационных технологий

**УТВЕРЖДАЮ**

/ Заведующий кафедрой

В.В. Шайдуров / В.В. Шайдуров

«16» июня 2016 г.

**МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ**

**АНАЛИЗ УРАВНЕНИЯ, МОДЕЛИРУЮЩЕГО ВОЛНОВЫЕ ДВИЖЕНИЯ  
В ТЕКТОНИЧЕСКОМ РАЗЛОМЕ**

**Направление** 02.04.01 Математика и компьютерные науки

**Магистерская программа** 02.04.01.01 Математическое и компьютерное  
моделирование

Научный руководитель  
доктор физико-математических наук,  
профессор

В.М. Садовский / В.М. Садовский  
13.06.16

Выпускник

И.С. Черепанова / И.С. Черепанова  
13.06.16

Красноярск 2016

## АННОТАЦИЯ

Цель работы – моделирование процесса распространения волн, вызывающих землетрясения по тектоническим разломам.

В данной работе построена и исследована математическая модель, описывающая волновые процессы в тектонических разломах.

Результаты работы имеют теоретическое значение, но могут служить для качественного анализа сейсмических событий, происходящих в природных тектонических разломах. Представленный материал может открыть новые перспективы для дальнейших исследований.

Ключевые слова: волновые процессы, тектонический разлом, задача Коши, разностная схема.

## **ABSTRACT**

The purpose of study is simulation of the propagation of waves, which cause earthquakes on tectonic faults.

In this paper we constructed and investigated mathematical model describing wave processes in the tectonic faults.

The results have theoretical value and can be used for qualitative analysis of seismic events in natural tectonic faults. The material presented can open new prospects for further research studies.

**Keywords:** wave processes, tectonic fault, Cauchy problem, difference scheme.

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	3
1 Математическая модель .....	5
1.1 Вывод основного уравнения .....	6
1.2 Дисперсионный анализ.....	10
2 Априорные оценки .....	14
2.1 Оценка первых производных .....	15
2.2 Оценка вторых производных .....	17
2.3 Учет правой части уравнения .....	20
3 Численное решение краевой задачи.....	21
3.1 Разностная схема .....	21
3.2 Результаты расчетов .....	26
Заключение .....	28
Список использованных источников .....	29

## ВВЕДЕНИЕ

Под тектоническими разломами обычно понимают зоны нарушения сплошности земной коры, деформационный шов, разделяющий породный массив на два блока, который играет особую роль в распространение сейсмических воздействий от глубинных событий [1-3].

В последние годы наблюдается значительный рост количества землетрясений с тяжёлыми разрушительными последствиями в аномальных зонах, близких к тектоническим разломам. Поскольку последние присутствуют во многих горных массивах и территориях, то тектонические разломы издавна являются предметом изучения геологии. Кроме этого, именно к тектоническим разломам чаще всего приурочены месторождения полезных ископаемых. Поэтому назрела необходимость целенаправленного изучения тектонических зон с обязательным учётом геодинамической активности геологической среды в процессе ее освоения.

Цель магистерской диссертации – смоделировать процесс распространения волн, вызывающих землетрясения по тектоническим разломам, доказать корректность поставленной задачи, построить точное решение и найти численное решение краевой задачи.

**Общая характеристика работы.** Во введении кратко описан объект исследования, сформулирована цель магистерской диссертационной работы, а также выделены её задачи.

**В первой главе** выведено новое модельное уравнение, описывающее волновые движения в узком протяженном слое микроразрушенной среды, которая в начальный момент времени находилась в запредельном состоянии, отвечающем падающему участку диаграммы одноосного сжатия. Построено и исследовано дисперсионное уравнение, характеризующее зависимость фазовой скорости волн от частоты. В конце главы представлены графики этих зависимостей.

**Вторая глава** содержит априорные интегральные оценки решений уравнения и оценки производных, обосновывающие корректность постановки краевой задачи.

**Третья глава** посвящена численному исследованию модельного уравнения волнового движения в микроразрушенной среде.

**В заключении** дано краткое резюме полученных результатов.

## 1 Математическая модель

На глубине порядка 5-10 километров, горные породы проявляют сложный комплекс физико-механических свойств. В современной тектонике считается, что именно на таких глубинах зарождаются горные удары и землетрясения. В экспериментах по осевому сжатию микроразрушенной горной породы под высоким боковым давлением установлен переход материала в запредельное новое состояние, отвечающее падающему участку диаграммы одностороннего сжатия, схематически представленной на рисунке 1.

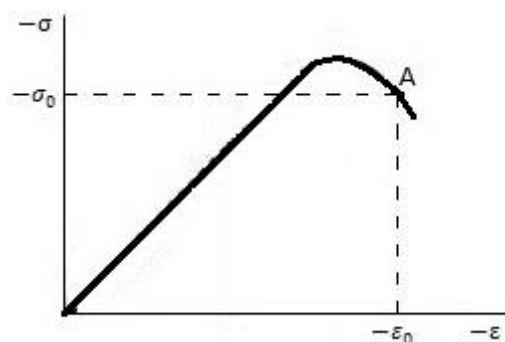


Рисунок 1 – Диаграмма одноосного сжатия

В соответствии со сложившимися модельными представлениями глубинный геологический разлом рассматривается как узкая протяженная зона постоянной толщины, заполненная микроразрушенной горной породой, которая находится в равновесном состоянии под высоким гидростатическим давлением со стороны разделяемых этой зоной горных массивов, как показано на рисунке 2. Дополнительное давление на берегах разлома, создаваемое проходящими через массивы упругими волнами, возбуждает волновое движение в разломе. Такое движение протекает в значительной степени независимо от процессов, происходящих в массивах, способствует высвобождению запасенной в массивах упругой энергии, и может служить предвестниками крупных сейсмических событий.

