Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2012, 5(1), 25–35

УДК 512.54

Разрешимость краевой задачи для уравнений одномерного движения двухфазной смеси

Ирина Г. Ахмерова*
Алтайский государственный университет,
Ленина, 61, Барнаул, 656049,
Россия

Получена 01.07.2011, окончательный вариант 15.10.2011, принята к печати 15.11.2011

Для системы уравнений одномерного нестационарного движения теплопроводной двухфазной смеси (газ — твердые частицы) доказана локальная разрешимость начально-краевой задачи.

Ключевые слова: газожидкостная смесь, взаимопроникающие движения, разрешимость.

Постановка задачи и формулировка основного результата

В работе изучается следующая квазилинейная система уравнений составного типа:

$$\frac{\partial(\rho_1^0 s)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_1^0 s v_1)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial(\rho_2^0(1-s))}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_2^0(1-s)v_2)}{\partial x} = 0, \tag{1}$$

$$\rho_1^0 s\left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1\frac{\partial v_1}{\partial x}\right) = -\frac{\partial(sp_1)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu_1(s)\frac{\partial v_1}{\partial x}\right) + F + \rho_1^0 sg, \tag{2}$$

$$\rho_2^0(1-s)\left(\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_2\frac{\partial v_2}{\partial x}\right) = -\frac{\partial((1-s)p_2)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu_2(s)\frac{\partial v_2}{\partial x}\right) - F + \rho_2^0(1-s)g, \tag{3}$$

$$F = B(s)(v_2 - v_1) + p_2\frac{\partial s}{\partial x}, \quad p_1 - p_2 = p_c(s,\theta), \quad p_2 = R\rho_2^0\theta, \tag{4}$$

$$c_1\rho_1^0 s\left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + v_1\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) + c_2\rho_2^0(1-s)\left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + v_2\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(\chi(s)\frac{\partial \theta}{\partial x}), \tag{5}$$

решаемая в области $(x,t) \in Q_T = \Omega \times (0,T)$, $\Omega = (0,1)$, при краевых и начальных условиях $(i = 1,2)$

$$\begin{gathered} v_i\mid_{x=0,x=1} = 0, \quad \frac{\partial\theta}{\partial x}\mid_{x=0,x=1} = 0, \quad v_i\mid_{t=0} = v_i^0(x), \\ p_2\mid_{t=0} = p^0(x), \quad \theta\mid_{t=0} = \theta^0(x), \quad s\mid_{t=0} = s^0(x). \end{gathered} \tag{6}$$

Данная начально-краевая задача описывает одномерное движение между непроницаемыми теплоизолированными стенками двухфазной смеси, состоящей из твердых частиц и газа [1]. Здесь ρ_i^0, v_i — соответственно истинная плотность и скорость i-й фазы ($i = 1$ — твердые частицы, $i = 2$ — газ), s — объемная концентрация твердых частиц, θ — абсолютная температура смеси, p_1 — эффективное давление твердых частиц, p_2 — внутреннее давление газа, g — плотность массовых сил, $c_i = \mathrm{const} > 0$ — теплоемкость при постоянном

*iakhmerova@mail.ru

объеме, $R = \mathrm{const} > 0$ — универсальная газовая постоянная; кроме того, $\mu_i(s)$ — вязкости фаз, $B(s)$ — коэффициент взаимодействия фаз, $\chi(s)$ — коэффициент теплопроводности смеси, $p_c(s,\theta)$ — разность давлений (заданные функции). Задача записана в эйлеровых координатах x, t. Истинная плотность твердых частиц ρ_1^0 принимается постоянной. Искомые величины — s, θ, ρ_2^0, v_i, p_i, $i = 1, 2$.

Локальная по времени разрешимость задачи Коши для уравнений (1)–(5) установлена в работе [2] при дополнительных условиях $p_1 = p_2$, $\theta = \mathrm{const}$, $\rho_i^0 = \mathrm{const}$, $\mu_i = \mathrm{const}$, $i = 1, 2$, а также в предположении малости вязкости и ускорения второй фазы (в уравнении (3) соответствующие слагаемые отбрасываются) [3].

Система (1)–(5) близка по структуре системе уравнений вязкого газа [4, гл. 2] с зависящей от плотности вязкостью. Особенностью задачи (1)–(6) является наличие двух скоростей v_1 и v_2, а также необходимость обоснования физического принципа максимума для концентрации s вида $0 \leqslant s \leqslant 1$ и условия $\rho_2^0 > 0$.

В настоящей работе доказана локальная разрешимость задачи (1)–(6) в случае, когда ρ_2^0 — функция давления и температуры, а $\rho_1^0 = \mathrm{const}$.

Определение 1. *Обобщенным решением задачи (1)–(6) называется совокупность функций* $(s(x,t), \rho_2^0(x,t), v_i(x,t), p_i(x,t), \theta(x,t))$, $i = 1, 2$ *из пространств*

$$(s, p_i, \rho_2^0) \in L_\infty(0,T; W_2^1(\Omega)), \quad \left(\frac{\partial s}{\partial t}, \frac{\partial \rho_2^0}{\partial t}\right) \in L_2(Q_T),$$
$$(v_i, \theta) \in L_\infty(0,T; W_2^1(\Omega)) \cap L_2(0,T; W_2^2(\Omega)), \quad \left(\frac{\partial v_i}{\partial t}, \frac{\partial \theta}{\partial t}, \frac{\partial p_i}{\partial x}\right) \in L_2(Q_T),$$

удовлетворяющая уравнениям (1)–(5) почти всюду в Q_T *и принимающая заданные граничные и начальные значения в смысле следов функций из указанных классов.*

Определение 2. *Классическим решением задачи (1)–(6) понимается совокупность функций* $(s(x,t), p_2(x,t), \rho_2^0(x,t)) \in C^{1+\alpha}(Q_T)$, $(v_i(x,t), p_1(x,t), \theta(x,t)) \in C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(Q_T)$ *таких, что* $0 < s(x,t) < 1, 0 < \theta(x,t)$, $\rho_2^0(x,t) < \infty$. *Эти функции удовлетворяют уравнениям (1)–(5) и начальным и граничным условиям (6) как непрерывные в* $\overline{Q_T}$ *функции.*

Сформулируем основной результат статьи.