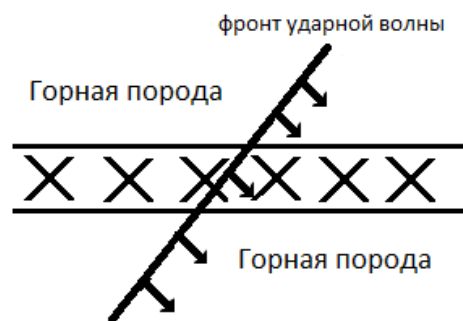


Рисунок 2 – схема нагружения

### 1.1 Вывод основного уравнения

Пусть  $u(x, t)$  и  $w(x, z, t)$  – смещения в разломе в продольном и поперечном направлениях  $x$  и  $z$ , вызванные действием дополнительного давления на фоне сильного гидростатического сжатия. Основное предположение по выводу математической модели состоит в том, что потенциал дополнительной упругой деформации горной породы в разломе задается выражением

$$W = \frac{k}{2}(u_x + w_z)^2 - \frac{2\mu}{3}(u_x^2 + w_z^2 - u_x w_z),$$

в котором первое слагаемое описывает объемную деформацию среды с касательным модулем объемного сжатия  $k$ , второе – разупрочнение материала при сдвиге с касательным модулем  $\mu$ . В этом выражении нижние индексы означают производные по пространственным переменным.

Такой потенциал приводит к определяющим уравнениям закона Гука:

$$\begin{aligned} p &= -\frac{\partial W}{\partial u_x}, & q &= -\frac{\partial W}{\partial w_z}, \\ -p &= \left(k - \frac{4}{3}\mu\right)u_x + \left(k + \frac{2}{3}\mu\right)w_z, & -q &= \left(k + \frac{2}{3}\mu\right)u_x + \left(k - \frac{4}{3}\mu\right)w_z, \end{aligned} \tag{1.1}$$



где  $p$  и  $q$  – предельное и поперечное давление в разломе.

Отсюда может быть получено уравнение

$$(3k - 4\mu)p = 4\mu(3k - \mu)u_x + (3k + 2\mu)q ,$$

связывающее дополнительное давление в направлении разлома с продольной деформацией. Интегрирование последнего уравнения (1.1) при отсутствии прогиба срединной линии разлома в предположении о постоянной продольной деформации по толщине приводит к следующему выражению для поперечного смещения:

$$w = -z \frac{3k + 2\mu}{3k - 4\mu} u_x - z \frac{q}{3k - 4\mu} .$$

Кинетическая энергия участка разлома длины  $l$  с учетом энергии поперечного движения вычисляется по формуле:

$$T = \frac{\rho}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^l (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dx dz = \frac{\rho h}{2} \int_0^l \left( \dot{u}^2 + r^2 \left| \frac{3k + 2\mu}{3k - 2\mu} \dot{u}_x + \frac{\dot{q}}{3k - 2\mu} \right|^2 \right) dx ,$$

$$T = \frac{\rho}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^l (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dx dz .$$

где  $r = h/(2\sqrt{3})$  – радиус инерции поперечного сечения, а точка над символом означает частную производную по времени. Потенциальная энергия упругой деформации равна

$$\Pi = \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^l W dx dz = h \int_0^l W(u_x) dx, \quad W = \frac{k}{2} \left( \frac{2\mu u_x + q}{3k - 4\mu} \right)^2 - \frac{\mu}{2} \left( \frac{(6k - 2\mu)u_x + q}{3k - 4\mu} \right)^2.$$

В соответствии с принципом Гамильтона – Остроградского вариация функционала действия при фиксированных начальном и конечном состояниях механической системы должна быть равна нулю:

$$\int_{t_2}^{t_1} (\delta T - \delta \Pi + \delta A) dt = 0.$$

Здесь  $\delta A$  – виртуальная работа внешних сил, равная сумме работ дополнительного давления на берегах разлома и приращений давлений  $p_0, p_1$  в концах участка:

$$\begin{aligned} \delta A &= -2 \int_0^l q \delta w|_{z=h/2} dx + \int_{-h/2}^{h/2} (p_0 \delta u|_{x=0} - p_1 \delta u|_{x=l}) dz = \\ &= h \frac{3k + 2\mu}{3k - 2\mu} \int_0^l q \delta u_x dx + hp_0 \delta u|_{x=0} - hp_1 \delta u|_{x=l}. \end{aligned}$$

Непосредственное вычисление вариаций приводит к промежуточному уравнению

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \left( \rho i \delta \dot{u} + \rho r^2 \frac{3k + 2\mu}{3k - 2\mu} \left( \frac{3k + 2\mu}{3k - 2\mu} \dot{u}_x + \frac{\dot{q}}{3k - 2\mu} \right) \delta \dot{u}_x + \frac{4\mu(3k - \mu)}{3k - 4\mu} u_x \delta u_x + \right. \\ \left. + \frac{3k + 2\mu}{3k - 4\mu} q \delta u_x \right) dx dt = \int_{t_0}^{t_1} (p_1 \delta u|_{x=l} - p_0 \delta u|_{x=0}) dt, \end{aligned}$$

из которого, после применения формулы интегрирования по частям к интегралам, содержащим производную от  $\delta u$  по времени и по пространственной переменной, с учетом произвольности вариации внутри интервала  $(0, l)$  и на его границах, вытекает уравнение движения

$$\ddot{u} + a^2 u_{xx} - b^2 \ddot{u}_{xx} = f(x, t) \quad (1.2)$$

где

$$a^2 = \frac{4\mu(3k - \mu)}{\rho(3k - 4\mu)}, \quad b = r \frac{3k + 2\mu}{3k - 2\mu}, \quad f = g_x, \quad g(x, t) = -\frac{3k - 2\mu}{\rho(3k - 4\mu)} q + r^2 \frac{3k + 2\mu}{(3k - 2\mu)^2} \ddot{q}$$

и динамические граничные условия

$$\rho(a^2 u_x - b^2 \ddot{u}_x - g)|_{x=0, l} = p_{0,1}.$$

Кинематические граничные условия для уравнения (1.1) ставятся обычным способом – в концах интервала  $(0, l)$  задаются смещения  $u|_{x=0, l} = u_{0,1}$ , которые могут зависеть от времени. Начальные данные формулируются так же, как и для классического волнового уравнения:

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \dot{u}|_{t=0} = \psi(x).$$

Продемонстрированная техника получения уравнения движения (1.2) была предложена Релеем для вывода соотношений, описывающих распространение упругих волн в стержне с учетом инерции поперечного движения. Уравнение, полученное Релеем, является гиперболическим и описывает волны, распространяющиеся с конечными скоростями [4]. Отличие уравнения (1.2) от аналогичного релеевского состоит в том, что в (1.2) знак

перед второй производной противоположный. Другие математические модели волновых процессов в деформируемых средах рассматриваются в работах [5-10].

Основной недостаток моделирования волновых процессов на основе уравнения (1.2) состоит в том, что оно не описывает диссипативных процессов. Такие процессы в грунтах и горных породах учитываются определяющими уравнениями вязкоупругой среды Кельвина – Фойхта. В соответствии с этой моделью нормальное напряжение  $\sigma$  в разломе разлагается в сумму двух слагаемых – упругого и вязкого. Для разупрочняющейся среды упругое напряжение находится по формуле  $s = -\rho a^2 u_x$ . Вязкое напряжение удовлетворяет закону Стокса:  $\sigma - s = \eta \dot{u}_x$ , где  $\eta$  – коэффициент вязкости. В терминах скоростей и напряжений полная система уравнений, учитывающая вязкие свойства среды, приводится к следующему виду:

$$\rho \ddot{u} - \rho b^2 \ddot{u}_{xx} = \sigma_x, \quad s = -\rho a^2 u_x, \quad \sigma = s + v \dot{u}_x. \quad (1.3)$$

После очевидных преобразований система (1.3) приводится к уравнению:

$$u_{tt} + a^2 u_{xx} - b^2 u_{ttxx} - \eta u_{txx} = f(x, t),$$

где  $\eta = v/\rho$ .

## 1.2 Дисперсионный анализ

Используя общее уравнение монохроматической волны  $u = Ae^{i(\omega t - kx)}$ , получим дисперсионное уравнение для (1.3) при  $f \equiv 0$ :

$$-\omega^2 - a^2 k^2 - b^2 k^2 \omega + i\eta k^2 \omega = 0, \quad (1.4)$$

где  $k = k_1 + ik_2$ .

Из уравнения (1.4) можно определить зависимость фазовой скорости  $C$  и степень затухания волны  $\lambda$  от частоты  $\omega$ .

$$C = \frac{\omega}{\operatorname{Re} k} = \frac{\omega}{k_1}, \quad \lambda = -\frac{1}{\operatorname{Im} k} = -\frac{1}{k_2}.$$

$$-\omega^2 - a^2 k^2 - b^2 k^2 \omega + i\eta k^2 \omega = 0,$$

$$-\omega^2 - k^2(a^2 + b^2 \omega^2 - i\eta \omega) = 0,$$

$$k^2 = -\frac{\omega^2}{(a^2 + b^2 \omega^2 - i\eta \omega)},$$

$$k^2 = -\frac{\omega^2(a^2 + b^2 \omega^2 + i\eta \omega)}{(a^2 + b^2 \omega^2 - i\eta \omega)(a^2 + b^2 \omega^2 + i\eta \omega)},$$

$$k^2 = -\frac{\omega^2(a^2 + b^2 \omega^2 + i\eta \omega)}{(a^2 + b^2 \omega^2)^2 - i^2 \eta^2 \omega^2} = -\frac{\omega^2(a^2 + b^2 \omega^2 + i\eta \omega)}{(a^2 + b^2 \omega^2)^2 + \eta^2 \omega^2}.$$

Так как  $k = k_1 + ik_2$ , то  $k^2 = k_1^2 + 2ik_1k_2 - k_2^2$  и

$$k_1^2 + 2ik_1k_2 - k_2^2 = -\frac{\omega^2(a^2 + b^2 \omega^2 + i\eta \omega)}{(a^2 + b^2 \omega^2)^2 + \eta^2 \omega^2}.$$

Составляем систему уравнений с двумя неизвестными.

$$\begin{cases} k_1^2 - k_2^2 = -\frac{\omega^2(a^2 + b^2 \omega^2)}{(a^2 + b^2 \omega^2)^2 + \eta^2 \omega^2} \\ 2k_1k_2 = -\frac{\omega^3 \eta}{(a^2 + b^2 \omega^2)^2 + \eta^2 \omega^2} \end{cases}$$

Из второго уравнения системы выражаем  $k_2$  и подставляем в первое уравнение:

$$k_1^4 - \frac{(\omega^3 \eta)^2}{4\left((a^2 + b^2 \omega^2)^2 + \omega^2 \eta^2\right)^2} + \frac{\omega^2(a^2 + b^2 \omega^2)}{(a^2 + b^2 \omega^2)^2 + \omega^2 \eta^2} k_1^2 = 0.$$

Получено биквадратное уравнение относительно переменной  $k_1$ , решим его. Введем  $p = (a^2 + b^2 \omega^2) > 0$ .

$$k_1^4 + \frac{\omega^2 p}{p^2 + \omega^2 \eta^2} k_1^2 - \frac{(\omega^3 \eta)^2}{4(p^2 + \omega^2 \eta^2)^2} = 0,$$

$$k_1^2 = \frac{-\omega^2 p \pm \omega^2 \sqrt{p^2 + \omega^2 \eta^2}}{2(p^2 + \omega^2 \eta^2)},$$

$$k_1 = \pm \sqrt{\frac{\omega^2 \sqrt{p^2 + \omega^2 \eta^2} - \omega^2 p}{2(p^2 + \omega^2 \eta^2)}}.$$

Теперь найдем значение переменной  $k_2$ .

$$k_2 = \mp \frac{\omega^2 \eta \sqrt{p^2 + \omega^2 \eta^2}}{(p^2 + \omega^2 \eta^2) \sqrt{2} \sqrt{\sqrt{p^2 + \omega^2 \eta^2} - p}}.$$

Так как  $C = \frac{\omega}{k_1}$ ,  $\lambda = -\frac{1}{k_2}$ .

$$C = \frac{\sqrt{2} \sqrt{p^2 + \omega^2 \eta^2}}{\sqrt{\sqrt{p^2 + \omega^2 \eta^2} - p}},$$

$$\lambda = \frac{\sqrt{2}}{\omega^2 \eta} \sqrt{p^2 + \omega^2 \eta^2} \sqrt{\sqrt{p^2 + \omega^2 \eta^2} - p}.$$