Теорема. *Пусть данные задачи (1)–(6) подчиняются следующим условиям гладкости:*

$$(v_i^0, \theta^0, s^0, \rho_2^0) \in W_2^1(\Omega), \quad g \in L_2(0,T; W_2^1(\Omega))$$

и условия согласования $v_i^0 \mid_{x=0,x=1} = \dfrac{d\theta^0}{dx} \mid_{x=0,x=1} = \dfrac{dp^0}{dx} \mid_{x=0,x=1} = 0, i = 1, 2$. *Пусть функции* $\mu_1(s)$, $\mu_2(s)$, $B(s)$, $p_c(s,\theta)$, $\chi(s)$ *и их производные до второго порядка непрерывны для* $s \in (0,1)$ *и удовлетворяют условиям:*

$$k_0^{-1} s^{q_1}(1-s)^{q_2} \leqslant \mu_1(s) \leqslant k_0 s^{q_3}(1-s)^{q_4}, \quad |(\mu_1(s))'_s| \leqslant k_0 s^{q_5}(1-s)^{q_6},$$
$$k_0^{-1} s^{q_7}(1-s)^{q_8} \leqslant \mu_2(s) \leqslant k_0 s^{q_9}(1-s)^{q_{10}}, \quad |(\mu_2(s))'_s| \leqslant k_0 s^{q_{11}}(1-s)^{q_{12}},$$
$$k_0^{-1} s^{q_{13}}(1-s)^{q_{14}}|\theta|^{q_{15}} \leqslant p_c(s,\theta) \leqslant k_0 s^{q_{16}}(1-s)^{q_{17}}|\theta|^{q_{18}}, |(p_c(s,\theta))'_s| \leqslant k_0 s^{q_{19}}(1-s)^{q_{20}}|\theta|^{q_{21}},$$
$$k_0^{-1} s^{q_{22}}(1-s)^{q_{23}} \leqslant \chi(s) \leqslant k_0 s^{q_{24}}(1-s)^{q_{25}}, \quad |(\chi(s))'_s| \leqslant k_0 s^{q_{26}}(1-s)^{q_{27}},$$
$$k_0^{-1} s^{q_{28}}(1-s)^{q_{29}} \leqslant B(s) \leqslant k_0 s^{q_{30}}(1-s)^{q_{31}},$$

где $k_0 = \mathrm{const} > 0$, $q_1, ..., q_{31}$ — *фиксированные вещественные параметры.*

Если выполнены условия $0 < m_0 \leqslant s^0(x) \leqslant M_0 < 1$, $0 < m_1 \leqslant p^0(x), \theta^0(x) \leqslant M_1 < \infty$, $x \in \overline{\Omega}$, *где* m_0, M_0, m_1, M_1 — *известные положительные постоянные, то найдется достаточно малое значение* $t_0 > 0$, $t_0 \in (0,T)$, *такое, что для всех* $t \leqslant t_0$ *существует обобщенное решение* $(s(x,t), \rho_2^0(x,t), v_i(x,t), p_i(x,t), \theta(x,t))$ *задачи (1)–(6). Если дополнительно*

$g \in C^{\alpha}(\overline{Q}_T)$, $(s^0, p^0) \in C^{1+\alpha}(\overline{\Omega})$, $(v_1^0, v_2^0,\ \theta^0) \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$, функции $\mu_1(s)$, $\mu_2(s)$, $B(s)$, $p_c(s,\theta)$, $\chi(s)$ и их производные до второго порядка непрерывны, выполнены условия согласования первого порядка данных задачи, то в Q_{t_0} существует классическое решение задачи (1)–(6).

Локальная разрешимость

Системе уравнений (1)–(5) можно придать следующий вид:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(sv_1) = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_2) = 0, \quad \rho = \rho_2^0(1-s), \quad p_2 = R\rho_2^0\theta,$$

$$\rho_1^0 s\left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1\frac{\partial v_1}{\partial x}\right) = -s\frac{\partial p_2}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}(sp_c(s,\theta)) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu_1(s)\frac{\partial v_1}{\partial x}\right) + B(s)(v_2 - v_1) + \rho_1^0 sg,$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_2\frac{\partial v_2}{\partial x}\right) = -(1-s)\frac{\partial p_2}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu_2(s)\frac{\partial v_2}{\partial x}\right) + B(s)(v_1 - v_2) + \rho g,$$

$$c_1\rho_1^0 s\left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + v_1\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) + c_2\rho\left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + v_2\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(\chi(s)\frac{\partial \theta}{\partial x}).$$

При доказательстве теоремы удобно использовать переменные Лагранжа [4, с. 47]. Пусть $y = y(\zeta, x, t)$ — решение задачи Коши: $\dfrac{\partial y}{\partial \zeta} = u(y,\zeta)$, $\quad y|_{\zeta=t} = x$. Положим $\xi = y(\zeta,x,t)|_{\zeta=0}$ и возьмем за новые переменные ξ и t. Тогда $s(\xi,t) = s^0(\xi)J(\xi,t)$, где $J(\xi,t) = \dfrac{\partial \xi}{\partial x}$ — якобиан перехода. Переходя от (ξ,t) к массовым лагранжевым переменным $(\bar{x},t)$ по правилу $s^0(\xi)d\xi = d\bar{x}$, $\bar{x}(\xi) = \int\limits_0^{\xi} s^0(\eta)d\eta \in [0,1]$ и сохраняя затем для переменной $\bar{x}$ обозначение x, получим

$$\frac{\partial s}{\partial t} + s^2\frac{\partial v_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + (v_2 - v_1)s\frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho s\frac{\partial v_2}{\partial x} = 0, \tag{7}$$

$$L_1(s,\rho,v_1,v_2,\theta) = \rho_1^0\frac{\partial v_1}{\partial t} + s\frac{\partial p_2}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(sp_c(s,\theta)) - \frac{\partial}{\partial x}(s\mu_1(s)\frac{\partial v_1}{\partial x}) - \frac{B(s)(v_2 - v_1)}{s} - \rho_1^0 g = 0, \tag{8}$$

$$\begin{aligned} L_2(s,\rho,v_1,v_2,\theta) = \frac{\partial v_2}{\partial t} + (v_2 - v_1)s\frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{s}{\rho}(1-s)\frac{\partial p_2}{\partial x} - \\ -\frac{s}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}(s\mu_2(s)\frac{\partial v_2}{\partial x}) - \frac{B(s)(v_1 - v_2)}{\rho} - g = 0, \end{aligned} \tag{9}$$

$$L_3(s,\rho,v_1,v_2,\theta) = \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{c_2\rho s(v_2 - v_1)}{c_1\rho_1^0 s + c_2\rho}\frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{s}{c_1\rho_1^0 s + c_2\rho}\frac{\partial}{\partial x}(s\chi(s)\frac{\partial \theta}{\partial x}) = 0, \tag{10}$$