Возвращаемся к обратной замене. Суммируя вышеизложенное, приходим к явным выражениям фазовой скорости  $C$  и степени затухания волны  $\lambda$  от частоты  $\omega$ :

$$C = \frac{\sqrt{2}\sqrt{(a^2 + b^2\omega^2)^2 + \omega^2\eta^2}}{\sqrt{\sqrt{(a^2 + b^2\omega^2)^2 + \omega^2\eta^2} - (a^2 + b^2\omega^2)}},$$

$$\lambda = \frac{\sqrt{2}}{\omega^2\eta} \sqrt{(a^2 + b^2\omega^2)^2 + \omega^2\eta^2} \sqrt{\sqrt{(a^2 + b^2\omega^2)^2 + \omega^2\eta^2} - (a^2 + b^2\omega^2)}.$$

Отметим частные случаи этих зависимостей при малых и больших значениях  $\omega$ :

При  $\omega \rightarrow 0$

$$C \approx \frac{2\sqrt{2}\sqrt{(a^2 + b^2\omega^2)^2 + \omega^2\eta^2}}{\omega^2\eta^2} \rightarrow \infty,$$

$$\lambda \approx \frac{\sqrt{2}}{\omega^2\eta} \sqrt{(a^2 + b^2\omega^2)^2 + \omega^2\eta^2} \sqrt{\sqrt{(a^2 + b^2\omega^2)^2 + \omega^2\eta^2} - (a^2 + b^2\omega^2)} \rightarrow \infty.$$

При  $\omega \rightarrow \infty$

$$C \approx \frac{2\sqrt{2}\sqrt{(a^2 + b^2\omega^2)^2 + \omega^2\eta^2}}{\omega^2\eta^2} \rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{\eta^2} b^2,$$

$$\lambda \approx \frac{\sqrt{2}}{\eta} \frac{\sqrt{(a^2 + b^2\omega^2)^2 + \omega^2\eta^2}}{\sqrt{\omega^2}} \frac{\sqrt{\sqrt{(a^2 + b^2\omega^2)^2 + \omega^2\eta^2} - (a^2 + b^2\omega^2)}}{\sqrt{\omega^2}} \rightarrow \infty.$$

На рисунках 3–4 показана зависимость от частоты  $\omega$  фазовой скорости  $C$  и степень затухания волны  $\lambda$ .

Расчеты проводились при следующих значениях параметров: длина геологического разлома, для которого были построены эти графики, была взята равной 1 метр и толщиной 1 см. Модуль разупрочнения материала взят 100 Па,

коэффициент вязкости равный  $0,01 \text{ Па} \cdot \text{сек}$  при плотности материала  $2500 \text{ кг/м}^3$ .

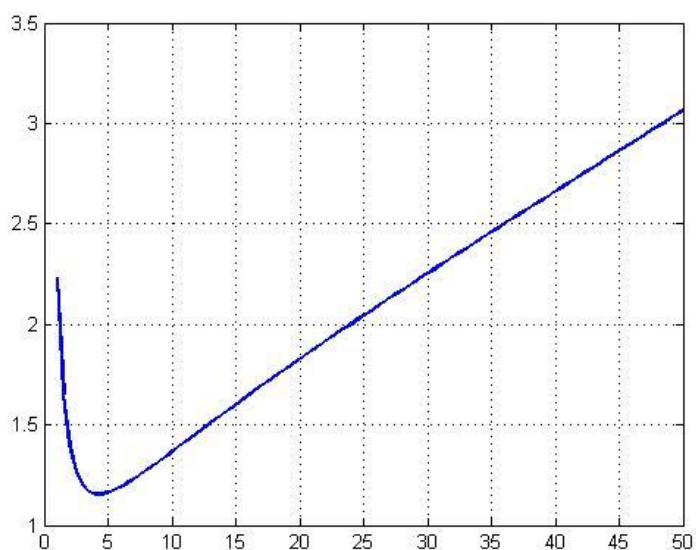


Рисунок 3 – зависимость фазовой скорости от циклической частоты

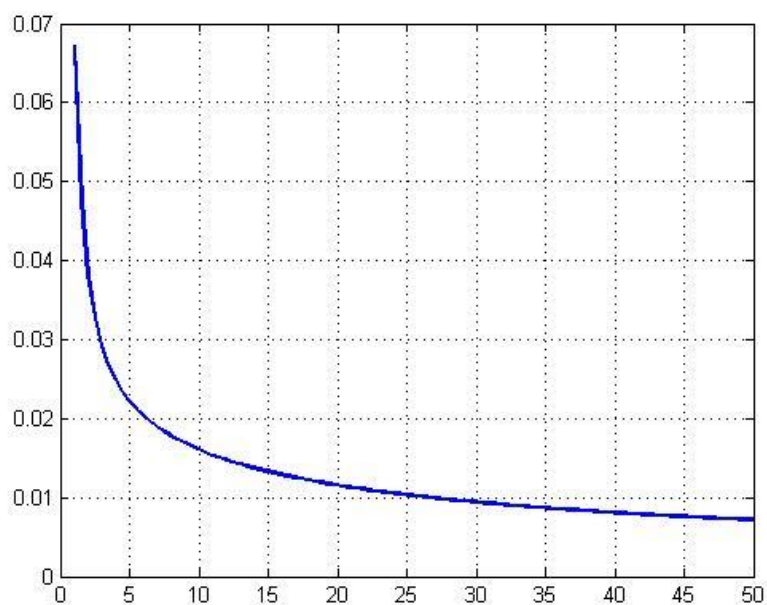


Рисунок 4 – зависимость декремента затухания от циклической частоты

## 2 Априорные оценки

Поставим краевую задачу с начальными данными и граничными условиями для полученного уравнения следующим образом:



$$\begin{cases} u_{tt} + a^2 u_{xx} - b^2 u_{ttxx} - \eta u_{txx} = f(x, t) \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

При равных нулю коэффициентах  $b$  и  $\eta$ , когда не учитывается вязкость материала и слой считается бесконечно тонким, уравнение (2.1) является эллиптическим. В соответствии с примером Адамара [8] задача Коши с начальными данными в этом случае будет некорректной. Таким образом, вопрос о корректности постановки задачи (2.1) является нетривиальным. Исследуем вопрос о корректности с помощью метода априорных оценок.

## 2.1 Оценка первых производных

Умножим обе части уравнения (2.1) на функцию  $u_t(x, t)$  и проинтегрируем полученное равенство по  $x$  от 0 до 1:

$$\int_0^1 u_{tt} u_t dx + a^2 \int_0^1 u_{xx} u_t dx - b^2 \int_0^1 u_{ttxx} u_t dx - \eta \int_0^1 u_{txx} u_t dx = \int_0^1 f u_t dx.$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \int_0^1 u_{tt} u_t dx &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 (u_t)^2 dx, & \int_0^1 u_{xx} u_t dx &= -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 (u_x)^2 dx, \\ \int_0^1 u_{ttxx} u_t dx &= -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 (u_{tx})^2 dx, & \int_0^1 u_{txx} u_t dx &= -\int_0^1 (u_{tx})^2 dx. \end{aligned}$$

Поэтому приходим к уравнению следующего вида:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 (u_t)^2 dx - \frac{a^2}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 (u_x)^2 dx + \frac{b^2}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 (u_{tx})^2 dx + \eta \int_0^1 (u_{tx})^2 dx = \int_0^1 f u_t dx. \quad (2.1.1)$$

Теперь оценим интеграл  $\int_0^1 u_{tx} dx$ .

$$\int_0^{t_1} u_{tx}(x, t) dt = u_x(x, t_1) - u_x(x, 0) = u_x(x, t_1) - \varphi_x(x).$$

Возводим обе части этого уравнения в квадрат и интегрируем по  $x$ .

$$\int_0^1 (u_x(x, t_1) - \varphi_x(x))^2 dx = \int_0^1 \left( \int_0^{t_1} u_{xt}(x, t) dt \right)^2 dx.$$

Применим неравенство Коши-Буняковского к интегралу по времени.

$$\left( \int_0^{t_1} u_{xt}(x, t) dt \right)^2 \leq t_1 \int_0^{t_1} (u_{xt}(x, t))^2 dt,$$

$$\int_0^1 (u_x(x, t_1) - \varphi_x(x))^2 dx \leq t_1 \int_0^1 \int_0^{t_1} (u_{xt}(x, t))^2 dt dx.$$

Возвращаемся к уравнению (2.1.1) положив пока  $f = 0$ .

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^1 \left( (u_t(x, t_1))^2 - (u_t(x, 0))^2 \right) dx - \frac{a^2}{2} \int_0^1 \left( (u_x(x, t_1))^2 - (u_x(x, 0))^2 \right) dx + \\ & + \frac{b^2}{2} \int_0^1 \left( (u_{tx}(x, t_1))^2 - (u_{tx}(x, 0))^2 \right) dx + \eta \int_0^1 \int_0^{t_1} (u_{tx}(x, t))^2 dt dx = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \left( (u_t(x, t_1))^2 - \psi^2 \right) dx - a^2 \int_0^1 \left( (u_x(x, t_1))^2 - (\varphi_x)^2 \right) dx + \\
& + b^2 \int_0^1 \left( (u_{tx}(x, t_1))^2 - (u_{tx}(x, 0))^2 \right) dx = -2\eta \int_0^1 \int_0^{t_1} (u_{tx}(x, t))^2 dx dt \leq \\
& \leq \frac{-2\eta}{t_1} \int_0^1 (u_x(x, t_1) - \varphi_x)^2 dx.
\end{aligned}$$

Применяя  $\varepsilon$  – неравенство, оценим интеграл  $\int_0^1 (u_x(x, t_1) - \varphi_x)^2 dx$  следующим

образом:

$$-\frac{2\eta}{t_1} \int_0^1 (u_x(x, t_1) - \varphi_x(x))^2 dx \leq \frac{-2\eta}{t_1} (1 - \varepsilon) \int_0^1 (u_x(x, t_1))^2 dx - \frac{2\eta}{t_1} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) \int_0^1 (\varphi_x)^2 dx.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 (u_t(x, t_1))^2 dx + \left( \frac{2\eta}{t_1} (1 - \varepsilon) - a^2 \right) \int_0^1 (u_x(x, t_1))^2 dx + b^2 \int_0^1 (u_{tx}(x, t_1))^2 dx \leq \\
& \leq \int_0^1 \psi^2 dx - a^2 \int_0^1 (\varphi_x)^2 dx + b^2 \int_0^1 (\psi_x)^2 dx + \frac{2\eta}{t_1} \left( \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) \int_0^1 (\varphi_x)^2 dx,
\end{aligned} \tag{2.1.2}$$

при  $t_1 \leq \frac{2\eta}{a^2} (1 - \varepsilon)$  и  $\forall \varepsilon \in (0, 1)$ .

## 2.2 Оценка вторых производных

Умножим обе части уравнения (2.1) на функцию  $-u_{txx}(x, t)$  и проинтегрируем полученное равенство по  $x$  от 0 до 1:

$$-\int_0^1 u_{tt} u_{txx} dx - a^2 \int_0^1 u_{xx} u_{txx} dx + b^2 \int_0^1 u_{ttxx} u_{txx} dx + \eta \int_0^1 u_{txx} u_{txx} dx = -\int_0^1 f u_{txx} dx.$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \int_0^1 u_{tt} u_{txx} dx &= -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 (u_{tx})^2 dx, & \int_0^1 u_{xx} u_{txx} dx &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 (u_{xx})^2 dx, \\ \int_0^1 u_{ttxx} u_{txx} dx &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 (u_{txx})^2 dx, & \int_0^1 u_{txx} u_{txx} dx &= \int_0^1 (u_{txx})^2 dx. \end{aligned}$$

Поэтому приходим к уравнению следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 (u_{tx})^2 dx - \frac{a^2}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 (u_{xx})^2 dx + \frac{b^2}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 (u_{txx})^2 dx + \eta \int_0^1 (u_{txx})^2 dx &= \\ = -\int_0^1 f u_{txx} dx. \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

Теперь оценим интеграл

$$\int_0^{t_1} u_{txx}(x, t) dt = u_{xx}(x, t_1) - u_{xx}(x, 0) = u_{xx}(x, t_1) - \varphi_{xx}(x).$$

Возводим обе части этого уравнения в квадрат и интегрируем по  $x$ :

$$\int_0^1 (u_{xx}(x, t_1) - \varphi_{xx}(x))^2 dx = \int_0^1 \left( \int_0^{t_1} u_{txx}(x, t) dt \right)^2 dx.$$

Применим неравенство Коши-Буняковского к интегралу по времени.

$$\left( \int_0^{t_1} u_{txx}(x,t) dt \right)^2 \leq t_1 \int_0^{t_1} (u_{txx}(x,t))^2 dt ,$$

$$\int_0^1 (u_{xx}(x,t_1) - \varphi_{xx}(x))^2 dx \leq t_1 \int_0^1 \int_0^{t_1} (u_{txx}(x,t))^2 dt dx .$$

Возвращаемся к уравнению (2.2.1), положив пока  $f = 0$ .