Краевые и начальные условия имеют вид

$$\begin{aligned} &v_i\,|_{x=0,x=1} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x}\,|_{x=0,x=1} = 0, \quad \frac{\partial p_2}{\partial x}\,|_{x=0,x=1} = 0, \\ &v_i\,|_{t=0} = v_1^0(x), \quad p_2\,|_{t=0} = p^0(x), \quad \theta\,|_{t=0} = \theta^0(x), \quad s\,|_{t=0} = s^0(x). \end{aligned} \tag{11}$$

Будем сейчас строить локальное обобщенное решение как предел приближенных решений $(s^n, \rho^n, v_1^n, v_2^n, \theta^n)$, где v_1^n, v_2^n и θ^n представляются в виде конечных сумм: $v_1^n = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i^n(t)\sin(\pi i x)$, $v_2^n = \sum\limits_{i=1}^{n} v_i^n(t)\sin(\pi i x)$, $\theta^n = \sum\limits_{j=0}^{n}\theta_j^n(t)\cos(\pi j x)$, $n = 1,2,\ldots$, с неизвестными коэффициентами $u_i^n(t), v_i^n(t)$, $i = 1,2,\ldots,n$, $\theta_j^n(t)$, $j = 0,1,2,\ldots,n$. Для определения последних предполагается, что уравнения (8), (9) и (10) выполняются приближенно:

$$\int\limits_0^1 L_1(s^n,\rho^n,v_1^n,v_2^n,\theta^n)\sin(\pi i x)dx = 0, \quad i = 1,2,\ldots,n, \tag{12}$$

$$\int\limits_0^1 L_2(s^n, \rho^n, v_1^n, v_2^n, \theta^n)\sin(\pi i x)dx = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{13}$$

$$\int\limits_0^1 L_3(s^n, \rho^n, v_1^n, v_2^n, \theta^n)\cos(\pi j x)dx = 0, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, n. \tag{14}$$

Тогда $u_i^n(t)$, $v_i^n(t)$, $\theta_j^n(t)$ находятся из решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{du_i^n}{dt} = \Phi_i^n(u_1^n, \ldots, u_n^n; v_1^n, \ldots, v_n^n; \theta_0^n, \ldots, \theta_n^n; s^n, \rho^n), \quad u_i^n(0) = 2\int\limits_0^1 u^0(x)\sin(\pi i x)dx,$$
$$\frac{dv_i^n}{dt} = K_i^n(u_1^n, \ldots, u_n^n; v_1^n, \ldots, v_n^n; \theta_0^n, \ldots, \theta_n^n; s^n, \rho^n), \quad v_i^n(0) = 2\int\limits_0^1 v^0(x)\sin(\pi i x)dx, \tag{15}$$
$$\frac{d\theta_j^n}{dt} = \lambda_j \Psi_j^n(u_1^n, \ldots, u_n^n; v_1^n, \ldots, v_n^n; \theta_0^n, \ldots, \theta_n^n; s^n, \rho^n),$$

$$\theta_0^n(0) = 2\int\limits_0^1 \theta^0(x)dx, \quad \theta_j^n(0) = 2\int\limits_0^1 \theta^0(x)\cos(\pi j x)dx, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Здесь $\lambda_0 = 1$, $\lambda_j = 2$, $j = 1, 2, \ldots, n$,

$$\Phi_i^n = 2\int\limits_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(s^n \mu_1(s^n)\frac{\partial v_1^n}{\partial x}\right) - s^n \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho^n}{1 - s^n}\theta^n R\right) - \frac{\partial}{\partial x}(s^n p_c\,(s^n, \theta^n)) + \right.$$
$$\left. + \frac{B(s^n)(v_2^n - v_1^n)}{s^n} + \rho_1^0 g\right]\sin(\pi i x)dx,$$

$$K_i^n = 2\int\limits_0^1 \left[\frac{s^n}{\rho^n}\frac{\partial}{\partial x}\left(s^n \mu_2(s^n)\frac{\partial v_2^n}{\partial x}\right) - \frac{s^n(1 - s^n)}{\rho^n}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho^n}{1 - s^n}\theta^n R\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{B(s^n)(v_1^n - v_2^n)}{\rho^n} - (v_2^n - v_1^n)s^n\frac{\partial v_2^n}{\partial x} + g\right]\sin(\pi i x)dx,$$

$$\Psi_j^n = \int\limits_0^1 \left[\frac{1}{(c_1\rho_1^0 + \frac{c_2\rho^n}{s^n})}\frac{\partial}{\partial x}\left(s^n \chi(s^n)\frac{\partial \theta^n}{\partial x}\right) - \frac{c_2\rho^n(v_2^n - v_1^n)}{c_1\rho_1^0 + \frac{c_2\rho^n}{s^n}}\frac{\partial \theta^n}{\partial x}\right]\cos(\pi j x)dx.$$

Функции $s^n(x,t)$ и $\rho^n(x,t)$ определим из решения задач:

$$\frac{\partial s^n}{\partial t} + (s^n)^2\frac{\partial v_1^n}{\partial x} = 0, \quad s^n\,|_{t=0} = s^0(x), \tag{16}$$

$$\frac{\partial \rho^n}{\partial t} + (v_2^n - v_1^n)s^n\frac{\partial \rho^n}{\partial x} + \rho^n s^n\frac{\partial v_2^n}{\partial x} = 0, \quad \rho^n\,|_{t=0} = \rho^0(x). \tag{17}$$