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \left( (u_{tx}(x,t_1))^2 - (u_{tx}(x,0))^2 \right) dx - \frac{a^2}{2} \int_0^1 \left( (u_{xx}(x,t_1))^2 - (u_{xx}(x,0))^2 \right) dx +$$

$$+ \frac{b^2}{2} \int_0^1 \left( (u_{txx}(x,t_1))^2 - (u_{txx}(x,0))^2 \right) dx + \eta \int_0^1 \int_0^{t_1} (u_{txx}(x,t))^2 dt dx = 0 .$$

$$\int_0^1 \left( (u_{tx}(x,t_1))^2 - \psi_x^2 \right) dx - a^2 \int_0^1 \left( (u_{xx}(x,t_1))^2 - (\varphi_{xx})^2 \right) dx +$$

$$+ b^2 \int_0^1 \left( (u_{txx}(x,t_1))^2 - (\psi_{xx})^2 \right) dx = -2\eta \int_0^1 \int_0^{t_1} (u_{txx}(x,t))^2 dx dt \leq$$

$$\leq \frac{-2\eta}{t_1} \int_0^1 (u_{xx}(x,t_1) - \varphi_{xx})^2 dx .$$

Применяя  $\varepsilon$  – неравенство, оценим интеграл  $\int_0^1 (u_{xx}(x,t_1) - \varphi_{xx})^2 dx$  следующим

образом:

$$\frac{-2\eta}{t_1} \int_0^1 (u_{xx}(x,t_1) - \varphi_{xx})^2 dx \leq \frac{-2\eta}{t_1} (1 - \varepsilon) \int_0^1 (u_{xx}(x,t_1))^2 dx - \frac{-2\eta}{t_1} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) \int_0^1 (\varphi_{xx})^2 dx .$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (u_{tx}(x, t_1))^2 dx + \left( \frac{2\eta}{t_1}(1-\varepsilon) - a^2 \right) \int_0^1 (u_{xx}(x, t_1))^2 dx + b^2 \int_0^1 (u_{txx}(x, t_1))^2 dx \leq \\ & \leq \int_0^1 \psi_x^2 dx - a^2 \int_0^1 (\varphi_{xx})^2 dx + b^2 \int_0^1 (\psi_{xx})^2 dx + \frac{2\eta}{t_1} \left( \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) \int_0^1 (\varphi_{xx})^2 dx, \end{aligned}$$

при  $t_1 < \frac{2\eta}{a^2}(1-\varepsilon)$  и  $\forall \varepsilon \in (0,1)$ .

Полученные оценки гарантируют непрерывную зависимость решения от начальных данных на малом интервале времени.

### 2.3 Учет правой части уравнения

Возвращаемся к правой части уравнения (2.1.1). Если применить неравенство Коши-Буняковского, возникают следующие оценки:

$$\begin{aligned} \int_0^1 fu_t dx & \leq \sqrt{\int_0^1 f^2 dx} \sqrt{\int_0^1 u_t^2 dx}, \\ u_t^2 & = \left( \int_0^x u_{tx} dx \right)^2 \leq \int_0^1 u_{tx}^2 dx, \\ \int_0^1 fu_t dx & \leq \sqrt{\int_0^1 f^2 dx} \sqrt{\int_0^1 u_{tx}^2 dx}. \end{aligned}$$

Применяя  $\varepsilon$  – неравенство:

$$\begin{aligned} \int_0^1 fu_t dx & \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 f^2 dx + \varepsilon \int_0^1 u_{tx}^2 dx, \\ \int_0^{t_1} \int_0^1 fu_t dx dt & \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{t_1} \int_0^1 f^2 dx dt + \varepsilon \int_0^{t_1} \int_0^1 u_{tx}^2 dx dt. \end{aligned}$$

$\int_0^1 \int_0^1 u_{tx}^2 dx dt$  – этот интеграл подавляется за счет  $\eta$ , как представлено в разделе 00

(2.1) при оценке первых производных (2.1.2).

### 3 Численное решение краевой задачи

#### 3.1 Разностная схема

Даже если рассматриваемая задача (2.1) при определенном выборе начальных данных имеет ограниченное по времени решение, получить его исходя из уравнения (2.1) с помощью численных методов не удастся, поскольку погрешность вычислений оказывается экспоненциально растущей. Чтобы от этого избавиться, введем замену неизвестной функции  $u(t, x) = e^{\lambda t} v(t, x)$ . В результате чего получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\begin{cases} v_{tt} + Av_{xx} + Bv_{txx} + Cv_{xxtt} + Dv_t + Ev = f(x, t), \\ v|_{t=0} = \varphi(x), \\ v_t|_{t=0} = \psi(x), \\ v(0, t) = v(1, t) = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

где  $A = (a^2 - b^2\lambda^2 - \eta\lambda)$ ,  $B = -(2b^2\lambda + \eta)$ ,  $C = -b^2$ ,  $D = 2\lambda$ ,  $E = \lambda^2$ .

Параметр  $\lambda$  выбираем так, чтобы выполнялось неравенство  $b^2\lambda^2 + \eta\lambda - a^2 \geq 0$  для коэффициента при второй производной по пространственной переменной в уравнении (3.1). Рассматриваемую краевую задачу будем решать численно. Введем равномерную сетку на прямоугольнике  $0 \leq t \leq 1$ ,  $0 \leq x \leq 1$  с шагами  $\tau$  и  $h$  по времени и по пространственной переменной соответственно. Воспользуемся неявной разностной схемой для аппроксимации задачи (3.1). Начальные и краевые условия аппроксимируем поточечно. В результате чего приходим к следующей разностной задаче:

$$\left\{ \begin{aligned}
& \frac{v_j^{n+1} - 2v_j^n + v_j^{n-1}}{\tau^2} + A \frac{v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n}{h^2} + \\
& + B \frac{v_{j+1}^{n+1} - 2v_j^{n+1} + v_{j-1}^{n+1} - v_{j+1}^{n-1} + 2v_j^{n-1} - v_{j-1}^{n-1}}{2\tau h^2} + \\
& C \frac{v_{j+1}^{n+1} - 2v_j^{n+1} + v_{j-1}^{n+1} - 2v_{j+1}^n + 4v_j^n - 2v_{j-1}^n + v_{j+1}^{n-1} - 2v_j^{n-1} + v_{j-1}^{n-1}}{\tau^2 h^2} + \\
& + D \frac{v_j^{n+1} - v_j^{n-1}}{2\tau} + E v_j^n = f_j^n, \\
& v_j^0 = \varphi_j, \\
& \frac{v_j^1 - \varphi_j}{\tau} = \psi_j, \\
& v_0^n = v_1^n = 0.
\end{aligned} \right.$$

Теперь исследуем на устойчивость неявную разностную схему используя метод Фурье  $v_j^n = \lambda^n e^{ij\alpha}$ .

$$\begin{aligned}
& \frac{\lambda - 2 + 1/\lambda}{\tau^2} + A \frac{e^{i\alpha} - 2 + e^{-i\alpha}}{h^2} + B \frac{(\lambda - 1/\lambda)(e^{i\alpha} - 2 + e^{-i\alpha})}{2\tau h^2} + \\
& C \frac{(\lambda - 2 + 1/\lambda)(e^{i\alpha} - 2 + e^{-i\alpha})}{\tau^2 h^2} + D \frac{\lambda - 1/\lambda}{2\tau} + E = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2h^2(\lambda - 2 + 1/\lambda)}{2\tau^2 h^2} - 8A \frac{\tau^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2\tau^2 h^2} - 4B \frac{\tau(\lambda - 1/\lambda) \left( \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right)}{2\tau^2 h^2} - 8C \frac{(\lambda - 2 + 1/\lambda) \left( \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right)}{2\tau^2 h^2} + \\
& + D \frac{\tau h^2 (\lambda - 1/\lambda)}{2\tau^2 h^2} + E \frac{2\tau^2 h^2}{2\tau^2 h^2} = 0. \quad (3.2)
\end{aligned}$$



Числитель уравнения (3.2) приравняем к нулю и умножаем на  $\lambda$ .

$$2h^2(\lambda^2 - 2\lambda + 1) - 8\tau^2 A \sin^2 \frac{\alpha}{2} \lambda - 4\tau B(\lambda^2 - 1) \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 8C(\lambda^2 - 2\lambda + 1) \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \\ + \tau h^2 D(\lambda^2 - 1) + 2\tau^2 h^2 E \lambda = 0.$$

Получаем квадратное уравнение относительно  $\lambda$ :

$$\left(2h^2 - 4\tau B \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 8C \sin^2 \frac{\alpha}{2} + D\tau h^2\right) \lambda^2 + \left(16C \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 4h^2 - 8\tau^2 A \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 2\tau^2 h^2 E\right) \lambda + \\ + 2h^2 + 4\tau B \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 8C \sin^2 \frac{\alpha}{2} - D\tau h^2 = 0.$$

Пусть

$$p = 2h^2 - 4\tau B \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 8C \sin^2 \frac{\alpha}{2} + D\tau h^2, \\ q = 8C \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 2h^2 - 4\tau^2 A \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \tau^2 h^2 E, \\ d = 2h^2 + 4\tau B \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 8C \sin^2 \frac{\alpha}{2} - D\tau h^2.$$

Тогда уравнение принимает следующий вид:

$$p\lambda^2 + 2q\lambda + d = 0.$$

Рассматриваем случай, когда дискриминант данного уравнения отрицательный, т.е.  $q^2 - pd \leq 0$ . Это уравнение будет иметь сопряженные комплексные корни.

$$|\lambda_1|^2 = |\lambda_2|^2 = \frac{q^2 + pd - q^2}{p^2} = \frac{d}{p}.$$

Условие  $\frac{d}{p} \leq 1$  гарантирует устойчивость.

Таким образом выражение  $|d| \leq |p|$  будет являться достаточным условием устойчивости. Рассмотрим два случая:

1)  $d \geq 0, d \leq p$ .

$$\begin{cases} 2h^2 + 4\tau B \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 8C \sin^2 \frac{\alpha}{2} - D\tau h^2 \leq 2h^2 - 4\tau B \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 8C \sin^2 \frac{\alpha}{2} + D\tau h^2 \\ 0 < 2h^2 + 4\tau B \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 8C \sin^2 \frac{\alpha}{2} - D\tau h^2 \end{cases}$$

$$4B \sin^2 \frac{\alpha}{2} \leq Dh^2,$$

откуда

$$D \geq \frac{4B}{h^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Поэтому для любых  $\alpha$  должно выполняться следующее неравенство  $D \geq \frac{4B}{h^2}$ .

Это неравенство справедливо, так как  $B < 0$  по условию задачи и тогда

$$0 < 2h^2 + 4\tau B \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 8C \sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

$$(4C - 2\tau B) \sin^2 \frac{\alpha}{2} < h^2,$$

$$(4C - 2\tau B) < h^2.$$

По условию задачи (3.1)  $B$  и  $C$  принимают отрицательные значения.

$$\tau < \frac{4C - h^2}{2B}. \quad (3.3)$$

Полученное неравенство (3.3) гарантирует выполнение достаточного условия устойчивости, предложенной неявной разностной схемы.

2)  $d \leq 0, d \geq p$ .

$$\begin{cases} 2h^2 + 4\tau B \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 8C \sin^2 \frac{\alpha}{2} - D\tau h^2 \geq 2h^2 - 4\tau B \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 8C \sin^2 \frac{\alpha}{2} + D\tau h^2 \\ 0 > 2h^2 + 4\tau B \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 8C \sin^2 \frac{\alpha}{2} - D\tau h^2 \\ 4\tau B \sin^2 \frac{\alpha}{2} \geq D\tau h^2. \end{cases}$$

У этого неравенства нет решений, поскольку  $B < 0$  по условию задачи.

Как частный случай рассмотрим условие устойчивости для исходного уравнения (3.1), когда  $\lambda = 0$ . Тогда  $A = a^2$ ,  $B = -\eta$ ,  $C = -b^2$ ,  $D = E = 0$ .

Как и ранее рассмотрим два случая :  $d \geq 0, d \leq p$  и  $d \leq 0, d \geq p$ .