Из (16) для $s^n(x,t)$ получим следующее соотношение:

$$s^n(x,t) = s^0(x)(1 + s^0(x)\int\limits_0^t v_{1x}^n d\tau)^{-1}. \tag{18}$$

Задаче (17) придадим следующий вид:

$$\frac{\partial R^n}{\partial t} + U^n \frac{\partial R^n}{\partial x} = f_1(v_2^n, s^n, \rho^n) \equiv f_1^n, \quad R^n \mid_{t=0} = R^0(x), \tag{19}$$

где $R^n = ln\rho^n$, $U^n \equiv (v_2^n - v_1^n)s^n$, $f_1^n = -s^n \dfrac{\partial v_2^n}{\partial x}$. Соответствующая (19) характеристическая система уравнений имеет вид

$$\begin{gathered} \frac{dy(t,\xi)}{dt} = U^n(y(t,\xi),t), \quad y \mid_{t=0} = \xi, \\ \frac{d\overline{R}^n}{dt} = f_1^n(y(t,\xi),t,\overline{R}^n), \quad \overline{R}^n \mid_{t=0} = R^0(\xi), \end{gathered} \tag{20}$$

где $y(t,\xi) = x$, $\overline{R}^n(t,\xi) = R^n(y,t)$, $I \equiv \dfrac{\partial y(t,\xi)}{\partial \xi} = \exp\int\limits_0^t A(y(\tau,\xi),\tau)d\tau$, $\quad A = (v_2^n - v_1^n)_x s^n + (v_2^n - v_1^n)s_x^n$. Из (20) для $\rho^n(x,t)$ имеем представление

$$\rho^n(x,t) = \rho^0(x) e^{-\int\limits_0^t s^n v_{2x}^n d\tau}. \tag{21}$$

Таким образом, приближенное решение $(v_1^n, v_2^n, s^n, \rho^n, \theta^n)$ удовлетворяет задаче Коши (15), (16), (20). Локальная разрешимость этой задачи при каждом фиксированном n следует из теоремы Коши-Пикара для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Теперь укажем такое значение t_0, для которого данная задача на интервале $[0,t_0]$ разрешима для всех n. Для этого достаточно получить равномерные по n оценки для v_1^n, v_2^n, s^n, ρ^n, θ^n.

Еще одно условие, из которого в дальнейшем выбирается величина промежутка t_0, связано с требованием положительности $s^n(x,t)$, $\rho^n(x,t)$. Поскольку $0 < m_0 \leqslant s^0(x) \leqslant M_0 < 1$, $0 < m_1 \leqslant \rho^0(x) \leqslant M_1 < \infty$, потребуем, чтобы для $s^n(x,t)$ и $\rho^n(x,t)$ выполнялись соотношения

$$0 < \frac{m_0}{2} \leqslant s^n(x,t) \leqslant \frac{M_0+1}{2} < 1, \tag{22}$$

$$\frac{m_1}{2} \leqslant \rho^n(x,t) \leqslant 2M_1 \tag{23}$$

для всех n при $x \in [0,1], t \in [0,t_0]$. Кроме того, из (18), (22) и (21), (23) получим:

$$\mid s_x^n \mid \leqslant C(1 + \int\limits_0^t \mid v_{1xx}^n \mid d\tau), \tag{24}$$

$$\mid \rho_x^n \mid \leqslant C(1 + \int\limits_0^t \mid s_x^n \mid\mid v_{2x}^n \mid d\tau + \int\limits_0^t \mid v_{2xx}^n \mid d\tau). \tag{25}$$

Положим

$$\begin{gathered} z_n(t) = \|v_1^n(t)\|^2 + \|v_2^n(t)\|^2 + \|\theta^n(t)\|^2 + \|v_{1x}^n(t)\|^2 + \|v_{2x}^n(t)\|^2 + \|\theta_x^n(t)\|^2 + \\ + \kappa(\int\limits_0^t \|v_{1xx}^n(\tau)\|^2 d\tau + \int\limits_0^t \|v_{2xx}^n(\tau)\|^2 d\tau + \int\limits_0^t \|\theta_{2xx}^n(\tau)\|^2 d\tau), \end{gathered}$$

где вещественный параметр $\kappa \in (0,1)$ будет указан позже.

Каждое из уравнений (12) умножим на $u_i^n(t)$ и просуммируем по i от 1 до n. Получим равенство

$$\frac{1}{2}\rho_1^0\frac{d}{dt}\int\limits_0^1(v_1^n(x,t))^2dx+\int\limits_0^1\mu_1(s^n)s^n(v_{1x}^n)^2dx=-\int\limits_0^1 s^n v_1^n\left(d\frac{\rho^n\theta^n R}{1-s^n}\right)_x dx- \\ -\int\limits_0^1 v_1^n(s^n p_c(s^n,\theta^n))_x dx+\int\limits_0^1\frac{v_1^n B(s^n)(v_2^n-v_1^n)}{s^n}dx+\int\limits_0^1\rho_1^0 v_1^n g dx. \tag{26}$$

Покажем, что из равенства (26) следует оценка

$$\frac{d}{dt}\|v_1^n(t)\|^2+\nu_o\|v_{1x}^n(t)\|^2\leqslant C(\|g(t)\|^2+z_n(t)+z_n^2(t)+z_n^3(t)). \tag{27}$$

Функции $\dfrac{s^n}{1-s^n}$, $\dfrac{s^n\rho^n}{(1-s^n)^2}$, $\dfrac{s^n\rho^n}{1-s^n}$, $(sp_c(s,\theta^n))'_s(s^n)$, $\dfrac{B(s^n)}{s^n}$ в силу (22), (23) равномерно по n ограничены при всех ρ^n и $s^n\in(0,1)$.

Первое слагаемое правой части равенства (26) представим в виде

$$\int\limits_0^1 s^n v_1^n\left(\frac{\rho^n\theta^n}{1-s^n}\right)_x dx=\int\limits_0^1\frac{s^n v_1^n\rho_x^n\theta^n}{1-s^n}dx+\int\limits_0^1\frac{s^n v_1^n\rho^n s_x^n\theta^n}{(1-s^n)^2}dx+\int\limits_0^1\frac{s^n v_1^n\rho^n\theta_x^n}{1-s^n}dx=I_1+I_2+I_3.$$

Для I_1 получаем

$$I_1\leqslant C\mid\theta^n(x,t)\mid\max_{0\leqslant x\leqslant 1}\mid v_1^n(x,t)\mid\int\limits_0^1\mid\rho_x^n(x,t)\mid dx\leqslant C\parallel v_1^n(t)\parallel^{1/2}\parallel v_{1x}^n(t)\parallel^{1/2}\mid\theta^n(x,t)\mid\times \\ \times\int\limits_0^1(1+\int\limits_0^t\mid s_x^n(x,\tau)\mid\mid v_{2x}^n(x,\tau)\mid d\tau+\int\limits_0^t\mid v_{2xx}^n(x,\tau)\mid d\tau)dx\leqslant \\ \leqslant C\parallel v_1^n(t)\parallel^{1/2}\parallel v_{1x}^n(t)\parallel^{1/2}\mid\theta^n(x,t)\mid\times \\ \times\left(\int\limits_0^1\int\limits_0^t\mid s_x^n(x,\tau)\mid\mid v_{2x}^n(x,\tau)\mid d\tau dx+\int\limits_0^1\int\limits_0^t\mid v_{2xx}^n(x,\tau)\mid d\tau dx\right)\leqslant \\ \leqslant C\parallel v_1^n(t)\parallel^{1/2}\parallel v_{1x}^n(t)\parallel^{1/2}\mid\theta^n(x,t)\mid\times \\ \times\left(\int\limits_0^1\int\limits_0^t\mid v_{2x}^n(x,\tau)\mid\left(\int\limits_0^\tau\mid v_{1xx}^n(x,s)\mid ds\right)d\tau dx+\int\limits_0^1\int\limits_0^t\mid v_{2xx}^n(x,\tau)\mid d\tau dx\right)\leqslant \\ \leqslant\varepsilon_1\parallel v_{1x}^n(t)\parallel^2+\frac{C}{\varepsilon_1}(z_n(t)+z_n^2(t)+z_n^3(t)).$$

Для слагаемого I_2 верна следующая оценка:

$$I_2\leqslant C\max_{0\leqslant x\leqslant 1}\mid v_1^n(x,t)\mid\parallel\theta^n(t)\parallel\parallel s_x^n(t)\parallel\leqslant C\parallel v_1^n(t)\parallel^{1/2}\parallel v_{1x}^n(t)\parallel^{1/2}\parallel\theta^n(t)\parallel\parallel s_x^n(t)\parallel\leqslant \\ \leqslant\varepsilon_2\parallel v_{1x}^n(t)\parallel^2+\frac{C}{\varepsilon_2}(\parallel v_1^n(t)\parallel^2+\parallel s_x^n(t)\parallel^4+\parallel\theta^n(t)\parallel^4)\leqslant\varepsilon_2\parallel v_{1x}^n(t)\parallel^2+\frac{C}{\varepsilon_2}(z_n(t)+z_n^2(t)).$$

Для I_3 и остальных слагаемых в правой части (26) имеем:

$$I_3\leqslant C\parallel v_1^n(t)\parallel\parallel\theta_x^n(t)\parallel\leqslant\varepsilon_3\parallel\theta_x^n(t)\parallel^2+\frac{C}{\varepsilon_3}\parallel v_1^n(t)\parallel^2\leqslant Cz_n(t),$$

$$\int\limits_0^1 v_1^n(s^n p_c(s^n,\theta^n))_x dx = \int\limits_0^1 v_1^n(sp_c(s,\theta^n))_s^{'}(s^n)s_x^n dx \leqslant C(\parallel v_1^n(t)\parallel^2 + \parallel s_x^n(t)\parallel^2) \leqslant Cz_n(t),$$

$$\int\limits_0^1 \frac{v_1^n B(s^n)(v_2^n - v_1^n)}{s^n} dx \leqslant C(\parallel v_1^n(t)\parallel^2 + \parallel v_2^n(t)\parallel^2) \leqslant Cz_n(t),$$

$$\int\limits_0^1 \rho_1^0 v_1^n g dx \leqslant C(\parallel v_1^n(t)\parallel^2 + \parallel g(t)\parallel^2) \leqslant C(z_n(t) + \parallel g(t)\parallel^2).$$

Здесь и далее C — положительная постоянная, не зависящая от n. Поскольку $\mu_1(s^n)s^n \geqslant \nu_0 \equiv k_0^{-1}\left(\frac{m_0}{2}\right)^{q_1+1}\left(\frac{1-M_0}{2}\right)^{q_2}$, то выбирая $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$ из условия $\sum\limits_{i=1}^{2}\varepsilon_i = \nu_0/2$, приходим к неравенству (27).

Каждое из уравнений (12) умножим на $(i\pi)^2 u_i^n(t)$ и просуммируем по i от 1 до n. Учитывая равенство $\sum\limits_{i=1}^{n} u_i^n(t)(i\pi)^2\sin(i\pi x) = -v_{1xx}^n$, получим

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\rho_1^0\frac{d}{dt}\int\limits_0^1 (v_{1x}^n(x,t))^2 dx + \int\limits_0^1 \mu_1(s^n)s^n(v_{1xx}^n)^2 dx = -\int\limits_0^1 [(\mu_1(s^n))_x s^n v_{1xx}^n v_{1x}^n - \\ -\mu_1(s^n)s_x^n v_{1xx}^n v_{1x}^n dx + \int\limits_0^1 s^n v_{1xx}^n\left(\frac{\rho^n\theta^n R}{1-s^n}\right)_x dx + \\ + \int\limits_0^1 v_{1xx}^n(s^n p_c(s^n,\theta^n))_x dx - \int\limits_0^1 \frac{v_{1xx}^n B(s^n)(v_2^n - v_1^n)}{s^n} dx - \int\limits_0^1 \rho_1^0 v_{1xx}^n g dx.\end{gathered} \tag{28}$$