1)

$$\begin{cases} 2h^2 - 4\tau\eta \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 8b^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \leq 2h^2 + 4\tau\eta \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 8b^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \\ 0 < 2h^2 - 4\tau\eta \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 8b^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \\ 8\tau\eta \sin^2 \frac{\alpha}{2} \geq 0. \end{cases}$$

Следовательно, для любых  $\alpha$  должно выполняться неравенство  $\eta \geq 0$ , которое выполняется автоматически, так как по условию задачи  $\eta$  – коэффициент вязкости, всегда не меньше 0.

$$\begin{aligned}
0 &< 2h^2 - 4\tau\eta \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 8b^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}, \\
(2\eta\tau - 4b^2) \sin^2 \frac{\alpha}{2} &< h^2, \\
2\eta\tau - 4b^2 &< h^2, \\
\tau &< \frac{h^2 + 4b^2}{2\eta}.
\end{aligned}$$

Это неравенство гарантирует достаточное условие устойчивости.

2)  $d \leq 0, d \geq p$ .

$$\begin{cases}
2h^2 - 4\tau\eta \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 8b^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \geq 2h^2 + 4\tau\eta \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 8b^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \\
0 > 2h^2 - 4\tau\eta \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 8b^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - D\tau h^2 \\
8\tau\eta \sin^2 \frac{\alpha}{2} \leq 0
\end{cases}$$

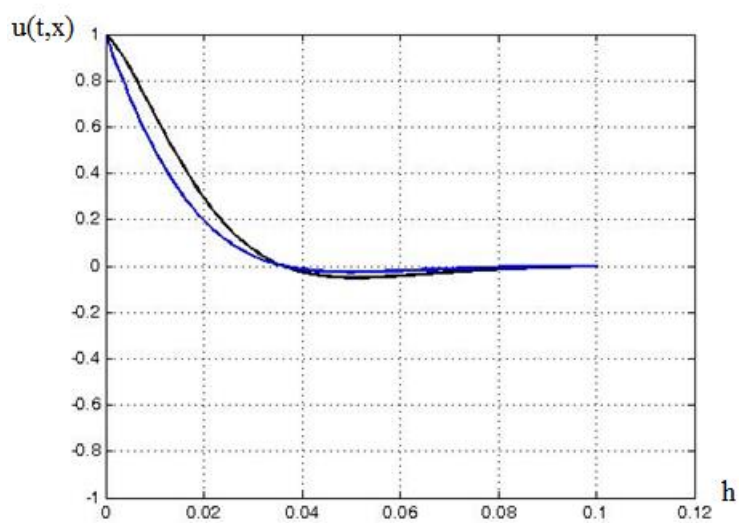
У этого неравенства нет решений, поскольку  $\eta$  по условию задачи неотрицательное.

Суммируя сказанное, приходим к выводу, что полученное неравенство  $\tau < \frac{h^2 + 4b^2}{2\eta}$  гарантирует выполнение достаточного условия устойчивости разностной схемы.

### 3.2 Результаты расчетов

В качестве примера на рисунке 5 приведено сравнение точного и приближенного решений задачи о распространении начального импульса в направлении разлома. Расчеты проводились при следующих значениях параметров модели: длина разлома взята 10 см и толщина 1 см. Вязкость равна 0,01 Па\*сек, модуль разупрочнения равен 1e2 с сеткой 200x150.

Установлено, что со временем разница растет при сравнении точного и приближенного решений, это связано с тем, что задача Коши корректна (судя по оценкам) только на малом интервале по времени.



По оси абсцисс откладывается шаг, а по оси ординат – значение функции в момент времени  $t$

Рисунок 5 – сравнение точного и приближенного решений

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получены следующие результаты:

1. в рамках предположения о закритическом деформировании микроразрушенного материала в глубинном тектоническом разломе получено модельное уравнение для описания динамических процессов, обусловленных распространением упругих волн в блоках;
2. исследовано полученное уравнение, описывающее волновые движения в слое горной породы, имитирующем тектонический разлом, под действием дополнительного давления;
3. показано, что краевая задача с начальными данными и граничными условиями первого рода для этого уравнения корректно поставлена;
4. построена разностная схема для ее численного решения;
5. получено достаточное условие устойчивости неявной разностной схемы;
6. проведены тестовые расчеты.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Горохов, А.А. Анализ уравнения, описывающего динамическое деформирование в слое микроразрушенной среды / А. А. Горохов // Молодой ученый. – 2015. – № 11. – С. 35 – 39.
2. Горохов, А. А. Анализ уравнения, моделирующего волновые движения в тектоническом разломе / А. А. Черепанова, А. А. Горохов // Молодой ученый. – 2016. – №10. С. 25–30.
3. Черепанова, И. С. Анализ уравнения, моделирующего волновые движения в слое микроразрушенной среды / И. С. Черепанова, А. А. Горохов А. А. // Молодой ученый. – 2016. – №11. С. 23–27.
4. Работнов, Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела : учебное пособие для вузов / Ю. Н. Работнов. – Москва : Наука, 1988. – 713 с.
5. Качанов, Л. М. Основы теории пластичности : учебник / В. К. Качанов. – Москва : Наука, 1969. – 421 с.
6. Новацкий, В. К. Волновые задачи теории пластичности : учебник / В. К. Новацкий. – Москва : МИР, 1978. – 312 с.
7. Модель землетрясения как сверхбыстрый катастрофический этап эволюции нагружаемой геосреды .Физическая мезомеханика. / П. В. Макаров, И. Ю. Смолин, Е. П. Евтушенко, А. Ю. Перышкин. 2010. Т. 13, спец. вып. с. 29–35.
8. Добрецов, Н. Л. Глубинная геодинамика: монография / Н. Л. Добрецов, Кирдяшкин, А. Г. Новосибирск: Изд-во СО РАН, филиал «ГЕО», 2001. – 409 с.
9. Гольдин, С. В. Дилатансия, переупаковка и землетрясения // Физика Земли. – 2004. – № 10. – С. 37–54.
10. Stavrogin A.N., Tarasov B.G. Experimental Physics and Rock Mechanics (Results of Laboratory Studies). India: Balkema, 2001.
11. Годунов, С. К. Уравнения математической физики. – Москва : Наука, 1979. – 391 с.