Так как $(\mu_1(s))_s'(s^n)$ равномерно по n ограничена при всех $s \in (0,1)$ и справедливо неравенство $\mid \theta^n \mid \leqslant \mid \int\limits_0^1 \theta^n dx \mid + \parallel \theta_x^n \parallel$ и с учетом неравенств (24), (25) оценим слагаемые правой части (28) аналогично слагаемым из равенства (26). Получаем неравенство

$$\frac{d}{dt}\|v_{1x}^n(t)\|^2 + 2\nu_0\|v_{1xx}^n(t)\|^2 \leqslant \sum_{i=4}^{11}\varepsilon_i\|v_{1xx}^n(t)\|^2 + C(\|g(t)\|^2 + z_n(t) + z_n^2(t) + z_n^3(t)). \tag{29}$$

Каждое из уравнений (13) умножим на $v_i^n(t)$ и просуммируем по i от 1 до n. Получим равенство

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_0^1 (v_2^n(x,t))^2 dx + \int\limits_0^1 \frac{s^n}{\rho^n}\mu_2(s^n)s^n(v_{2x}^n)^2 dx = -\int\limits_0^1 \left(\frac{s^n}{\rho^n}\right)_x \mu_2(s^n)s^n v_2^n v_{2x}^n dx + \\ + \int\limits_0^1 \frac{v_2^n B(s^n)(v_1^n - v_2^n)}{\rho^n} dx + \int\limits_0^1 v_2^n g dx - \int\limits_0^1 v_2^n(v_2^n - v_1^n)s^n v_{2x}^n dx - \\ - \int\limits_0^1 \frac{s^n(1-s^n)}{\rho^n} v_2^n\left(\frac{\rho^n\theta^n R}{1-s^n}\right)_x dx.\end{gathered} \tag{30}$$

Покажем, что из равенства (30) следует оценка

$$\frac{d}{dt}\|v_2^n(t)\|^2 + \nu_1\|v_{2x}^n(t)\|^2 \leqslant C(\|g(t)\|^2 + z_n(t) + z_n^2(t) + z_n^3(t) + z_n^4(t) + z_n^5(t)). \tag{31}$$

Функции $\dfrac{s^n}{\rho^n}$, $\dfrac{B(s^n)}{\rho^n}$ равномерно по n ограничены при всех ρ^n и $s^n \in (0,1)$. С учетом неравенств (24), (25) и неравенств Коши $\forall \varepsilon_i > 0, i = 12,..,17$, получаем:

$$\int_0^1 \left(\frac{s^n}{\rho^n}\right)_x \mu_2(s^n)s^n v_2^n v_{2x}^n dx = C\left(\int_0^1 s_x^n v_2^n v_{2x}^n dx - \int_0^1 \rho_x^n v_2^n v_{2x}^n dx\right) \leqslant I_4 + I_5,$$

$$I_4 \leqslant \int_0^1 |s_x^n v_2^n v_{2x}^n| dx \leqslant C \parallel v_2^n(t) \parallel^{1/2} \parallel v_{2x}^n(t) \parallel^{3/2} \parallel s_x^n(t) \parallel \leqslant \varepsilon_{12} \parallel v_{2x}^n(t) \parallel^2 + \frac{C}{\varepsilon_{12}} z_n^3(t),$$

$$I_5 \leqslant \int_0^1 |\rho_x^n v_2^n v_{2x}^n| dx \leqslant C \max_{0\leqslant x\leqslant 1} | v_2^n(x,t) | \int_0^1 | \rho_x^n || v_{2x}^n | dx \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_{13} \parallel v_{2x}^n(t) \parallel^2 + \frac{C}{\varepsilon_{13}}(z_n^2(t) + z_n^4(t) + z_n^5(t)).$$

Остальные слагаемые правой части из равенства (30) оцениваются аналогично слагаемым из равенства (26).

Поскольку $\dfrac{s^n}{\rho^n}\mu_2(s^n)s^n \geqslant \nu_1 \equiv \left(\dfrac{2k_0^{-1}}{m_1}\left(\dfrac{m_0}{2}\right)^{q_7+2}\left(\dfrac{1-M_0}{2}\right)^{q_8}\right)$, то, выбирая $\varepsilon_{12} - \varepsilon_{16}$ из условия $\sum\limits_{i=12}^{16} \varepsilon_i = \nu_1/2$, приходим к неравенству (31).

Каждое из уравнений (13) умножим на $(i\pi)^2 v_i^n(t)$ и просуммируем по i от 1 до n. Учитывая равенство $\sum\limits_{i=1}^{n} v_i^n(t)(i\pi)^2 \sin(i\pi x) = -v_{2xx}^n$, получим

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 (v_{2x}^n(x,t))^2 dx + \int_0^1 \frac{s^n}{\rho^n}\mu_2(s^n)s^n(v_{2xx}^n)^2 dx = \int_0^1 \frac{s^n(1-s^n)}{\rho^n} v_{2xx}^n \left(\frac{\rho^n\theta^n R}{1-s^n}\right)_x dx - \\ - \int_0^1 \frac{s^n}{\rho^n}\mu_2(s^n)s_x^n v_{2xx}^n v_{2x}^n dx - \int_0^1 \frac{s^n}{\rho^n}(\mu_2(s^n))_x s^n v_{2xx}^n v_{2x}^n dx - \int_0^1 \frac{v_{2xx}^n B(s^n)(v_1^n - v_2^n)}{\rho^n} dx - \\ - \int_0^1 v_{2xx}^n g dx + \int_0^1 v_{2xx}^n (v_2^n - v_1^n) s^n v_{2x}^n dx.\end{gathered} \tag{32}$$

Так как $(\mu_2(s))'_s(s^n)$ равномерно по n ограничена при всех $s \in (0,1)$ и с учетом неравенств (24) и (25), оценим слагаемые правой части (32) аналогично слагаемым из равенств (26) и (30). Получаем неравенство

$$\frac{d}{dt}\|v_{2x}^n(t)\|^2 + 2\nu_1\|v_{2xx}^n(t)\|^2 \leqslant \sum_{i=18}^{25} \varepsilon_i \|v_{2xx}^n(t)\|^2 + C(\|g(t)\|^2 + z_n(t) + z_n^2(t) + z_n^3(t)). \tag{33}$$

Установим необходимые оценки для $\theta^n(x,t)$. Каждое из уравнений (14) умножим на $\theta_j^n(t)$ и просуммируем по j от 0 до n. Получим равенство

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 (\theta^n(x,t))^2 dx + \int_0^1 A(s^n,\rho^n)\chi(s^n)s^n(\theta_x^n)^2 dx = \\ = -\int_0^1 A(s^n,\rho^n)c_2\rho^n(v_2^n - v_1^n)\theta^n\theta_x^n dx - \int_0^1 A_x(s^n,\rho^n)\theta^n\chi(s^n)s^n\theta_x^n dx.\end{gathered} \tag{34}$$

Покажем, что из равенства (34) следует оценка

$$\frac{d}{dt}\|\theta^n(t)\|^2+\nu_2\|\theta^n_x(t)\|^2\leqslant C(z_n(t)+z_n^2(t)+z_n^3(t)). \tag{35}$$

Функции $A(s^n,\rho^n)=\dfrac{s^n}{c_1\rho_1^0 s^n+c_2\rho^n}$, $\chi(s^n)$, $(\chi(s))'_s(s^n)$ равномерно по n ограничены при всех ρ^n и $s^n\in(0,1)$. Поэтому, с учетом неравенств (24), (25) и неравенств Коши $\forall\varepsilon_i>0, i=26,27,28$, получим

$$\int\limits_0^1 A(s^n,\rho^n)c_2\rho^n(v_2^n-v_1^n)\theta^n\theta^n_x dx\leqslant C\mid\theta^n(x,t)\mid\int\limits_0^1(v_2^n(x,t)-v_1^n(x,t))\theta^n_x(x,t)dx\leqslant$$
$$\leqslant\varepsilon_{26}\parallel\theta^n_x(t)\parallel^2+\frac{C}{\varepsilon_{26}}(z_n(t)+z_n^2(t)).$$

Второе слагаемое равенства (34) представим в виде

$$\int\limits_0^1 A_x(s^n,\rho^n)\theta^n\chi(s^n)s^n\theta^n_x dx=\int\limits_0^1\frac{s^n_x}{c_1\rho_1^0 s^n+c_2\rho^n}\theta^n\chi(s^n)s^n\theta^n_x dx-$$
$$-\int\limits_0^1\frac{s^n_x(s^n_x+\rho^n_x)}{(c_1\rho_1^0 s^n+c_2\rho^n)^2}\theta^n\chi(s^n)s^n\theta^n_x dx=I_6+I_7,$$

для I_6 верна следующая оценка

$$I_6\leqslant C\int\limits_0^1\mid s^n_x(x,t)\theta^n(x,t)\theta^n_x(x,t)\mid dx\leqslant C\mid\theta^n(x,t)\mid\parallel s^n_x(t)\parallel\parallel\theta^n_x(t)\parallel\leqslant$$
$$\leqslant\varepsilon_{27}\parallel\theta^n_x(t)\parallel^2+\frac{C}{\varepsilon_{27}}(z_n(t)+z_n^2(t)),$$

оценка для I_7 проводится аналогично оценке первого слагаемого правой части равенства (26) и имеет вид

$$I_7\leqslant C\int\limits_0^1\mid(s^n_x+\rho^n_x)\theta^n\theta^n_x\mid dx\leqslant\varepsilon_{28}\parallel\theta^n_x(t)\parallel^2+\frac{C}{\varepsilon_{28}}(z_n(t)+z_n^2(t)+z_n^3(t)).$$

Поскольку $A(s^n,\rho^n)\chi(s^n)s^n\geqslant\nu_2\equiv\dfrac{2k_0^{-1}}{m_0+m_1}\left(\dfrac{m_0}{2}\right)^{q_{22}+2}\left(\dfrac{1-M_0}{2}\right)^{q_{23}}$, то, выбирая $\varepsilon_{26}-\varepsilon_{28}$ из условия $\varepsilon_3+\sum\limits_{i=26}^{28}\varepsilon_i=\nu_2/2$, приходим к неравенству (35).

Затем каждое из уравнений (14) умножим на $(\pi j)^2\theta^n_j(t)$ и просуммируем по j от 0 до n. Учитывая равенство $\sum\limits_{j=1}^n(\pi j)^2\theta^n_j(t)\cos(\pi jx)=-\theta^n_{xx}$, получим

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_0^1(\theta^n_x(x,t))^2dx+\int\limits_0^1 A(s^n,\rho^n)\chi(s^n)s^n(\theta^n_{xx})^2dx=-\int\limits_0^1 A(s^n,\rho^n)\theta^n_x(\chi(s^n))'_s s^n_x\theta^n_{xx}dx-\\-\int\limits_0^1 A(s^n,\rho^n)\theta^n_x\chi(s^n)s^n_x\theta^n_{xx}dx-\int\limits_0^1 A(s^n,\rho^n)c_2\rho^n(v_2^n-v_1^n)\theta^n_x\theta^n_{xx}dx.\end{gathered}\tag{36}$$

Функции $(\chi(s))'_s(s^n)$ равномерно по n ограничены при всех ρ^n и $s^n \in (0,1)$. Поэтому с учетом неравенств (24), (25) и неравенств Коши $\forall \varepsilon_i > 0, i = 29, 30, 31$ оценим слагаемые правой части из равенства (36) аналогично слагаемым из равенства (34). Получаем неравенство

$$\frac{d}{dt}\|\theta^n_x(t)\|^2 + 2\nu_2\|\theta^n_{xx}(t)\|^2 \leqslant \sum_{i=29}^{31}\varepsilon_i\|\theta^n_{xx}\|^2 + C(z^2_n(t) + z^3_n(t) + z^4_n(t)). \tag{37}$$

Выбирая ν_0, ν_1, ν_2 из условия $\nu^0 \equiv \min\{\nu_0, \nu_1, \nu_2\}$ и складывая неравенства (27), (29), (31), (33), (35), (37), получим

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}(\|v^n_1(t)\|^2 + \|v^n_2(t)\|^2 + \|\theta^n(t)\|^2 + \|v^n_{1x}(t)\|^2 + \|v^n_{2x}(t)\|^2 + \|\theta^n_x(t)\|^2) + \nu^0\|v^n_{1x}(t)\|^2 + \nu^0\|v^n_{2x}(t)\|^2 + \\ +\nu^0\|\theta^n_x(t)\|^2 + 2\nu^0\|v^n_{1xx}(t)\|^2 + 2\nu^0\|v^n_{2xx}(t)\|^2 + 2\nu^0\|\theta^n_{xx}(t)\|^2 \leqslant \sum_{i=4}^{11}\varepsilon_i\|v^n_{1xx}(t)\|^2 + \\ + \sum_{i=18}^{25}\varepsilon_i\|v^n_{2xx}(t)\|^2 + \sum_{i=29}^{31}\varepsilon_i\|\theta^n_{xx}\|^2 + C(\|g(t)\|^2 + z_n(t) + z^2_n(t) + z^3_n(t) + z^4_n(t) + z^5_n(t))\end{gathered} \tag{38}$$

и выберем $\varepsilon^1 = \sum\limits_{i=4}^{11}\varepsilon_i$, $\varepsilon^2 = \sum\limits_{i=18}^{25}\varepsilon_i$, $\varepsilon^3 = \sum\limits_{i=29}^{31}\varepsilon_i$, из условия $\sum\limits_{j=1}^{3}\varepsilon^j = 2\nu^0 - k$ (если $\nu^0 \leqslant 1$, то положим $\kappa = \nu^0/2$, а ε^j выберем из условия $\sum\limits_{j=1}^{3}\varepsilon^j = 3\nu^0/2$; если $\nu^0 > 1$, то $\kappa = 1/2$, а ε^j выберем из условия $\sum\limits_{j=1}^{3}\varepsilon^j = 2\nu^0 - 1/2$). Соотношение (38) можно записать в форме дифференциального неравенства

$$\frac{dz_n}{dt} \leqslant C(\|g(t)\|^2 + z^5_n(t)), \tag{39}$$

где постоянная C не зависит от n. Из (39) следует равномерная по n ограниченность $z_n(t)$ при всех $t \leqslant t_0$, где $t_0 < \frac{1}{C^2}(z_n(0) + C\int\limits_0^T\|g(\tau)\|^2 d\tau)^{-4}$. При таком выборе t_0 из (39) следует, что для любого n справедливо неравенство

$$\begin{gathered}\max_{0\leqslant t\leqslant t_0}\|v^n_{1x}(t)\|^2 + \max_{0\leqslant t\leqslant t_0}\|v^n_{2x}(t)\|^2 + \max_{0\leqslant t\leqslant t_0}\|\theta^n_x(t)\|^2 + \\ + \int_0^{t_0}(\|v^n_{1xx}(t)\|^2 + \|v^n_{2xx}(t)\|^2 + \|\theta^n_{xx}(t)\|^2)dt \leqslant N\end{gathered} \tag{40}$$

с постоянной N, не зависящей от n.

Вернемся к неравенствам (22) и (23). Из равенства (18) и (21) легко получаем

$$\frac{m_0}{1 + 2^{1/2}M_0N^{1/2}t_0^{3/4}} \leqslant s^n(x,t) \leqslant \frac{M_0}{1 - 2^{1/2}M_0N^{1/2}t_0^{3/4}},$$

$$m_1 e^{-\frac{M_0+1}{2}2^{1/2}N^{1/2}t_0^{3/4}} \leqslant \rho^n(x,t) \leqslant M_1 e^{\frac{M_0+1}{2}2^{1/2}N^{1/2}t_0^{3/4}},$$

здесь N — постоянная из (40). Если выбрать

$$t_0 \leqslant \min\left\{(\frac{1-M_0}{(1+M_0)2^{1/2}M_0N^{1/2}})^{4/3}, (\frac{2^{1/2}ln2}{(M_0+1)N^{1/2}})^{4/3}, \frac{1}{C^2}(z_n(0) + C\int_0^T\|g(\tau)\|^2 d\tau)^{-4}\right\},$$

то получаем неравенства (22) и (23) соответственно при $x \in [0,1]$, $t \in [0,t_0]$.

Оценки (22), (23), (40) позволяют выделить из последовательностей $\{s^n\}$, $\{v_1^n\}$, $\{v_2^n\}$, $\{\rho^n\}$, $\{\theta^n\}$ сходящиеся подпоследовательности. Предельным переходом в равенствах (12), (13), (14), (16), (17) показывается, что предельные функции s, v_1, v_2, ρ, θ дают обобщенное решение задачи (7)– (11) на промежутке $[0,t_0]$. □

Работа выполнена в рамках программ "Развитие научного потенциала высшей школы"(2009-2010), №2.2.2.4/4278, "Проведение научных исследований коллективами научно-образовательных центров в области механики"(2009-2013), №2010-1.1-112-129-003.

Список литературы

[1] S.K.Gard, J. W.Pritchett, Dynamics of gas–fluidized beds, *Journal of Applied Phisics*, **46**(1975), №10.

[2] M.Göz, Existence and uniqueness of time-dependent spatially periodic solutions of fluidized bed equations, *ZAMM. Z. angew. Math.Mech.*, **71**(1991), №6, 750–751.

[3] A.A.Papin, I.G.Akhmerova, Solvability of the system of equations of one-dimensional motion of a heat-conducting two-phase mixture, *Mathematical Notes*, **87**(2010), №2, 230–243.

[4] С.Н.Антонцев, А.В.Кажихов, Краевые задачи механики неоднородных жидкостей, Новосибирск, Наука, 1983.

Solvability Initial-boundary Value Problem for Equations One-dimensional Motion of the Two-phase Mixture

Irina G. Akhmerova

The local solvability initial-boundary value problem for the equations one-dimensional nonstationary motion of the heat-conducting two-phase mixture (gas-particulate pollutant) is proved.

Keywords: gas-liquid mixture, interpenetrating movements, solvability.